กรณีศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่าง

สุภาภรณ์ พรหมากาศ

มหาวิทยาลัยนเรศวร

การค้นคว้าอิสระ เสนอเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
หลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา
พฤษภาคม 2563
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยนเรศวร

อาจารย์ที่ปรึกษาและหัวหน้าภาควิชาการศึกษา ได้พิจารณาการค้นคว้าอิสระ เรื่อง "กรณีศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่าง" เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยนเรศวร

.....

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สิรินภา กิจเกื้อกูล)

อาจารย์ที่ปรึกษา

.....

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อังคณา อ่อนธานี)

หัวหน้าภาควิชาการศึกษา

พฤษภาคม 2563

ประกาศคุณูปการ

การค้นคว้าอิสระฉบับนี้ สำเร็จลงได้ด้วยความกรุณาอย่างยิ่งจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สิรินภา กิจเกื้อกูล ที่ปรึกษาและอาจารย์ประจำภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร ที่ได้สละเวลาอันมีค่าให้คำแนะนำปรึกษา ตลอดจนตรวจแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ ด้วยความเอาใจใส่เป็นอย่างยิ่ง ตลอดจนเป็นแรงผลักดันให้ผู้ค้นคว้าสามารถก้าวผ่านอุปสรรคต่างๆ ที่เกิดขึ้นตลอดระยะเวลาที่ทำการค้นคว้าอิสระฉบับนี้ จนการค้นคว้าอิสระสำเร็จสมบูรณ์ได้ ผู้ค้นคว้าขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ผู้ค้นคว้าขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิเชียร ธำรงโสตถิสกุล และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วนินทร พูนไพบูลย์พิพัฒน์ อาจารย์ประจำภาควิชาการศึกษา มหาวิทยาลัยนเรศวร ที่ท่านได้สละเวลาอันมีค่าให้คำแนะนำ แก้ไข และตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการค้นคว้า จนทำให้การค้นคว้าครั้งนี้สมบูรณ์และมีคุณค่า

กราบขอบพระคุณครอบครัว ที่คอยเป็นกำลังใจและเป็นแรงผลักดันที่สำคัญอย่างยิ่ง ที่ทำให้ผู้ค้นคว้าได้ทำการค้นคว้าอิสระฉบับนี้สำเร็จลุล่วง รวมไปถึงการให้การสนับสนุนด้านต่างๆ ตลอดมา

สุดท้ายนี้ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาการศึกษาทุกท่าน และขอบคุณพี่ๆ เพื่อนๆ น้องๆ นิสิตปริญญาโทที่เป็นส่วนหนึ่งในการให้ความช่วยเหลือ และเป็นกำลังใจที่ดี ให้กับผู้ค้นคว้าในการค้นคว้าอิสระฉบับนี้

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมีจากการค้นคว้าอิสระฉบับนี้ ผู้ค้นคว้าขออุทิศแด่ผู้มีพระคุณทุกๆ ท่าน

สุภาภรณ์ พรหมากาศ

ชื่อเรื่อง	กรณีศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่าง
ผู้ศึกษาค้นคว้า	สุภาภรณ์ พรหมากาศ
ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สิรินภา กิจเกื้อกูล
ประเภทสารนิพนธ์	การค้นคว้าอิสระ กศ.ม. สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยนเรศวร, 2562
คำสำคัญ	วิธีการสอนรูปธรรม ภาพ และนามธรรม, โปรแกรมจีโอจีบร้า, มโนมติทางคณิตศาสตร์

บทคัดย่อ

การวิจัยเชิงปฏิบัติการนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) ศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ของนักเรียนชนเผ่าในเขตภาคเหนือตอนล่าง และ 2) ศึกษามโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองของนักเรียนชนเผ่าในเขตภาคเหนือตอนล่าง เมื่อจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra โดยผู้เข้าร่วมวิจัย ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 7 คน ของโรงเรียนขยายโอกาสในจังหวัดกำแพงเพชร เครื่องมือวิจัย ได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้ แบบสะท้อนผล ผลงานนักเรียน ใบกิจกรรม และแบบสำรวจมโนมติ ผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้มาวิเคราะห์เชิงเนื้อหา และตรวจสอบความน่าเชื่อถือของข้อมูลด้วยวิธีสามเส้า ผลการวิจัยพบว่า การจัดการเรียนรู้ควรปฏิบัติ ดังนี้ 1) การแนะนำ ชี้แจง เริ่มต้นสถานการณ์ที่อยู่ในบริบทชีวิตของนักเรียน ทบทวนความรู้เดิม และอธิบายการใช้งานโปรแกรม GeoGebra 2) การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra ควรให้นักเรียนใช้งานโปรแกรม GeoGebra ด้วยตนเอง 3) การจำแนกความรู้ ควรแนะนำแนวทางในการเขียนภาพ 4) การปรับแนวคิด ควรใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนได้เชื่อมโยงแนวคิดจากภาพไปสู่แนวคิดเชิงนามธรรม และพบว่า นักเรียนมีมโนมติทางคณิตศาสตร์ (SU) เพิ่มขึ้น ในขณะที่นักเรียนที่ไม่เข้าใจมโนมติทางคณิตศาสตร์ (NU) และนักเรียนที่มีมโนมติทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อน (MU) มีจำนวนลดลงในระหว่างจัดการเรียนรู้ และท้ายที่สุดนักเรียนมีมโนมติทางคณิตศาสตร์ (SU) ร้อยละ 66.67

Title	A CASE STUDY OF CONCRETE PICTORIAL ABSTRACT APPROACH WITH GEOGEBRA PROGRAM TO DEVELOP MATHEMATICAL CONCEPTS ON FACTORING POLYNOMIALS OF SECOND DEGREE FOR LAHU TRIBAL STUDENTS IN THE LOWER NORTHERN REGION
Authors	Supaporn Prommakas
Advisor	Asst. Prof. Sirinapa Kijkuakul, Ph.D.
Academic Paper	Independent Study M.Ed. in Mathematics Education, Naresuan University, 2019
Keywords	Concrete Pictorial Abstract, GeoGebra, Mathematical Concepts

ABSTRACT

The purpose of this action research was to 1) Study how to implement Concrete Pictorial Abstract Approch with GeoGebra program to develop mathematical concepts on factoring polynomial of second degree for Lahu tribal students in the lower northern region. 2) Study mathematical concepts of second degree factoring polynomial for Lahu tribal students in the lower northern region when learning by using Concrete Pictorial Abstract with GeoGebra program. The participants were 7 students in Grade 8 of the expand opportunity school in Kamphaengphet province. Research tools consisted of lesson plants, reflective journals, student work, learning activity sheet, and concept survey. The researcher used content analysis and validated the content by method and resource triangulations. This research found that teaching model should be implement by facilitating the students to 1) Guided explication 2) Exploratory familiarization 3) Knowledge classification and 4) Concept reification. Also the research found that students had more complete Sound Understanding (SU), But less number of No Understanding (NU), and Misconceptions Understanding (MU) during the implementation. Finally, most students (66.67%) hold complete Sound Understanding (SU).

สารบัญ

บทที่		หน้า
1	**บทนำ**	1
	ความเป็นมาของปัญหา	1
	คำถามของการวิจัย	5
	จุดมุ่งหมายของการวิจัย	5
	ขอบเขตของงานวิจัย	5
	นิยามศัพท์เฉพาะ	6
	ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย	8
2	**เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง**	9
	หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พ.ศ.2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์	10
	การจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract	16
	โปรแกรม GeoGebra	18
	มโนมติทางคณิตศาสตร์	24
	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	38
3	**วิธีดำเนินการวิจัย**	42
	ผู้เข้าร่วมวิจัย	42
	รูปแบบการวิจัย	42
	ข้อมูลพื้นฐานของโรงเรียน	44
	เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	45
	การเก็บและรวบรวมข้อมูลในการวิจัย	52
	การวิเคราะห์ข้อมูล	52

สารบัญ (ต่อ)

บทที่		หน้า
4	ผลการวิจัย	60
	ตอนที่ 1 แนวทางการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่าง	60
	ตอนที่ 2 มโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่าง เมื่อจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra	105
5	บทสรุป	115
	สรุปผลการวิจัย	115
	อภิปรายผลการวิจัย	119
	ข้อเสนอแนะ	122
บรรณานุกรม		124
ภาคผนวก		131
ประวัติผู้วิจัย		154

สารบัญตาราง

ตาราง		หน้า
1	แสดงความสัมพันธ์ระหว่างวัตถุประสงค์ของงานวิจัยและเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	46
2	แสดงตัวอย่างการวิเคราะห์ข้อมูลในมโนมติที่ 1 เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติของการแจกแจง	55
3	แสดงตัวอย่างการวิเคราะห์ข้อมูลในมโนมติที่ 2 เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว	56
4	แสดงตัวอย่างการวิเคราะห์ข้อมูลในมโนมติที่ 3 เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์	57
5	แสดงตัวอย่างการวิเคราะห์ข้อมูลในมโนมติที่ 4 เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง	58
6	แสดงความสัมพันธ์ระหว่างวัตถุประสงค์ของงานวิจัย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยและการวิเคราะห์ข้อมูลการวิจัย	59
7	ปัญหาและแนวทางในการแก้ไขปรับปรุงในวงจรปฏิบัติการที่ 1	71
8	ปัญหาและแนวทางในการแก้ไขปรับปรุงในวงจรปฏิบัติการที่ 2	83
9	ปัญหาและแนวทางในการแก้ไขปรับปรุงในวงจรปฏิบัติการที่ 3	94
10	ปัญหาและแนวทางในการแก้ไขปรับปรุงในวงจรปฏิบัติการที่ 4	104
11	แสดงมโนมติทางคณิตศาสตร์ระหว่างที่ได้รับการจัดการเรียนรู้	105
12	แสดงมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติของการแจกแจง ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้	106
13	แสดงมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้	109
14	แสดงมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้	111
15	แสดงมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้	113

สารบัญภาพ

ภาพ		หน้า
1	ตัวอย่างโปรแกรม GeoGebra	21
2	ตัวอย่าง Classroom Resources ของโปรแกรม GeoGebra	22
3	แสดงการสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยใช้โปรแกรม GeoGebra	65
4	แสดงการเขียนภาพการหาผลคูณของพหุนาม	66
5	แสดงการเขียนการแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้สมบัติของการแจกแจง	66
6	แสดงการแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจงของนักเรียนที่สามารถเชื่อมโยงแนวคิดเชิงนามธรรมได้	67
7	แสดงการแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจงของนักเรียนที่สามารถเชื่อมโยงแนวคิดเชิงนามธรรมได้	67
8	แสดงการหาความสูงของพลุในสถานการณ์ที่เป็นบริบทชีวิตจริงของนักเรียนได้	67
9	แสดงการสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ขั้น Guided Explication (การแนะนำชี้แจง) ในวงจรปฏิบัติการที่ 1 โดยผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้	68
10	แสดงการสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ขั้น Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra) ในวงจรปฏิบัติการที่ 1 โดยผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้	69
11	แสดงการสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ขั้น Concept Reification (การปรับแนวคิด) ในวงจรปฏิบัติการที่ 1 โดยผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้	71
12	แสดงการฝึกปฏิบัติการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวด้วยโปรแกรม GeoGebra ของนักเรียน	77
13	แสดงชิ้นงานนักเรียนที่ได้จากการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวด้วยโปรแกรม GeoGebra เมื่อ $a=1$	77
14	แสดงชิ้นงานนักเรียนที่ได้จากการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวด้วยโปรแกรม GeoGebra เมื่อ $a\neq 0$	78
15	แสดงการเขียนภาพการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว เมื่อ $a=1$ ของนักเรียนได้อย่างถูกต้อง	79

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพ		หน้า
16	แสดงการเขียนภาพการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว เมื่อ $a \neq 0$ ของนักเรียนได้อย่างถูกต้อง	79
17	แสดงการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวของนักเรียนที่สามารถเชื่อมโยงแนวคิดเชิงนามธรรมได้	80
18	แสดงการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวของนักเรียนที่สามารถเชื่อมโยงแนวคิดเชิงนามธรรมได้	80
19	แสดงการนำความรู้ไปใช้ในการแก้สถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง	81
20	แสดงการสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ขั้น Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra) ในวงจรปฏิบัติการที่ 2 โดยผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้	82
21	แสดงการฝึกปฏิบัติการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ด้วยโปรแกรม GeoGebra ของนักเรียน	87
22	แสดงชิ้นงานนักเรียนที่ได้จากการแยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ด้วยโปรแกรม GeoGebra	88
23	แสดงการเขียนภาพการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ของนักเรียนได้อย่างถูกต้อง	89
24	แสดงการแยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ของนักเรียนที่สามารถเชื่อมโยงแนวคิดเชิงนามธรรมได้	89
25	แสดงการแยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ของนักเรียนที่สามารถเชื่อมโยงแนวคิดเชิงนามธรรมได้	90
26	แสดงการนำความรู้เรื่องการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ไปใช้ในการแก้สถานการณ์ปัญหา	91
27	แสดงการสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ขั้น Guided explication (การแนะนำชี้แจง)ในวงจรปฏิบัติการที่ 3 โดยผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้	92

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพ		หน้า
28	แสดงการสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ขั้น Exploratory familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra) ในวงจรปฏิบัติการที่ 3 โดยผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้	93
29	แสดงการฝึกปฏิบัติการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสองด้วยโปรแกรม GeoGebra ของนักเรียน	98
30	แสดงการฝึกปฏิบัติการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสองด้วยโปรแกรม GeoGebra ของนักเรียน	99
31	แสดงการเขียนภาพของการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสองด้วยโปรแกรม GeoGebra ของนักเรียน	100
32	แสดงการแยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นผลต่างของกำลังสองของนักเรียนที่สามารถเชื่อมโยงแนวคิดเชิงนามธรรมได้	100
33	แสดงการแยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นผลต่างของกำลังสองของนักเรียนที่สามารถเชื่อมโยงแนวคิดเชิงนามธรรมได้	101
34	แสดงการสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ขั้น Concept Reification (การปรับแนวคิด) ในวงจรปฏิบัติการที่ 4 โดยผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้	103
35	แสดงตัวอย่างการปรับเปลี่ยนมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติของการแจกแจง	107
36	แสดงตัวอย่างการปรับเปลี่ยนมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว	110
37	แสดงตัวอย่างการปรับเปลี่ยนมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์	112
38	แสดงตัวอย่างการปรับเปลี่ยนมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง	114

บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาของปัญหา

มโนมติ (Concept) ทางคณิตศาสตร์ เป็นพื้นฐานสำคัญสำหรับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เพราะความสำเร็จทางการเรียนคณิตศาสตร์นั้นขึ้นอยู่กับความเข้าใจในมโนมติที่ถูกต้องในสิ่งที่ได้เรียนรู้ หากนักเรียนมีมโนมติทางคณิตศาสตร์ที่ดีที่ถูกต้องแล้ว ก็จะสามารถเรียนรู้และแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ดี รวมทั้งมีพื้นฐานที่จะเชื่อมโยงและคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ในระดับสูงขึ้นไปได้ดีด้วย (The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology, 2012)

มโนมติที่คลาดเคลื่อน (Misconception) ทางคณิตศาสตร์ เป็นความคิดความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนไปจากสิ่งที่ถูกต้องหรือเป็นจริงในทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นจากสาเหตุหลายประการ ทั้งสาเหตุจากการละเลยในเงื่อนไขของทฤษฎีบท กฎ สูตร หรือบทนิยามทางคณิตศาสตร์ และสาเหตุอื่นๆ ที่มีผลต่อความคลาดเคลื่อนในการทำความเข้าใจคณิตศาสตร์ อาทิ ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ความสามารถทางการคิด ระดับสติปัญญา และประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน รวมทั้งบริบทและกระบวนการจัดการเรียนการสอนของครู สิ่งเหล่านี้ล้วนมีผลต่อการเกิดมโนมติที่คลาดเคลื่อน ซึ่งเมื่อเกิดขึ้นแล้วจะมีผลกระทบต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก โดยอาจจะทำให้นักเรียนนำความรู้ไปใช้อย่างไม่ถูกต้อง หรือไม่สามารถนำความรู้ไปใช้ได้ รวมทั้งอาจทำให้ความรู้พื้นฐานไม่ดีพอที่จะเรียนรู้มโนมติอื่น (อัมพร ม้าคนอง, 2557) โดยทั่วไปแล้วมโนมติที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์อาจเกิดขึ้นก่อนการเรียนรู้ ในระหว่างการเรียนรู้ หรือหลังจากการจัดการเรียนรู้ โดยที่นักเรียนมักจะไม่รู้ตนเองว่ามีมโนมติที่คลาดเคลื่อนอย่างไรบ้าง หากครูสามารถทราบเกี่ยวกับมโนมติที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนในแต่ละเนื้อหาก่อนที่จะเรียนเนื้อหานั้นต่อเนื่องไปในระดับที่สูงขึ้น หรือก่อนที่จะเรียนเนื้อหาใหม่ต่อไปก็จะเป็นประโยชน์อย่างยิ่งทั้งต่อตัวนักเรียนเองและครู ในการเตรียมการสอนเพื่อป้องกันไม่ให้นักเรียนเกิดมโนมติที่คลาดเคลื่อน หรือถ้าเกิดขึ้นแล้วจะได้เตรียมหาวิธีการเพื่อเปลี่ยนแปลงมโนมติที่คลาดเคลื่อนนั้นให้ถูกต้อง

จากการทดสอบทางการศึกษาระดับชาติขั้นพื้นฐาน (O-Net) ซึ่งเป็นการทดสอบเพื่อวัดความรู้และความคิดของนักเรียนในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 พบว่าในปีการศึกษา 2561 คะแนนค่าเฉลี่ยระดับประเทศของกลุ่มสาระ

คณิตศาสตร์ จากคะแนนเต็ม 100 คะแนน ในแต่ละระดับชั้นมีรายละเอียดดังต่อไปนี้ ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 มีคะแนนเฉลี่ย 37.50 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีคะแนนเฉลี่ย 30.04 และระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีคะแนนเฉลี่ย 30.72 เห็นได้ชัดว่าแต่ละระดับชั้นมีคะแนนเฉลี่ยต่ำกว่าครึ่งหนึ่ง ผลคะแนนดังกล่าวสะท้อนให้เห็นว่าระบบการศึกษาของประเทศยังไม่สามารถเตรียมนักเรียนให้มีความรู้ ความคิด และทักษะที่จำเป็นสำหรับการเป็นประชาชนที่มีคุณภาพในอนาคตได้อย่างเพียงพอ ซึ่งปัจจัยเชิงสาเหตุที่ทำให้คะแนน O-Net ต่ำ พบว่า ปัจจัยบางส่วนอาจเกิดจากพฤติกรรมการสอนของครู ไม่ว่าจะเป็นสื่อการสอนหรือการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน หรืออาจเกิดจากพื้นฐานความรู้ของนักเรียน กล่าวคือสติปัญญาของนักเรียนเองมีผลต่อมโนมติทางคณิตศาสตร์ เมื่อนักเรียนมีมโนมติทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อนจะทำให้ประสิทธิภาพด้านทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนลดลง (เอื้อมพร หลินเจริญ, สิริศักดิ์ อาจวิชัย และภีรภา จันทร์อินทร์, 2552)

ในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 นั้น เนื้อหาการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองเป็นเนื้อหาพื้นฐานที่มีความสำคัญสำหรับนักเรียน และจำเป็นสำหรับเนื้อหาพีชคณิตและเนื้อหาคณิตศาสตร์ขั้นสูงจำนวนมาก เป็นเนื้อหาพื้นฐานของวิชาหลายวิชา เช่น วิทยาศาสตร์ เคมี และฟิสิกส์ ซึ่งมโนมติในเรื่องการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองนั้นมีความยากสำหรับนักเรียน เนื่องจากการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองมีลักษณะเนื้อหาที่มีความเป็นนามธรรม ยากต่อการทำความเข้าใจและนำความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งจากการจัดการเรียนการสอนเรื่องการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 พบว่านักเรียนมีมโนมติที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง เช่น การแยกตัวประกอบของ $-15x^2+12x=3x(-5x+4)$ หรือ $-15x^2+12x=-3x(5x-4)$ ซึ่งนักเรียนมักจะแยกตัวประกอบเป็น $-15x^2+12x=3x(5x+12x)$ หรือ $-15x^2+12x=3x^2(5+12x)$ และการแยกตัวประกอบของ $x^2+2x+1=(x+1)(x+1)$ นักเรียนแยกตัวประกอบเป็น $x^2+2x+1=(x+2)(x+1)$ โดยสาเหตุอาจเนื่องมาจากนักเรียนขาดความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีบท กฎ สูตร สมบัติ หรือนิยามอย่างถ่องแท้ว่ามีเงื่อนไขอย่างไรบ้าง จากตัวอย่างการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองดังกล่าว จะเห็นว่านักเรียนมีมโนมติที่คลาดเคลื่อนซึ่งหากนักเรียนมีมโนมติทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อนแล้ว อาจนำไปสู่ความยากลำบากในหลายๆ เรื่อง อีกทั้งยังส่งผลทำให้เกิดปัญหาในการเรียนเรื่องอื่นๆ ในระดับที่สูงขึ้นไปด้วย ครูผู้สอนจึงจำเป็นต้องหาแนวทาง กลยุทธ์ หรือวิธีการสอนที่หลากหลายเพื่อป้องกันหรือปรับเปลี่ยนให้นักเรียนมีมโนมติทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง

Concrete Pictorial Abstract เป็นวิธีการสอนสำหรับการพัฒนามโนมติทางคณิตศาสตร์เบื้องต้นในระดับประถมศึกษาของประเทศสิงคโปร์ (MOE, 2007, 2012 อ้างถึงใน Hui et al., 2017) จากการวิจัยของ The Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) ระบุว่าสิงคโปร์มีผลคะแนนอยู่ในระดับสูงสุดของโลกตั้งแต่ปี 2000 จนถึงปัจจุบัน ส่งผลให้นานาประเทศยอมรับถึงมาตรฐานการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ของสิงคโปร์ โดยสหรัฐอเมริกาและยุโรปได้นำหลักสูตรคณิตศาสตร์ของสิงคโปร์ไปใช้ในโรงเรียนอย่างแพร่หลาย เห็นได้ชัดทั้งในหลักสูตรแห่งชาติและหนังสือเรียนที่หลากหลายที่นำมาใช้ในโรงเรียน (Hui et al., 2017) ซึ่งเป็นกระบวนการสร้างองค์ความรู้ โดยเริ่มจาก Concrete เป็นการเรียนรู้ผ่านสิ่งที่เป็นรูปธรรม สิ่งที่สามารถสัมผัสได้เพื่อเป็นสัญลักษณ์มโนมติในเรื่องนั้นๆ Pictorial เป็นการเรียนรู้ผ่านสิ่งที่เป็นภาพ โดยมุ่งเน้นให้นักเรียนสามารถสร้างภาพขององค์ความรู้ไปสู่ Abstract ได้ และ Abstract เป็นการเรียนรู้ผ่านสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ อย่างไรก็ตามการให้นักเรียนได้สัมผัสกับคณิตศาสตร์ผ่านสิ่งของที่เป็นรูปธรรม ทำให้นักเรียนมองภาพรวมออกได้ง่าย เป็นการสร้างแรงจูงใจให้กับนักเรียนและมองว่าคณิตศาสตร์เป็นเรื่องใกล้ตัว ทำให้นักเรียนได้มาซึ่งมโนมติที่ถูกต้องทางคณิตศาสตร์และสามารถนำความรู้ที่ได้ไปประยุกต์ใช้ได้ ซึ่งมีขั้นตอนการเรียนรู้ 4 ขั้นตอน ได้แก่ 1. การแนะนำชี้แจง (Guided Explication) 2. การทำความคุ้นเคยเชิงสำรวจ (Exploratory Familiarization) 3. การจำแนกความรู้ (Knowledge classification) และ 4. การปรับแนวคิด(Concept Reification) (Hui et al., 2017)

อย่างไรก็ดีเมื่อมโนมติมีความซับซ้อนมากขึ้น การสร้างความเชื่อมโยงมโนมติทางคณิตศาสตร์ผ่านสิ่งที่เป็นรูปธรรม เช่น เกม ลูกคิด ฟิวเจอร์บอร์ด วัตถุอื่นๆหรือสิ่งของในชีวิตประจำวัน อาจยังไม่เพียงพอต่อความเข้าใจมโนมติเรื่องนั้นๆ เพื่อให้การสอนมีความน่าสนใจเหมาะสมกับนักเรียน และมีความเป็นรูปธรรม โปรแกรม GeoGebra จึงเป็นทางเลือกที่จะนำเข้ามาประยุกต์กับการจัดการเรียนรู้ ซึ่งผลของการนำโปรแกรม GeoGebra ไปใช้ในกระบวนการเรียนการสอนได้ถูกนำเสนอผ่านงานวิจัยของ วุฒิชัย ภูดี (2559) พบว่า โปรแกรม GeoGebra ช่วยให้การสอนคณิตศาสตร์มีความเป็นรูปธรรม ผู้เรียนได้สร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง สามารถพัฒนาทักษะของการนึกภาพ กระบวนการแก้ปัญหา และเป็นตัวอธิบายเพื่อสร้างความเข้าใจที่กระจ่างชัดในเรื่องนั้นๆได้ ซึ่งสอดคล้องกับ อธิภูมิ พาสงค์ (2559) ที่กล่าวว่า การสอนด้วยโปรแกรม GeoGebra ช่วยให้นักเรียนมองเห็นการดำเนินการที่เป็นรูปธรรมมากขึ้น ส่งเสริมให้ผู้เรียนสามารถค้นพบองค์ความรู้ด้วยตัวเอง โดยมีครูมีหน้าที่คอยแนะนำในการสอนแต่ละขั้น เป็นโปรแกรมที่ใช้งานง่าย สะดวกและมีความเป็นพลวัต นอกจากนี้สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติประเทศอเมริกา

(NCTM, 2000) กล่าวว่า เทคโนโลยีเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่สามารถใช้ได้ทุกระดับชั้น เพื่อช่วยให้เด็กมีความเข้าใจ และเพิ่มทักษะในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนด้วย ในโลกยุคปัจจุบันเทคโนโลยีมีความเจริญก้าวหน้าอย่างรวดเร็ว การเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 จึงจำเป็นในการพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ ทักษะ กระบวนการที่จำเป็นสำหรับการตัดสินใจ การมีส่วนร่วมในสังคม การประกอบอาชีพ และการดำรงชีวิต คณิตศาสตร์ถือว่าเป็นเครื่องมือในการศึกษาด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่นๆ อันเป็นรากฐานในการพัฒนาทรัพยากรบุคคลของชาติให้มีคุณภาพ การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์หากนำเทคโนโลยีเข้ามาช่วยในการจัดการเรียนการสอนแล้วจะทำให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้ได้อย่างหลากหลาย และสามารถสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง

เนื่องด้วยโรงเรียนที่ผู้วิจัยจัดการเรียนการสอนเป็นโรงเรียนขนาดกลาง มีความพร้อมด้านเทคโนโลยี แต่เนื่องจากโรงเรียนที่ผู้วิจัยจัดการเรียนการสอนตั้งบริเวณพื้นที่ภูเขาโอบล้อม ระยะทางระหว่างโรงเรียนถึงตัวอำเภอ 20 กิโลเมตร โรงเรียนตั้งอยู่ห่างจากชุมชนของนักเรียนประมาณ 5 กิโลเมตร นักเรียนร้อยละ 80 เป็นชนเขาเผ่าลาหู่ วิถีชีวิตของคนในชุมชนของนักเรียนโดยส่วนใหญ่แล้วมีอาชีพรับจ้างทั่วไป ส่วนใหญ่ใช้ชีวิตอยู่บนพื้นฐานของความเรียบง่ายมีการกินอยู่ที่เน้นเพื่อการดำรงชีวิต ลักษณะของอาหารส่วนใหญ่แล้วจะเป็นประเภทผัดแบบง่ายๆ เช่น ผัดผัก ไข่เจียว เป็นส่วนใหญ่ และมีการทำขนมประจำถิ่นบ้างในช่วงเวลาที่สำคัญต่างๆ เช่น ประเพณีปีใหม่ลาหู่ที่ถือว่าเป็นประเพณีการเริ่มต้นสิ่งใหม่ๆ ฐานะทางครอบครัวค่อนข้างยากจน บางครอบครัวไม่มีเครื่องมือในการสื่อสาร ความสัมพันธ์ภายในครอบครัวของนักเรียนส่วนใหญ่มีปัญหาทางครอบครัว และอาศัยอยู่กับปู่ ย่า ตา และยาย นักเรียนส่วนใหญ่เป็นนักเรียนชนเผ่า ซึ่งพื้นฐานครอบครัวไม่ได้ใช้ภาษาไทยในการสื่อสารในชีวิตประจำวัน ทำให้บางครอบครัวไม่สามารถสื่อสารเป็นภาษาไทยได้ ไม่เข้าใจภาษาและโครงสร้างของภาษา ทำให้อาจเกิดความผิดพลาดในการใช้ภาษาบ่อยครั้ง และเมื่อนักเรียนเกิดความผิดพลาดในการใช้ภาษาทำให้นักเรียนไม่กล้าที่จะสื่อสารกับผู้อื่น และเมื่อเกิดความผิดพลาดในการใช้ภาษาและการสื่อสารแล้วส่งผลให้นักเรียนส่วนใหญ่มีมโนมติที่คลาดเคลื่อนในบางเรื่องด้วย จากสภาพบริบทที่กล่าวมาจะทำให้มองเห็นสิ่งแวดล้อมในการดำรงชีวิตของนักเรียน เป็นสังคมแห่งวัฒนธรรม สังคมแห่งการหล่อหลอมจากรุ่นสู่รุ่น เมื่อนักเรียนจบการศึกษาออกไปยังคงต้องใช้ชีวิตกับสิ่งต่างๆ เหล่านี้ ซึ่งเป็นวิถีชีวิตที่แตกต่างไปจากสังคมในเมืองใหญ่ๆ นั่นทำให้การนำโปรแกรม GeoGebra เข้ามาประยุกต์กับการจัดการเรียนรู้มีความเหมาะสมกับบริบทของนักเรียนและบริบทของโรงเรียน

ด้วยความสำคัญดังกล่าวประกอบกับผู้วิจัยปฏิบัติงานสอนคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จึงมีความสนใจที่จะศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่าง ของโรงเรียนขยายโอกาสแห่งหนึ่งในอำเภอคลองลาน จังหวัดกำแพงเพชร

คำถามของการวิจัย

1. แนวทางการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่างมีลักษณะอย่างไร

2. นักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่างสามารถพัฒนามโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง เมื่อจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ได้หรือไม่ อย่างไร

จุดมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ของนักเรียนชนเผ่าในเขตภาคเหนือตอนล่าง

2. เพื่อศึกษามโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองของนักเรียนชนเผ่าในเขตภาคเหนือตอนล่าง เมื่อจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra

ขอบเขตของงานวิจัย

ขอบเขตด้านเนื้อหา

เนื้อหาเรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ซึ่งมีเนื้อหาย่อยตามหัวข้อต่อไปนี้

1. การแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจง จำนวน 2 ชั่วโมง
2. การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว จำนวน 3 ชั่วโมง
3. การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ จำนวน 3 ชั่วโมง

4. การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง จำนวน 2 ชั่วโมง

ขอบเขตด้านกลุ่มเป้าหมาย

กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการศึกษา ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562 จำนวน 7 คน เป็นนักเรียนชายจำนวน 5 คน และนักเรียนหญิงจำนวน 2 คน ของโรงเรียนขยายโอกาสแห่งหนึ่งในจังหวัดกำแพงเพชร

นิยามศัพท์เฉพาะ

ในงานวิจัยครั้งนี้มีนิยามศัพท์เฉพาะ ดังต่อไปนี้

1. มโนมติทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความคิดหรือความเข้าใจของนักเรียนที่ได้ตีความหรือสรุปความเกี่ยวกับเนื้อหาเรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง อันเกิดจากการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ซึ่งสามารถสรุปความโดยการอธิบายความคิด หรือความเข้าใจนั้นออกมาเป็นภาพ ภาษาพูด ภาษาเขียนหรือสัญลักษณ์ได้ โดยผู้วิจัยได้นำแนวทางมาจากแนวคิดของ Haidar (1997, อ้างถึงใน ธัญญารัตน์ จูมแพง, 2554) ใช้การวิเคราะห์มโนมติทางคณิตศาสตร์ 5 รูปแบบ ดังนี้

1.1 มโนมติทางคณิตศาสตร์ (Sound Understanding) หรือ SU คือ คำตอบของนักเรียนที่แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีมโนมติสอดคล้องกับมโนมติที่เป็นที่ยอมรับและสอดคล้องกับมโนมติของนักคณิตศาสตร์ทุกองค์ประกอบ เกี่ยวกับเนื้อหาเรื่องการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง

1.2 มโนมติทางคณิตศาสตร์แบบไม่สมบูรณ์ (Partial Understanding) หรือ PU คือ คำตอบของนักเรียนที่แสดงว่ามีมโนมติที่สอดคล้องกับมโนมติที่เป็นที่ยอมรับและสอดคล้องกับมโนมติของนักคณิตศาสตร์อย่างน้อย 1 องค์ประกอบ เกี่ยวกับเนื้อหาเรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง

1.3 มโนมติทางคณิตศาสตร์บางส่วนและมโนมติคลาดเคลื่อนบางส่วน (Partial Understanding with Specific Misconception) หรือ PU&MU คือ คำตอบของนักเรียนที่แสดงว่ามีมโนมติที่สอดคล้องกับมโนมติที่เป็นที่ยอมรับและสอดคล้องกับมโนมติของนักคณิตศาสตร์อย่างน้อย 1 องค์ประกอบและมีบางส่วนที่ไม่สอดคล้อง หรือคลาดเคลื่อนไปจากมโนมติทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเนื้อหาเรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง

1.4 มโนมติทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อน (Specific Misconceptions) หรือ MU คือ คำตอบของนักเรียนที่แสดงมโนมติที่ไม่สอดคล้องหรือคลาดเคลื่อนจากมโนมติที่เป็นที่

ยอมรับ และไม่สอดคล้องกับมโนมติของนักคณิตศาสตร์ เกี่ยวกับเนื้อหาเรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง

1.5 ไม่เข้าใจมโนมติทางคณิตศาสตร์ (No Understanding) หรือ NU คือ การที่นักเรียนไม่ตอบคำถาม ตอบคำถามในลักษณะทวนคำถามหรือตอบคำถามไม่ตรงประเด็น เกี่ยวกับเนื้อหาเรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง

2. การจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra หมายถึง การจัดการเรียนรู้ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง โดยครูใช้โปรแกรม GeoGebra เป็นสื่อการสอนที่ทำให้นักเรียนได้สัมผัสกับคณิตศาสตร์ที่เป็นรูปธรรมผ่านเทคโนโลยีแบบพลวัต ทำความคุ้นเคยกับสิ่งที่เป็นรูปธรรมด้วยการทำซ้ำๆ เพื่อให้นักเรียนคุ้นเคยกับแนวคิดทางคณิตศาสตร์ จนเกิดองค์ความรู้ที่คงที่แล้วเชื่อมโยงการรับรู้นั้นเป็นภาพ จากนั้นสังเคราะห์องค์ความรู้ที่ได้ไปสู่สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรม โดยวิธีการมี 4 ขั้นตอน คือ

2.1 การแนะนำ ชี้แจง (Guided explication) ครูนำเสนอสถานการณ์ปัญหาในบริบทชีวิตจริงของนักเรียนเพื่อดึงดูดและกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความสนใจอยากเรียนรู้ จากนั้นทบทวนความรู้เดิมของนักเรียน แล้วจึงแนะนำ อธิบายการใช้งานโปรแกรม GeoGebra ซึ่งโปรแกรม GeoGebra เป็นสื่อการสอนให้นักเรียนได้เห็นแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เป็นรูปธรรม

2.2 การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra (Exploratory familiarization) ให้นักเรียนจับคู่กับเพื่อน เพื่อให้นักเรียนได้พูดคุย สนทนา แลกเปลี่ยนเรียนรู้กัน ในการสำรวจพื้นที่ของสี่เหลี่ยมมุมฉากและฝึกแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองด้านโปรแกรม GeoGebra จนเกิดความคุ้นเคย และสังเกตเห็นความสัมพันธ์ของพื้นที่ของสี่เหลี่ยมมุมฉากและฝึกแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง โดยครูจะต้องอธิบายและถามกระตุ้นนักเรียนอยู่เสมอ เพื่อให้นักเรียนสามารถสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง

2.3 การจำแนกความรู้ (Knowledge classification) ให้นักเรียนทำกิจกรรมกลุ่มกลุ่มละ 3-4 คน เป็นการเรียนในบริบทของการแลกเปลี่ยนและสื่อสารกับผู้อื่นเพื่อให้เห็นถึงแนวคิดที่หลายหลายในเนื้อหาการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง เปิดโอกาสให้นักเรียนได้วิเคราะห์ความสัมพันธ์ที่สังเกตได้ แล้ววาดภาพของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่สัมพันธ์กับการแยกตัวประกอบ พร้อมทั้งสามารถอธิบายความสัมพันธ์นั้นได้ โดยครูจะต้องอธิบาย ใช้คำถาม ชี้แนะแนวทางเพื่อให้นักเรียนสามารถสรุปแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้

2.4 การปรับแนวคิด (Concept reification) ครูนำนักเรียนสรุปความสัมพันธ์ที่ได้จากการทำกิจกรรมก่อนหน้า เพื่อทบทวนความเข้าใจในขั้นต่างๆ โดยใช้คำถามกระตุ้นนักเรียนทั้งเพื่อสร้างความเข้าใจที่ตรงกัน พร้อมทั้งอธิบาย และยกตัวอย่างประกอบเพื่อให้นักเรียนสามารถแสดงวิธีแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง โดยใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรมได้ รวมไปถึงนำความรู้ที่ได้ไปใช้ในการแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาที่ได้กำหนดไว้ในขั้นตอนที่ 1

ประโยชน์ที่คาดว่าได้รับจากการวิจัย

1. เป็นแนวทางสำหรับครูคณิตศาสตร์ในการศึกษามโนมติทางคณิตศาสตร์ เพื่อการจัดการเรียนรู้ให้เหมาะสม สอดคล้อง และสามารถปรับเปลี่ยนมโนมติของนักเรียนให้สอดคล้องกับมโนมติทางคณิตศาสตร์

2. ทำให้ได้แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra สำหรับนักเรียนชนเผ่าลาหู่

มหาวิทยาลัยนเรศวร

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผู้วิจัยได้ศึกษาวรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องเพื่อเป็นพื้นฐานในการวิจัย เรื่อง กรณีศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่าง ดังนี้

1. หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พ.ศ. 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
    1.1 ความสำคัญของคณิตศาสตร์
    1.2 สาระการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
    1.3 มาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัดที่เกี่ยวข้องกับการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง
    1.4 คุณภาพผู้เรียนเมื่อจบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
    1.5 คำอธิบายรายวิชา ค22102 วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
    1.6 มโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง
2. การจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract
3. โปรแกรม GeoGebra
    3.1 โปรแกรม GeoGebra
    3.2 การจัดการเรียนการสอนด้วยโปรแกรม GeoGebra
4. มโนมติทางคณิตศาสตร์
    4.1 ความหมายของมโนมติ
    4.2 ความหมายของมโนมติทางคณิตศาสตร์
    4.3 ลักษณะของมโนมติทางคณิตศาสตร์
    4.4 ประโยชน์ของมโนมติทางคณิตศาสตร์
    4.5 มโนมติที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์
    4.6 การเปลี่ยนแปลงมโนมติ
5. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พ.ศ.2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

1.1 ความสำคัญของคณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อความสำเร็จในการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 เนื่องจากคณิตศาสตร์ช่วยให้มนุษย์มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างรอบคอบและถี่ถ้วน ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสมและสามารถนำไปใช้ในชีวิตจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่นๆ อันเป็นรากฐานในการพัฒนาทรัพยากรบุคคลของชาติให้มีคุณภาพ และพัฒนาเศรษฐกิจของประเทศให้ทัดเทียมกับนานาชาติ การศึกษาคณิตศาสตร์จึงจำเป็นต้องมีการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง เพื่อให้ทันสมัยและสอดคล้องกับสภาพเศรษฐกิจ สังคม และความรู้ทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีที่เจริญก้าวหน้าอย่างรวดเร็วในยุคโลกาภิวัฒน์

1.2 สาระการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์จัดเป็น 3 สาระ ได้แก่ จำนวนและพีชคณิต การวัดและเรขาคณิต และสถิติและความน่าจะเป็น

สาระที่ 1 จำนวนและพีชคณิต เรียนรู้เกี่ยวกับ ระบบจำนวนจริง สมบัติเกี่ยวกับจำนวนจริง อัตราส่วน ร้อยละ การประมาณค่า การปัญหาเกี่ยวกับจำนวน การใช้จำนวนในชีวิตจริง แบบรูป ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน เซต ตรรกศาสตร์ นิพจน์ เอกนาม พหุนาม สมการ ระบบสมการ อสมการ กราฟ ดอกเบี้ยและมูลค่าของเงิน ลำดับและอนุกรม และการนำความรู้เกี่ยวกับจำนวนและพีชคณิตไปใช้ในสถานการณ์ต่างๆ

สาระที่ 2 การวัดและเรขาคณิต เรียนรู้เกี่ยวกับ ความยาว ระยะทาง น้ำหนัก พื้นที่ ปริมาตรและความจุ เงินและเวลา หน่วยวัดระบบต่างๆ การคาดคะเนเกี่ยวกับการวัด อัตราส่วนตรีโกณมิติ รูปเรขาคณิต และสมบัติของรูปเรขาคณิต การนึกภาพ แบบจำลองทางเรขาคณิต ทฤษฎีบททางเรขาคณิต การเปลี่ยนแปลงทางเรขาคณิตในเรื่องการเลื่อนขนาน การสะท้อน การหมุน และการนำความรู้เกี่ยวกับการวัดและเรขาคณิตไปใช้ในสถานการณ์ต่างๆ

สาระที่ 3 สถิติและความน่าจะเป็น เรียนรู้เกี่ยวกับ การตั้งคำถามทางสถิติ การเก็บรวบรวมข้อมูล การคำนวณค่าทางสถิติ การนำเสนอและการแปลผลสำหรับข้อมูลเชิงคุณภาพและเชิงปริมาณ หลักการนับเบื้องต้น ความน่าจะเป็น การใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นในการอธิบายเหตุการณ์ต่างๆ และช่วยในการตัดสินใจ

1.3 มาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัดที่เกี่ยวข้องกับการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง

สาระที่ 1 จำนวนและพีชคณิต

มาตรฐาน ค 1.1 เข้าใจความหลากหลายของการแสดงจำนวน ระบบจำนวน การดำเนินการของจำนวน ผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการ สมบัติของการดำเนิน และนำไปใช้

ตัวชี้วัด

1. เข้าใจและใช้สมบัติของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และปัญหาในชีวิตจริง

2. เข้าใจจำนวนจริงและความสัมพันธ์ของจำนวนจริง และใช้สมบัติของจำนวนจริงในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และปัญหาในชีวิตจริง

มาตรฐาน ค 1.2 เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน ลำดับและอนุกรม และนำไปใช้

ตัวชี้วัด

1. เข้าใจหลักการการดำเนินการของพหุนามและใช้พหุนามในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

2. เข้าใจและใช้การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

1.4 คุณภาพผู้เรียนเมื่อจบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

1.4.1 มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับจำนวนจริง ความสัมพันธ์ของจำนวนจริง สมบัติของจำนวนจริง และใช้ความรู้ความเข้าใจนี้ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง

1.4.2 มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับอัตราส่วน สัดส่วน และร้อยละ และใช้ความรู้ความเข้าใจนี้ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง

1.4.3 มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม และใช้ความรู้ความเข้าใจนี้ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง

1.4.4 มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร และอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และใช้ความรู้ความเข้าใจนี้ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง

1.4.5 มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับคู่อันดับ กราฟของความสัมพันธ์ และฟังก์ชันกำลังสองและใช้ความรู้ความเข้าใจนี้ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง

1.4.6 มีความรู้ความเข้าใจทางเรขาคณิตและใช้เครื่องมือ เช่น วงเวียนและสันตรง รวมทั้งโปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือโปรแกรมเรขาคณิตพลวัตอื่นๆ เพื่อสร้างรูปเรขาคณิต ตลอดจนนำความรู้เกี่ยวกับการสร้างนี้ไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง

1.4.7 มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับรูปเรขาคณิตสองมิติ และรูปเรขาคณิตสามมิติ และใช้ความรู้ความเข้าใจนี้ในการหาความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสองมิติ และรูปเรขาคณิตสามมิติ

1.4.8 มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับพื้นที่ผิวและปริมาตรของปริซึม ทรงกระบอก พีระมิด กรวย และทรงกลม และใช้ความรู้ความเข้าใจนี้ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง

1.4.9 มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติของเส้นขนาน รูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ รูปสามเหลี่ยมคล้าย ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ และนำความรู้ความเข้าใจนี้ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง

1.4.10 มีความรู้ความเข้าใจในเรื่องการแปลงทางเรขาคณิต และนำความรู้ความเข้าใจนี้ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง

1.4.11 มีความรู้ความเข้าใจในเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ และนำความรู้ความเข้าใจนี้ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง

1.4.12 มีความรู้ความเข้าใจในเรื่องทฤษฎีเกี่ยวกับวงกลม และนำความรู้ความเข้าใจนี้ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง

1.4.13 มีความรู้ความเข้าใจทางสถิติในการนำเสนอข้อมูล วิเคราะห์ข้อมูล และแปลความหมายข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับแผนภาพจุด แผนภาพต้น-ใบ ฮิสโทแกรม ค่ากลางของข้อมูล และแผนภาพกล่อง และใช้ความรู้ความเข้าใจนี้ รวมทั้งนำสถิติไปใช้ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริงโดยใช้เทคโนโลยีที่เหมาะสม

1.4.14 มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับความน่าจะเป็น และใช้ความรู้ความเข้าใจนี้ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง

1.5 คำอธิบายรายวิชา ค22102 รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

สืบค้น วิเคราะห์ สังเคราะห์ และอธิบายในสาระต่อไปนี้

แผนภาพจุด แผนภาพต้น-ใบ ฮิสโทแกรม ค่ากลางของข้อมูล ความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน รูปสามเหลี่ยมที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม รูปสามเหลี่ยมที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน รูปสามเหลี่ยมที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน รูปสามเหลี่ยมที่สัมพันธ์กันแบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน

การนำไปใช้ เส้นขนานและมุมภายใน เส้นขนานและมุมแย้ง เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต การสร้างและการให้เหตุผลเกี่ยวกับการสร้าง การให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม การแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ และการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง

การจัดประสบการณ์หรือสร้างสถานการณ์ที่ใกล้ตัวให้นักเรียนได้ศึกษาค้นคว้าโดยปฏิบัติจริง ทดลอง สรุป รายงาน เพื่อพัฒนาทักษะการคิดคำนวณ ทักษะและกระบวนการในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และนำประสบการณ์ด้านความรู้ความคิดทักษะกระบวนการที่ได้ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่างๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์รวมทั้งเห็นคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานอย่างเป็นระบบระเบียบ รอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณ และเชื่อมั่นในตนเอง

การวัดผลและประเมินผล ใช้วิธีการหลากหลายตามสภาพความเป็นจริงของเนื้อหา และทักษะที่ต้องการวัด

1.6 มโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง

จากการศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพ.ศ.2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เพื่อวิเคราะห์มโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง ได้กรอบมโนมติที่ครอบคลุมสาระการเรียนรู้ ดังนี้

มโนมติที่ 1 การแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจง

ถ้า a, b และ c แทนจำนวนพหุนามใดๆ แล้ว

$a(b+c)=ab+ac$ หรือ $(b+c)a=ba+ca$

ซึ่งอาจเขียนสมบัติการแจกแจงข้างต้นใหม่ เป็นดังนี้

$ab+ac=a(b+c)$ หรือ $ba+ca=(b+c)a$

เรียก a ว่า ตัวประกอบร่วม ของ ab และ ac หรือตัวประกอบร่วมของ ba และ ca

มโนมติที่ 2 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว

พหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า พหุนามกำลังสอง (quadratic polynomial) คือ พหุนามที่เขียนได้ในรูป ax^2+bx+c เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัวที่ $a\neq 0$ และ x เป็นตัวแปร

กรณีที่ 1 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองในรูป ax^2+bx+c เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ $c=0$ พหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวในกรณีนี้จะอยู่ในรูป ax^2+bx สามารถใช้สมบัติการแจกแจงแยกตัวประกอบของพหุนามในรูปนี้ได้

กรณีที่ 2 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองในรูป ax^2+bx+c เมื่อ $a=1$, b และ c เป็นจำนวนเต็ม และ $c\neq 0$ ในกรณีทั่วไป การแยกพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว x^2+bx+c เมื่อ b และ c เป็นจำนวนเต็ม และ $c\neq 0$ สามารถหาจำนวนเต็มสองจำนวนที่คูณกันได้เท่ากับพจน์ที่เป็นค่าคงตัวคือ c และบวกกันได้เท่ากับสัมประสิทธิ์ของ x คือ b ดังนี้

ถ้าให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มสองจำนวน ซึ่ง $mn=c$ และ $m+n=b$ จะได้ว่า $x^2+bx+c=(x+m)(x+n)$

กรณีที่ 3 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองในรูป ax^2+bx+c เมื่อ a, b และ cเป็นจำนวนเต็ม และ $a\neq 1, c\neq 0$

1. หาพหุนามดีกรีหนึ่งสองพหุนามที่คูณกันแล้วได้พจน์หน้า คือ ax^2
2. หาจำนวนเต็มสองจำนวนที่คูณกันแล้วได้พจน์หลัง คือ c
3. นำผลที่ได้ในข้อ 1 และ 2 มาหาพจน์กลางทีละกรณี จนกว่าจะได้พจน์กลางเป็น bx ตามที่ต้องการ

มโนมติที่ 3 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์

การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง ตัวประกอบของพหุนามที่ได้เป็นพหุนามเดียวกันที่มีดีกรีเป็นหนึ่ง การเขียนการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองจึงได้เป็นกำลังสองของพหุนามดีกรีหนึ่ง เรียกพหุนามดีกรีสองที่มีลักษณะเช่นนี้ว่า พหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ (perfect square)

ในกรณีทั่วไป ถ้าให้ A แทนพจน์หน้า และ B แทนพจน์หลัง จะแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้ตามสูตร ดังนี้

$$A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$$

$$A^2-2AB+B^2=(A-B)^2$$

มโนมติที่ 4 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง

การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง ตัวประกอบของพหุนามที่ได้เป็นพหุนามดีกรีเป็นหนึ่งที่มีพจน์เหมือนกัน แต่มีเครื่องหมายระหว่างพจน์ต่างกัน เรียกพหุนามดีกรีสองที่มีลักษณะเช่นนี้ว่า พหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง (difference of two square)

ในกรณีทั่วไป ถ้าให้ A แทนพจน์หน้า และ B แทนพจน์หลัง จะแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสองได้ตามสูตร ดังนี้

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

จากการศึกษามโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่ได้กล่าวมานั้น ผู้วิจัยจะกล่าวถึงมโนมติที่คลาดเคลื่อนในเรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เท่านั้น สำหรับตัวอย่างมโนมติที่คลาดเคลื่อนในเรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง ที่พบเจอบ่อยๆ เช่น

1. ความผิดพลาดในการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง โดยเข้าใจว่า

1.1 $A^2 - B^2 = (A-B)^2 = (A-B)(A-B)$

1.2 $(A^2 + B^2) = (A+B)(A+B)$

1.3 $x^2 + 2x + 1 = (x+2)(x+1)$

1.4 $A^2 - 2AB + B^2 = (A+B)(A-B)$

2. เข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับสัมประสิทธิ์และเลขชี้กำลังของตัวแปร จาก $ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a = 1$ นักเรียนเข้าใจว่า $a = 0$ และตัวแปร x นักเรียนเข้าใจว่ามีเลขชี้กำลังคือ 0

3. เข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการคูณเอกนาม โดยนักเรียนเข้าใจผิดว่าสามารถใช้สมบัติของการแจกแจงได้ เช่น

$$(2x)(3xy) = (2x \times 3)(2x \times x)(2x \times y)$$

$$= (6x)(2x^2)(2xy)$$

4. เข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการคูณจำนวนเต็ม เช่น

$$(-3)(x+4) = (3x+12)$$

5. ความสับสนในการดึงตัวประกอบร่วมของพหุนาม โดยนักเรียนมักจะเข้าใจว่าสามารถดึงตัวประกอบร่วมของพจน์ที่หนึ่งเท่านั้น โดยไม่ได้คำนึงถึงพจน์อื่น

2. การจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract

Concrete Pictorial Abstract เป็นอีกหนึ่งวิธีการสอนที่ให้ความสำคัญกับการสร้างองค์ความรู้ผ่านสิ่งที่เป็นรูปธรรมไปสู่การสร้างที่เป็นนามธรรมผ่าน 3 ขั้นตอน อันได้แก่ Concrete เป็นขั้นรูปธรรม Pictorial เป็นขั้นนำเสนอผ่านรูปภาพ และ Abstract เป็นขั้นนามธรรม Concrete Pictorial Abstract ถูกพัฒนาขึ้นภายใต้กระทรวงศึกษาธิการของประเทศสิงคโปร์ สำหรับการพัฒนามโนมติทางคณิตศาสตร์เบื้องต้นในระดับประถมศึกษา โดยมีรากฐานมาจาก Instruction Theory ของ Bruner ถูกบรรจุให้ใช้ในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาของโรงเรียนในประเทศสิงคโปร์ (MOE, 2007, 2012 อ้างถึงใน Hui et al., 2017) ซึ่งนักการศึกษาได้กล่าวถึงความหมายและขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ด้วย Concrete Pictorial Abstract Approach ดังนี้

Flores (2010) กล่าวว่า การเรียนรู้ด้วย CPA Approach ให้กรอบแนวคิดในการสร้างความสัมพันธ์ที่มีความหมายระหว่างขั้นตอนของความเข้าใจในสิ่งที่เป็นรูปธรรม รูปภาพ และนามธรรม โดยมีขั้นตอนการเรียนรู้ภายในวิธีการของ CPA มีดังนี้

1. เลือกวัสดุที่เป็นรูปธรรม ซึ่งจะใช้เพื่อแนะนำความเข้าใจแนวคิดของบทเรียนที่นักเรียนจะได้เรียนรู้

2. ชี้นำให้นักเรียนมีส่วนร่วมอย่างอิสระในการใช้วัสดุที่เป็นรูปธรรม โดยให้ทิศทางและเครื่องหมาย

3. เปลี่ยนการใช้วัสดุที่บิดเบือนด้วยรูปภาพหรือภาพวาด

4. ใช้กลยุทธ์ที่สามารถช่วยให้นักเรียนจดจำการเรียนรู้ก่อนหน้านี้ที่ดำเนินการก่อนหน้านี้ มันทำหน้าที่เป็นกระบวนการเปลี่ยนแปลงจากการใช้รูปภาพหรือภาพวาดไปจนถึงการใช้ตัวเลขหรือสัญลักษณ์ และ

5. กระตุ้นให้นักเรียนใช้ตัวเลขหรือสัญลักษณ์ในการทำแบบฝึกหัดคณิตศาสตร์ที่กำหนดเท่านั้นและกิจกรรมนี้เน้นที่ความเชี่ยวชาญ

Putri et al. (2018) กล่าวว่า วิธีการ CPA ในการเรียนรู้ในชั้นเรียนมีขั้นตอน ดังนี้

1. การเรียนรู้ด้วยวัสดุที่เป็นรูปธรรม การใช้วัสดุที่เป็นรูปธรรมจะช่วยให้นักเรียนเพิ่มพูนความสามารถในการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับโลกแห่งความเป็นจริง

2. การเรียนรู้ด้วยภาพ ในขั้นตอนนี้นักเรียนจะได้รับโอกาสให้เป็นตัวแทนของวัสดุจริงโดยใช้ภาพ รูปภาพทำหน้าที่เป็นสะพานเชื่อมระหว่างโลกแห่งความจริงและคณิตศาสตร์เชิงนามธรรม การเรียนรู้ในขั้นตอนนี้จะช่วยให้นักเรียนเพิ่มพูนความสามารถในการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับวิชาอื่นๆ ของสาขาวิชาอื่นๆ

3. การเรียนรู้ด้วยนามธรรม ในขั้นตอนนี้นักเรียนจะได้เรียนรู้การใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรม การเรียนรู้ในขั้นตอนนี้จะเปิดโอกาสให้นักเรียนเพิ่มพูนความสามารถในการเชื่อมโยงหัวข้อทางคณิตศาสตร์ ทุกกิจกรรมการเรียนรู้ที่ได้รับการออกแบบภายใต้วิธีการ CPA ที่ส่งเสริมการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ผลการศึกษาพบว่าความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับประถมศึกษาที่ได้รับการสอนโดยใช้วิธีการเรียนรู้แบบ CPA นั้นสูงกว่านักเรียนระดับประถมศึกษาที่ได้รับการสอนโดยใช้การเรียนแบบปกติ

Putri (2015) กล่าวว่า การใช้ CPA Approach ในการเรียนรู้คณิตศาสตร์สามารถเพิ่มความสามารถในการเป็นตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ความรู้สึกเชิงพื้นที่ และการรับรู้ความสามารถของตนเองของนักเรียนระดับประถมศึกษา

NCTM (2000) ระบุว่า ขั้นตอนของการเป็นตัวแทนของวัตถุที่เป็นรูปธรรม รูปภาพ ไดอะแกรมกราฟิก และสัญลักษณ์นามธรรม ช่วยสื่อสารความคิดและความเข้าใจของนักเรียน ดังนั้นมันจึงเป็นการเรียนรู้สถานการณ์ผ่านขั้นตอนดังกล่าวในการเรียนรู้ด้วยวิธีการ CPA

Witzell (2005) กล่าวว่า Concrete-Pictorial-Abstract เป็นวิธีการในการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ดำเนินการเป็นขั้นตอน ทุกขั้นตอนได้รับการพัฒนาจากขั้นตอนก่อนหน้า เพราะมันเป็นดำเนินการเป็นลำดับขั้นตอน การเรียนรู้ CPA ประกอบด้วย 3 ขั้นตอนการเรียนรู้ คือการเรียนรู้ผ่านการจัดการทางกายภาพของวัตถุที่เป็นรูปธรรม การเรียนรู้ผ่านการเป็นตัวแทนภาพของการจัดการวัตถุที่เป็นรูปธรรม และการแก้ปัญหาโดยใช้สัญลักษณ์นามธรรม

Hui et al. (2017) กล่าวว่า วิธีการ Concrete Pictorial Abstract เป็นวิธีการสอนที่สำคัญสำหรับการพัฒนาแนวคิดคณิตศาสตร์ของนักเรียน ซึ่งนักเรียนได้สัมผัสกับคณิตศาสตร์ผ่านสิ่งของที่เป็นรูปธรรมหรือของจริงในชีวิตประจำวัน ทำความคุ้นเคยกับสิ่งที่เป็นรูปธรรม ด้วยการทำซ้ำๆ ให้ผู้เรียนคุ้นเคยกับแนวคิดทางคณิตศาสตร์ จนเกิดองค์ความรู้ที่คงที่ แล้วเชื่อมโยงการรับรู้เป็นภาพแล้วสังเคราะห์องค์ความรู้จากภาพไปสู่สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรม ซึ่ง มี 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. Guided explication การสร้างองค์ความรู้ที่เกี่ยวข้องกับวัตถุที่เป็นรูปธรรม โดยครูให้คำแนะนำในการจัดการกับสิ่งที่เป็นรูปธรรมที่นำมาใช้ในการจัดการเรียนการสอน

2. Exploratory familiarization การทำความคุ้นเคยเชิงสำรวจ โดยเป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้สำรวจและทำความคุ้นเคยกับสิ่งที่เป็นรูปธรรม ด้วยการทำซ้ำๆ ให้ผู้เรียนคุ้นเคยกับแนวคิดทางคณิตศาสตร์ จนเกิดองค์ความรู้ที่คงที่แล้วเชื่อมโยงการรับรู้เป็นภาพด้วยตัวของนักเรียนเอง

3. Knowledge classification การจำแนกความรู้ เมื่อนักเรียนสามารถรับรู้สิ่งที่เป็นรูปธรรมมาเป็นภาพแล้ว ครูกระตุ้นให้นักเรียนไปสู่การคิดวิเคราะห์ และการสังเคราะห์องค์ความรู้ จากภาพไปสู่สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรม

4. Concept reification การปรับแนวคิด นักเรียนสามารถทำงานโดยใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรมได้อย่างคล่องแคล่ว

สำหรับงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้นำขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดของ Hui et al. (2017)

3. โปรแกรม GeoGebra

3.1 โปรแกรม GeoGebra

นักการศึกษาได้กล่าวถึง โปรแกรม GeoGebra ดังนี้

Geogebra.org (2556 อ้างถึงใน อธิภูมิ พาสงค์, 2559) ได้อธิบายไว้ว่า Geogebra เป็นโปรแกรมคณิตศาสตร์ที่เป็นพลวัต ออกแบบมาเพื่อการเรียนรู้ เรื่อง เรขาคณิต พีชคณิต กราฟ สถิติ และแคลคูลัส GeoGebra เป็นโปรแกรมที่ได้รับความนิยมอย่างแพร่หลายในหลายๆ ประเทศ และเป็นซอฟต์แวร์ทางคณิตศาสตร์ที่สนับสนุนการศึกษาด้านวิทยาศาสตร์เทคโนโลยีวิศวกรรมและคณิตศาสตร์ (STEM) และนวัตกรรมด้านการเรียนการสอนทั่วโลก

วิภาพร ทิพย์รักษา (2560) กล่าวว่า โปรแกรม GecGebra ได้ค้นพบในปี ค.ศ.2001 จากการทำวิทยานิพนธ์ปริญญาโทของ Mark Hohenwarter เป็นโปรแกรมสำหรับเรขาคณิตและพีชคณิตแบบพลวัต โดยมีเป้าหมายเพื่อพัฒนาเครื่องมือแบบใหม่สำหรับการเรียนคณิตศาสตร์ ซึ่งโปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมสำเร็จรูปที่ตอบโต้กับผู้ใช้งาน สามารถเรียนรู้เกี่ยวกับเรขาคณิต พีชคณิต แคลคูลัส รูปวงกลม ส่วนตัดของวงกลม จุด เวกเตอร์ ภาคตัดกรวยทั้งหมด และฟังก์ชัน เป็นต้น ดังนั้น โปรแกรม GeoGebra ออกแบบมาเพื่อใช้ในการเรียนการสอนในโรงเรียน

ขัญญา อุทิศ (2557) กล่าวว่า โปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมสำเร็จรูปคณิตศาสตร์ที่โต้ตอบกับผู้ใช้งานสำหรับการศึกษาคณิตศาสตร์ สามารถใช้เป็นเครื่องมือสำหรับการเรียนรู้เกี่ยวกับเรขาคณิต พีชคณิต รูปวงกลม ส่วนตัดของวงกลม และภาคตัดกรวย เป็นต้น เครื่องมือพื้นฐานของโปรแกรม GeoGebra ประกอบด้วย จุก เวกเตอร์ ส่วนของเส้นตรง เส้นตรง รูปหลายเหลี่ยม ภาคตัดกรวย และฟังก์ชัน โปรแกรม GeoGebra จึงเป็นเครื่องมือที่มีความหลากหลายสำหรับการนำไปใช้ในการจัดการเรียนรู้ในโรงเรียน เช่น การใช้โปรแกรม GeoGebra ในการสาธิตและแสดงภาพ เพื่อให้นักเรียนเห็นสิ่งที่เป็นนามธรรมให้ชัดเจนเป็นรูปธรรมยิ่งขึ้น การใช้โปรแกรม GeoGebra เป็นเครื่องมือในการสร้างและการค้นพบทางคณิตศาสตร์ โปรแกรม GeoGebra เป็น

เครื่องมือที่มีความหลากหลายมากสำหรับการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษา ในการสอนคณิตศาสตร์สามารถใช้ได้หลายรูปแบบ ดังนี้

1. GeoGebra กับการสาธิตและการแสดงภาพ

การใช้โปรแกรมการสอนด้วยคอมพิวเตอร์ไม่ใช่วิธีการสอนแบบใหม่ แต่โปรแกรม GeoGebra สามารถนำเสนอการสาธิตและการแสดงภาพที่แตกต่างออกไป

2. GeoGebra กับเครื่องมือการสร้าง

ในปี ค.ศ.1990 Karl Fuchs ได้บอกถึงความสำคัญของการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการออกแบบการสร้างทางเรขาคณิต ซึ่งโปรแกรม GeoGebra มีความสามารถสร้างภาพวาดที่เหมาะสมและเป็นซอฟแวร์สำหรับการออกแบบ

3. GeoGebra กับการค้นพบทางคณิตศาสตร์

คอมพิวเตอร์และซอฟต์แวร์ทางคณิตศาสตร์มีการกระตุ้นให้เกิดคำถามพื้นฐานใหม่ๆในการสอนคณิตศาสตร์ นักเรียนจึงสามารถจัดระเบียบความรู้ด้วยตนเอง ซึ่งโปรแกรม GeoGebra สามารถใช้เป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับทำให้เกิดการค้นพบทางคณิตศาสตร์ และสามารถช่วยในการสร้างบรรยากาศที่เหมาะสมสำหรับการเรียนรู้

4. GeoGebra กับการจัดเตรียมสื่อการสอน

โปรแกรม GeoGebra ส่งเสริมครูในด้านการเตรียมความพร้อมของเครื่องมือสำหรับกระบวนการเรียนการสอน ในลักษณะเครื่องมือการให้ความร่วมมือ การสื่อสารและเครื่องมือการนำเสนอโปรแกรม GeoGebra เป็นซอฟต์แวร์ที่สามารถนำมาใช้กับนักเรียนที่มีอายุระหว่าง 10 ปีถึง 18 ปี โดยเริ่มต้นด้วยการสร้างขั้นพื้นฐานอย่างง่ายไปจนถึงคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนขึ้น เช่น การหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน ในการเรียนการสอนที่ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เป็นสื่อการเรียนรู้ทั้งการศึกษารายบุคคลหรือศึกษาแบบกลุ่ม จะต้องมีครูเป็นที่ปรึกษาเพื่อที่จะสอนและช่วยเหลือในสิ่งจำเป็น

สำนักงานบริการงานการมัธยมศึกษาตอนปลาย สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ (2553:28) กล่าวว่า โปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมทางคณิตศาสตร์แบบโต้ตอบกับผู้ใช้งาน สำหรับการศึกษาในโรงเรียนมัธยมศึกษา สามารถเรียนรู้เกี่ยวกับเรขาคณิต พีชคณิต แคลคูลัส วงกลม ส่วนตัดของวงกลม GeoGebra สามารถสร้างจุด ภาคตัดกรวย สมการ นอกจากนี้ยังสามารถส่งออกไฟล์ที่สร้างขึ้นในรูปแบบของภาษา Java ซึ่งเป็นสื่อปฏิสัมพันธ์กับผู้เรียน โดยผู้เรียนสามารถปรับแต่งค่ารวมถึงรูปร่างของสื่อได้เป็นอย่างดี

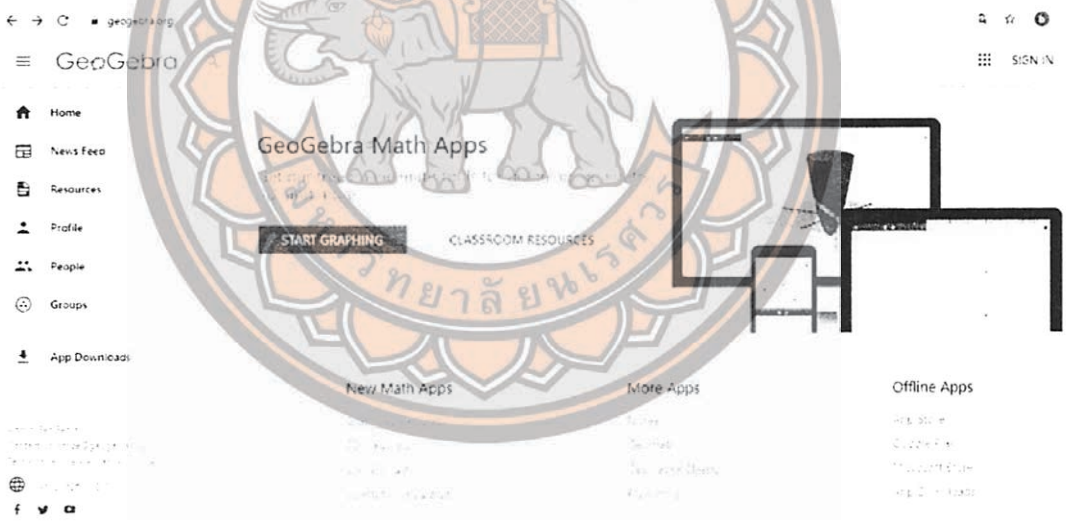
Hohenwarter et al. (Online, 2008) กล่าวโดยสรุปว่า โปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมเปิดเสรี (Open-source) ที่เป็นพลวัตทางคณิตศาสตร์ที่ใช้งานได้เอนกประสงค์ ใช้งานง่ายในระบบพีชคณิตคอมพิวเตอร์ โดยแนวคิดพื้นฐานของโปรแกรมนี้คือ การผสมผสานของเรขาคณิต พีชคณิต และแคลคูลัส โดยแยกเป็นชุดโปรแกรมเพื่อให้ใช้งานง่ายต่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ในแต่ละครั้งตั้งแต่ระดับประถมศึกษาจนถึงระดับมหาวิทยาลัย โปรแกรม GeoGebra สามารถใช้งานได้ฟรีทางอินเทอร์เน็ตโดยไม่ต้องเสียค่าธรรมเนียม จุดเด่นของโปรแกรมเปิดเสรี คือ สามารถประยุกต์ใช้ได้สำหรับการจัดการศึกษาและผู้เรียน ซึ่งแตกต่างจากโปรแกรมเชิงพาณิชย์ที่ทำให้ผู้เรียนขาดความเชื่อมั่นในข้อจำกัดในการใช้โปรแกรม โดยเฉพาะโรงเรียนหรือมหาวิทยาลัยที่ซื้อลิขสิทธิ์ แต่พวกเขาสามารถดาวน์โหลดและติดตั้งโปรแกรม GeoGebra บนคอมพิวเตอร์ส่วนตัวได้ สำหรับครูเป็นโอกาสที่ดีที่จะใช้ GeoGebra สร้างสื่อการเรียนรู้ที่สามารถโต้ตอบออนไลน์ได้ เป็นการสร้างบรรยากาศของการเรียนรู้ งานวิจัยชี้ให้เห็นว่า การใช้เทคโนโลยีอย่างเดียวไม่เพียงพอที่จะประสบผลสำเร็จในการจัดการเรียนการสอน ต้องผสมผสานเทคโนโลยีเข้ากับวิธีสอน และส่งเสริมสนับสนุนให้ครูบูรณาการเทคโนโลยีสู่การจัดการเรียนการสอนด้วยความเต็มใจ และพัฒนาเทคโนโลยีการสอน นอกจากนี้ครูและนักวิจัยจากทั่วโลกได้ร่วมมือกันจัดตั้งสถาบัน GeoGebra ระหว่างประเทศในสถานที่ต่างๆ เพื่อพัฒนาวิชาชีพครู การวิจัยเกี่ยวกับ GeoGebra และการดำเนินการปรับปรุงโปรแกรมให้มีคุณภาพสูงขึ้น เพื่อให้ทุกคนสามารถใช้งานได้ฟรีโดยไม่มีค่าใช้จ่ายใดๆ

ปิยะวุฒิ ศรีชนะ (2556) กล่าวถึง โปรแกรม GeoGebra ว่า เป็นโปรแกรมที่ถูกพัฒนาขึ้นในโครงการวิทยานิพนธ์ของ Markus Hohenwater ที่มหาวิทยาลัย Salzburg ประเทศออสเตรีย สร้างจากแนวคิดพื้นฐานการพัฒนาโปรแกรมด้านเรขาคณิต ง่ายต่อการใช้งานสำหรับการสอนและการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ซึ่งโปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ที่เน้นการสร้างรูปเรขาคณิตในลักษณะเดียวกับการใช้วงเวียนและสันตรง แต่มีลักษณะปฏิสัมพันธ์กับผู้ใช้งานที่สามารถสร้างรูปและเคลื่อนย้ายรูปได้โดยการเคลื่อนย้ายจุดหรือย้ายสร้าง ซึ่งโปรแกรม GeoGebra จัดเป็นโปรแกรมที่มีลักษณะการเผยแพร่แบบ General Public License (GPL) คือโปรแกรมที่ใช้และเผยแพร่โดยไม่เสียค่าใช้จ่าย

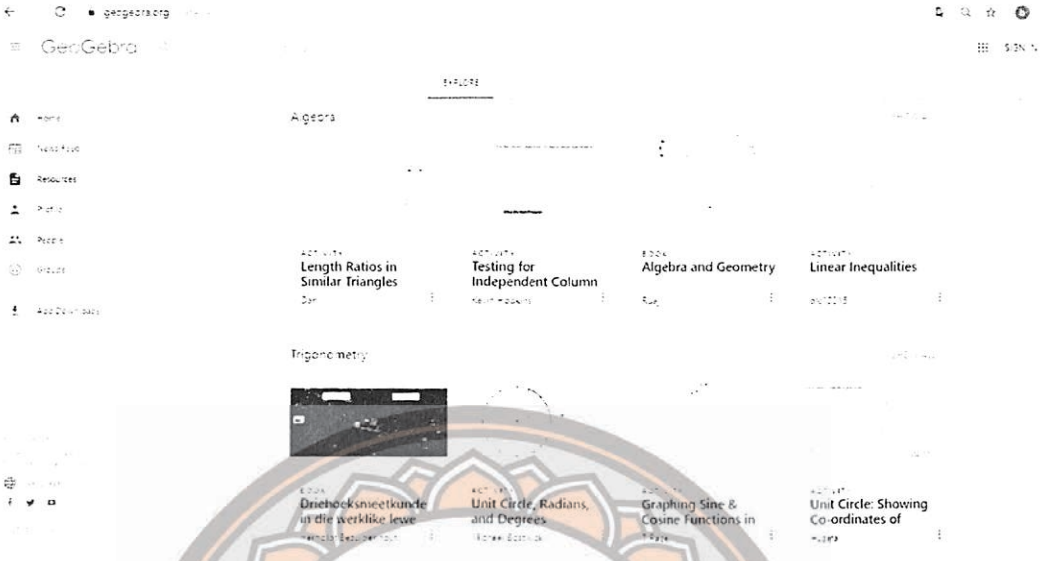
โปรแกรม GeoGebra เป็นซอฟต์แวร์พลวัตรทางคณิตศาสตร์ (Dynamic Mathematics Software: DMS) ที่ออกแบบมาเพื่อการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาและระดับวิทยาลัย GeoGebra มีส่วนประกอบของซอฟต์แวร์พลวัตรทางเรขาคณิต (Dynamic Geometry Software: DGS) และระบบการคำนวณทางพีชคณิต (Computer Algebra System,

CAS) ดังนั้น GeoGebra จึงเชื่อมต่อระหว่างเรขาคณิต พีชคณิต และแคลคูลัสด้วย นอกจากนี้ GeoGebra สามารถใช้ในการแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้อย่างเป็นรูปธรรมชัดเจน สนับสนุนความกระตือรือร้นในการเรียนรู้และการจัดการเรียนรู้โดยยึดผู้เรียนเป็นสำคัญ ช่วยให้เกิดการทดลองทางคณิตศาสตร์ การสำรวจและการค้นพบ (Preiner, 2008)

จากที่กล่าวมาข้างต้น สามารถสรุปได้ว่า โปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมพลวัตทางคณิตศาสตร์ที่สามารถโต้ตอบกับผู้ใช้งานได้ เป็นเครื่องมือสำหรับการเรียนรู้เกี่ยวกับเรขาคณิต พีชคณิต แคลคูลัส รูปวงกลม ส่วนตัดของวงกลม จุด เวกเตอร์ ภาคตัดกรวยทั้งหมด และฟังก์ชัน เป็นต้น ทำให้ผู้เรียนใช้เป็นเครื่องมือสำหรับเชื่อมโยงความรู้ เห็นภาพ และเห็นการเปลี่ยนแปลงได้ชัดเจน สามารถนำมาใช้ในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เพื่อให้นักเรียนได้เรียนคณิตศาสตร์อย่างเป็นรูปธรรมมากขึ้น กล่าวได้ว่า โปรแกรม GeoGebra มีความเหมาะสำหรับการจัดการเรียนการสอนทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียนดังภาพ 1 และ 2



ภาพ 1 ตัวอย่างโปรแกรม GeoGebra



ภาพ 2 ตัวอย่าง Classroom Resources ของโปรแกรม GeoGebra

3.2 การจัดการเรียนการสอนด้วยโปรแกรม GeoGebra

Hohenwarter & Fuchs (2004 อ้างถึงใน สมเกียรติ พาบุ, 2558) กล่าวโดยสรุปได้ว่า โรงเรียนมัธยมศึกษาสามารถประยุกต์ใช้โปรแกรม GeoGebra เป็นเครื่องมือสำหรับการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ได้อย่างหลากหลาย ซึ่งรูปแบบการเรียนการสอนโดยใช้โปรแกรม GeoGebra อาจจะแตกต่างกันออกไปดังนี้

1. ใช้เป็นเครื่องมือสำหรับสาธิตและการมองเห็น
2. ใช้เป็นเครื่องมือสำหรับการสร้างรูป วาดรูป
3. ใช้เป็นเครื่องสำหรับการสำรวจทางคณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์
4. ใช้เป็นเครื่องสำหรับการจัดเตรียมสื่อการสอน

Green & Robinson (2009 อ้างถึงใน สมเกียรติ พาบุ, 2558) กล่าวโดยสรุปว่า บุคลากรของการศูนย์การศึกษาคณิตศาสตร์มหาวิทยาลัย Loughborough ได้จัดอบรมโปรแกรม GeoGebra ให้กับนักศึกษาที่เรียนในสาขาวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ในปีการศึกษา 2008 และปีการศึกษา 2009 ซึ่งเป็นสาขาที่ต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์มากถึงร้อยละ 25 เพื่อให้นักศึกษามีความรู้ความสามารถในเกี่ยวกับฟังก์ชัน ผลการศึกษาอบรม สรุปได้ว่า โปรแกรม GeoGebra เป็นเครื่องมือที่ดีในการช่วยให้นักศึกษานำความรูปธรรมไปเชื่อมโยงกับวิชาพีชคณิต ซึ่งต้องใช้ความรู้เรื่องกราฟและยังช่วยให้นักศึกษามองเห็นการเปลี่ยนแปลงค่าของพารามิเตอร์ได้

Antohe (2009 อ้างถึงใน อธิภูมิ พาสงค์, 2559) ได้กล่าวสรุปไว้ว่า โปรแกรม GeoGebra เป็นเครื่องมือที่นักเรียนสามารถใช้กับเนื้อหาเรขาคณิตแบบ Euclidean หรือ Non – Euclidean พีชคณิต แคลคูลัส และตรีโกณมิติ ในการเรียนรู้มโนทัศน์ทางเรขาคณิตนั้น โปรแกรม GeoGebra สามารถช่วยสร้างรูปเรขาคณิตในมิติต่างๆ ทำให้นักเรียนได้เกิดการสำรวจทำความเข้าใจในเนื้อหาเรขาคณิตได้ง่ายขึ้นกว่าการเรียนแบบเดิม โปรแกรม GeoGebra เป็นเครื่องมือที่ช่วยกระตุ้นให้เกิดการค้นพบ โดยนักเรียนจะได้เห็นภาพในตอนแรกแล้วทำการวิเคราะห์ปัญหา หลังจากนั้นนักเรียนจะต้องตั้งข้อคาดเดาก่อนที่จะทำการพิสูจน์ในเรื่องนั้นๆ กระบวนการเรียนรู้จากโปรแกรม GeoGebra จะช่วยให้นักเรียนได้พัฒนาพื้นฐานของตนเองในเชิงรูปธรรมก่อน แล้วค่อยๆ พัฒนาการเรียนรู้ไปสู่ระดับที่สูงขึ้น ผู้ใช้จะสามารถสร้างรูปเรขาคณิต วัดขนาด สัดส่วนของเส้นตรง โค้ง มุม และพื้นที่ได้รวดเร็วและถูกต้อง ทั้งยังให้ผู้เรียนสร้างรูปสองมิติและสามมิติบนหน้าจอ แล้วทำกิจกรรมการสำรวจ การยืดหด เลื่อนรูปในมุมมองต่างๆ เพื่อเรียนรู้มโนทัศน์ทางเรขาคณิตได้รวดเร็ว นำสู่การค้นหาสมบัติต่างๆ ส่งเสริมให้นักเรียนเกิดการกระตือรือร้น ดึงดูดความสนใจเกิดจินตนาการในการค้นคว้าหาเหตุผลและเพิ่มพูนความรู้ ซึ่งการเรียนรู้เรขาคณิตในลักษณะดังกล่าวมองเห็นสิ่งต่างๆ รอบตัวอย่างมีความหมายมากขึ้น การใช้โปรแกรม GeoGebra จะช่วยในการสร้างรูปอย่างรวดเร็ว ทำให้การแก้ปัญหาเรื่องที่ยากและซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพ และประหยัดเวลาในการเรียนรู้ นอกจากนี้ยังใช้งานง่าย ใช้เวลาน้อยในการศึกษา วิธีการใช้งานผู้สอนสามารถเขียนเป็นสคริปต์ใช้ในการสาธิตหรือสรุปให้ผู้เรียนศึกษาตามเพื่อการทบทวนเนื้อหาได้

Lopez (2011 อ้างถึงใน อธิภูมิ พาสงค์, 2559) จากการฝึกอบรมครูคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษาในประเทศสเปนเกี่ยวกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ โดยใช้โปรแกรม GeoGebra สามารถนำไปปรับใช้ในการเรียนการสอน ดังนี้

1. โปรแกรม GeoGebra ช่วยให้การมีวิสัยทัศน์ในการพัฒนาการแก้ปัญหา
2. การเรียนการสอนต้องมีความเข้าใจคำศัพท์ทางเรขาคณิต
3. โปรแกรม GeoGebra ช่วยให้นักเรียนสามารถตรวจสอบคุณสมบัติและความสัมพันธ์ของรูปร่าง ที่ไม่สามารถสร้างด้วยกระดาษและดินสอได้
4. นักเรียนที่ไม่เก่งวิชาคณิตศาสตร์ อาจมีแรงบันดาลใจจากโปรแกรมที่ช่วยในการแก้ปัญหาและมีความรู้คงทนในการแก้ปัญหา
5. โปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมที่ใช้งานได้สะดวกและนักเรียนสามารถเรียนรู้กับเครื่องมือได้ง่าย

Tim Brzezinski (2019) กล่าวว่า เทคโนโลยีด้านคณิตศาสตร์มีหลายรูปแบบ GeoGebra มีแอพสี่ตัวที่น่าทึ่ง (เครื่องคำนวณกราฟ, เรขาคณิต, เครื่องคำนวณกราฟ 3 มิติ และแบบคลาสสิก) ที่สามารถเสริมสร้างประสบการณ์การเรียนรู้ที่ค้นพบโดยธรรมชาติสำหรับนักเรียนแต่ละคน GeoGebra ช่วยให้ครูสามารถสร้างสภาพแวดล้อมการเรียนรู้ที่ช่วยเพิ่มการค้นพบของนักเรียน ให้การแก้ไขที่มีความหมาย สามารถอำนวยความสะดวกในโอกาสที่แตกต่างกัน

อธิภูมิ พาสงค์ (2559) กล่าวว่า โปรแกรม GeoGebra สามารถนำมาประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ได้หลากหลายเนื้อหา โดยเฉพาะเนื้อหาที่เกี่ยวกับเรขาคณิต ที่จะช่วยในการสร้างรูปรูปเรขาคณิตทั้งสองมิติและสามมิติที่ซับซ้อน นักเรียนสามารถมองเห็นรูปธรรมชัดเจน กระตุ้นให้นักเรียนเกิดการค้นพบ มีความเข้าใจมโนทัศน์ทางเรขาคณิต นอกจากนี้ยังสะดวกต่อการนำไปใช้ทั้งครูผู้สอนและนักเรียน

จากข้างต้นสามารถสรุปได้ว่า โปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมที่ใช้สำหรับการสร้างสื่อการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ที่ช่วยให้ผู้เรียนมีความกระตือรือร้นในการเรียน แก้ปัญหาการเรียนในเรื่องที่ยุ่งยาก นักเรียนสามารถสร้างมโนทัศน์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถสร้างข้อคาดการณ์ และพัฒนาพื้นฐานของตนเองในเชิงรูปธรรมก่อน แล้วค่อยๆ พัฒนาการเรียนรู้ไปสู่ระดับที่สูงขึ้น ในการวิจัยนี้ผู้วิจัยใช้โปรแกรม GeoGebra (Algebra Resources ที่พัฒนาขึ้นโดย Tim Brzezinski, 2019)

4. มโนมติทางคณิตศาสตร์

มโนมติ เป็นคำที่แปลมาจากภาษาอังกฤษคำว่า Concept โดยมีคำแปลในภาษาไทยหลายคำ เช่นคำว่า มโนทัศน์ มโนภาพ ความคิดรวบยอด สังกัป และแนวคิดหลัก ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยใช้คำว่า “มโนมติ”

4.1 ความหมายของมโนมติ

ความหมายของมโนมติ ได้มีนักการศึกษาได้ให้ความหมายไว้ ดังนี้

ราชบัณฑิตยสถาน (2555) ได้ให้ความหมายของมโนมติว่า มโนมติเป็นภาพหรือความคิดในสมองที่เป็นตัวแทนสิ่งใดสิ่งหนึ่ง ประกอบด้วยคุณสมบัติร่วมที่สำคัญของสิ่งนั้นซึ่งขาดไม่ได้ หากขาดไปจะไม่ใช่สิ่งนั้น

ทัศนีย์ บุญโย (2553) ได้ให้ความหมายว่า มโนมติ หมายถึง ความคิดหรือความเข้าใจของบุคคลที่มีต่อสิ่งใดสิ่งหนึ่ง ซึ่งเป็นการแปลความหมายจากการได้รับประสบการณ์ตรงเกี่ยวกับสิ่งนั้น แล้วสามารถสรุปคุณสมบัติ ลักษณะสำคัญ หรือลักษณะที่เฉพาะเจาะจงของสิ่งนั้นได้ ซึ่งมโนมตินี้อาจจะถูกหรือผิดก็ได้

McDonald (1967 อ้างถึงใน พัชราภรณ์ ลาคำ, 2561) กล่าวว่า มโนมติ หมายถึง ความเข้าใจและความคิดขั้นสุดท้ายของคนคนหนึ่งที่มีต่อสิ่งหนึ่ง ความคิดและความเข้าใจนั้นเป็นนามธรรมและเป็นข้อสรุปเกี่ยวกับเรื่องนั้นในระยะหนึ่งหรือตลอดไปก็ได้

Good (1973 อ้างถึงใน มณีรัตน์ ขยันกลาง, 2559) ให้ความหมายของมโนมติ ไว้ 3 ประการ คือ

1. มโนมติ คือ ความคิด หรือสัญลักษณ์ของส่วนประกอบ หรือสัญลักษณ์ร่วมที่สามารถแยกออกเป็นกลุ่มเป็นพวกได้

2. มโนมติ คือ สัญลักษณ์เชิงความคิดทั่วไป หรือเชิงนามธรรม เกี่ยวกับสถานการณ์ กิจการหรือวัตถุ

3. มโนมติ คือ ความคิดเห็น ความคิด ความเห็น หรือภาพความคิด

ธัญญารัตน์ จูมแพง (2554) ได้ให้ความหมายว่า มโนมติ หมายถึง ความคิดหรือความเข้าใจที่ได้จากการตีความลักษณะ คุณสมบัติ ความสัมพันธ์ของสิ่งต่างๆ ในเรื่องนั้นๆ เพื่อประมวลออกมาเป็นข้อสรุปและใช้ในการอธิบายปรากฏการณ์ หรือสื่อสารเพื่อความเข้าใจของคนในสังคม

นัฏฐพร กมลทิพย์ (2554) ได้ให้ความหมายว่า มโนมติ หมายถึง ความคิดหรือความเข้าใจภายในตัวบุคคลที่ใช้ตีความหรือสรุปความเกี่ยวกับสิ่งใดสิ่งหนึ่ง ซึ่งเป็นผลมาจากการสังเกตการได้รับประสบการณ์เกี่ยวกับสิ่งนั้นและใช้คุณลักษณะที่สำคัญเกี่ยวกับสิ่งนั้นมาประมวลเข้าด้วยกันเป็นข้อสรุป

กัณทิมา ตราบุรี (2556) ได้ให้ความหมายว่า มโนมติ หมายถึง ความคิดหรือความเข้าใจภายในตัวนักเรียน ที่ได้ตีความหรือสรุปความเกี่ยวกับสิ่งใดสิ่งหนึ่ง ซึ่งมีคุณสมบัติ คุณลักษณะพิเศษ และมีความสัมพันธ์กันของสิ่งต่างๆ นั้นอย่างเป็นเหตุเป็นผล อันเกิดจากการสังเกตหรือการได้รับประสบการณ์ตรงเกี่ยวกับสิ่งนั้น เพื่อประมวลผลออกมาเป็นข้อสรุปที่เฉพาะเจาะจง

ละออง พรมราช (2556) ได้ให้ความหมายว่า มโนมติ หมายถึงความคิด ความเข้าใจของบุคคลซึ่งเป็นนามธรรมที่บรรยายถึงความสัมพันธ์ของสิ่งที่มองเห็นและจากการได้รับประสบการณ์ในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ โดยสามารถจัดประเภทของสิ่งของที่เหมือนกันเข้าด้วยกันและแยกประเภทของสิ่งของที่ไม่เหมือนกันออกจากกันได้ แล้วสรุปความเข้าใจที่ได้ออกมาเป็นบทนิยามหรือคุณสมบัติหรือสัญลักษณ์แทนคุณสมบัติได้

มณีรัตน์ ขยันกลาง (2559) กล่าวว่า มโนมติ หมายถึง ความคิด ความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับสิ่งใดสิ่งหนึ่งที่ได้รับจากประสบการณ์ต่างๆ แล้วสามารถสรุปและแยกประเภทเป็น

หมวดหมู่ได้ และสามารถนำ ความรู้ความเข้าใจที่ได้รับนั้นไปใช้แก้ปัญหาตามสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้อง

จากความหมายของคำว่า มโนมติ ตามที่นักการศึกษาหลายท่านได้ให้ความหมายไว้ สามารถสรุปได้ว่า มโนมติ หมายถึง ความคิดหรือความเข้าใจของบุคคลที่ได้ตีความหรือสรุปเกี่ยวกับสิ่งใดสิ่งหนึ่ง อันเกิดจากการเรียนรู้ และประสบการณ์ต่างๆ แล้วสามารถสรุปความโดยการอธิบายความคิด หรือความเข้าใจนั้นออกมาเป็นภาพ ภาษาพูด ภาษาเขียนหรือสัญลักษณ์ได้

4.2 **ความหมายของมโนมติทางคณิตศาสตร์**

ความหมายของมโนมติทางคณิตศาสตร์ ได้มีนักการศึกษาได้ให้ความหมายไว้ ดังนี้

ไข่มุก เลื่องสุนทร (2552) ได้ให้ความหมายว่า มโนมติทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความคิดสำคัญความเข้าใจที่เกี่ยวกับสิ่งใดสิ่งหนึ่ง หรือเรื่องใดเรื่องหนึ่งที่เกี่ยวกับเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ในด้านการคำนวณความสัมพันธ์กับจำนวน อันเกิดจากการสังเกตหรือการได้รับประสบการณ์ในการเรียนรู้ และนำลักษณะนั้นมาประมวลเข้าด้วยกันให้เป็นข้อสรุปทางคณิตศาสตร์โดยออกมาในรูปของบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่างๆของวิชาคณิตศาสตร์ได้

อัมพร ม้าคนอง (2547 อ้างถึงใน กุลนิดา วรสารนันท์, 2552) กล่าวว่า มโนมติทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความคิดนามธรรมที่ทำให้มนุษย์สามารถแยกแยะวัตถุ หรือเหตุการณ์ว่าเป็นตัวอย่างหรือไม่เป็นตัวอย่างของความคิดที่เป็นนามธรรมนั้น

กุลนิดา วรสารนันท์ (2552) ได้ให้ความหมายว่า มโนมติทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความคิดสำคัญ และความเข้าใจเกี่ยวกับเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งเกิดมาจากความรู้ การสังเกต หรือการได้รับประสบการณ์ในการเรียนรู้ โดยสรุปออกมาเป็นทฤษฎีบท และสมบัติต่างๆ ของวิชาคณิตศาสตร์

ปุญยนุช กูลเพชร์ (2552) ได้ให้ความหมายว่า มโนมติทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความรู้ความเข้าใจความคิดทางการเรียนคณิตสาสตร์ อันเกิดจากการที่ผู้เรียนได้รับประสบการณ์ต่างๆ แล้วสามารถสรุปและแยกประเภทความสัมพันธ์ของเรื่องต่างๆ เหล่านั้นเป็นกฎนิยาม หรือคำจำกัดความเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ และสามารถนำความรู้ ความเข้าใจที่ได้รับนั้นไปใช้การแก้ปัญหาตามสถานการณ์ต่างๆ ได้ถูกต้อง

Schwarz & Hershowiz (1999 อ้างถึงใน ทองคำ นาสมตรึก, 2555) ได้ให้ความหมายว่า มโนมติทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความเข้าใจของบุคคลที่เป็นผลมาจากกระบวนการเรียนรู้มโนมติ ซึ่งสามารถสรุปออกมาเป็นบทนิยามทางคณิตศาสตร์

Cockburn & Littler (2010) ได้ให้ความหมายว่า มโนมติทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความคิดสำคัญในการทำความเข้าใจที่ถูกต้องเกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์เฉพาะเรื่องใดเรื่องหนึ่ง

ที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณ ความสัมพันธ์กับจำนวนรวมทั้งการให้เหตุผลอย่างเป็นระบบ หรือความคิดสำคัญเกี่ยวกับลักษณะภายนอกของสิ่งของที่เกิดจากการสังเกต หรือการได้รับประสบการณ์

ทองคำ นาสมตรึก (2555) ได้ให้ความหมายว่า มโนมติทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ข้อสรุปความรู้ ความเข้าใจที่ได้รับจากการเรียนคณิตศาสตร์ แล้วสรุปแยกประเภทของความสัมพันธ์ต่างๆ เป็นกฎนิยาม หรือคำจำกัดความที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์และสามารถนำความรู้นั้นไปใช้ในการแก้ปัญหาตามสถานการณ์ต่างๆ ได้

งามพร้อม อ่อนบัวขาว (2556) ได้ให้ความหมายว่า มโนมติทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความคิดสำคัญ และความเข้าใจเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ หรือเรื่องใดเรื่องหนึ่งที่เกี่ยวกับเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งเกิดมาจากความรู้ การสังเกต อันเกิดจากการได้รับประสบการณ์ในการเรียนรู้ ในการคิดคำนวณ ความสัมพันธ์กับจำนวน ทำให้สามารถจัดประเภท แยกแยะ รวบรวมข้อเท็จจริงต่างๆ โดยสามารถสรุปเป็นความเข้าใจที่ได้ออกมาในรูปของบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่างๆ ของวิชาคณิตศาสตร์ รวมทั้งสามารถจัดประเภทของสิ่งเร้าที่เหมือนกันเข้าด้วยกัน แยกแยะความแตกต่างของสิ่งเร้าที่ไม่สัมพันธ์กันออกจากกัน ซึ่งความคิด ความเข้าใจนั้นอธิบายได้ด้วยคำพูดหรือสัญลักษณ์

ปราณี พรภวิษย์กุล (2549 อ้างถึงใน กัณทิมา ตราบุรี, 2556) กล่าวว่า มโนมติทางคณิตศาสตร์หมายถึง ความคิดสำคัญ หรือความเข้าใจเกี่ยวกับเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งเกิดมาจากความรู้ การสังเกต หรือการได้รับประสบการณ์ในการเรียนรู้ โดยสรุปออกมาเป็นบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติของวิชาคณิตศาสตร์

กัณทิมา ตราบุรี (2556) ได้ให้ความหมายว่า มโนมติทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความคิดหรือความเข้าใจภายในตัวนักเรียนที่ได้ตีความหรือสรุปเกี่ยวกับเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ อันเกิดจากการสังเกต การได้รับความรู้ หรือได้รับประสบการณ์ตรงในการเรียนรู้ โดยสามารถประมวลสิ่งที่ได้รับนั้นเข้าด้วยกัน แล้วสรุปออกมาเป็นบทนิยาม ทฤษฎีบท หรือสมบัติต่างๆ รวมทั้งสามารถอธิบายความคิดหรือความเข้าใจนั้นออกมาเป็นภาษาพูด หรือภาษาเขียน หรือสัญลักษณ์ได้

มณีรัตน์ ขยันกลาง (2559) ได้ให้ความหมายว่า มโนมติทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความคิด ความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่เกิดจากการเรียนรู้ การฝึกประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์ แล้วสามารถสรุปความคิด ความรู้ ความเข้าใจออกมาเป็นกฎนิยาม หรือความหมาย แล้วนำไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์

จากความหมายของคำว่า มโนมติทางคณิตศาสตร์ ตามที่นักการศึกษาหลายท่านได้ให้ความหมายไว้สามารถสรุปได้ว่า มโนมติทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความคิดหรือความเข้าใจของนักเรียนที่ได้ตีความหรือสรุปเกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ อันเกิดจากการเรียนรู้ และการฝึกประสบการณ์ต่างๆ แล้วสรุปความออกมาเป็นบทนิยาม ทฤษฎีบท หรือสมบัติต่างๆ รวมทั้งสามารถแล้วสามารถสรุปความโดยการอธิบายความคิด หรือความเข้าใจนั้นออกมาเป็นภาพ ภาษาพูด ภาษาเขียนหรือสัญลักษณ์ได้

4.3 ลักษณะของมโนมติทางคณิตศาสตร์

จากการศึกษามโนมติทางคณิตศาสตร์ ได้มีนักการศึกษา ธัญญารัตน์ จุมแพง (2554) ได้ใช้เกณฑ์การสอดคล้องกับมโนมติทางวิทยาศาสตร์ แบ่งออกเป็น 5 ประเภท ตามแนวคิดของ Haidar (1997) ซึ่งนำมาประยุกต์ใช้กับมโนมติคณิตศาสตร์ เพื่อวิเคราะห์มโนมติของนักเรียน ดังนี้

1. มโนมติเชิงคณิตศาสตร์ (sound understanding) หรือ SU คือ คำตอบของนักเรียนที่แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีมโนมติสอดคล้องกับมโนมติที่เป็นที่ยอมรับและสอดคล้องกับมโนมติของนักคณิตศาสตร์ทุกองค์ประกอบ

2. มโนมติเชิงคณิตศาสตร์แบบไม่สมบูรณ์ (partial understanding) หรือ PU คือ คำตอบของนักเรียนที่แสดงว่ามีมโนมติที่สอดคล้องกับมโนมติที่เป็นที่ยอมรับและสอดคล้องกับมโนมติของนักคณิตศาสตร์อย่างน้อย 1 องค์ประกอบ

3. มโนมติเชิงคณิตศาสตร์บางส่วนและมโนมติคลาดเคลื่อนบางส่วน (partial understanding with specific misconception) หรือ PU&MU คือ คำตอบของนักเรียนที่แสดงว่ามีมโนมติที่สอดคล้องกับมโนมติที่เป็นที่ยอมรับและสอดคล้องกับมโนมติของนักคณิตศาสตร์อย่างน้อย 1 องค์ประกอบและมีบางส่วนที่ไม่สอดคล้อง หรือคลาดเคลื่อนไปจากมโนมติเชิงคณิตศาสตร์

4. มโนมติคลาดเคลื่อน (specific misconception) หรือ MU คือ คำตอบของนักเรียนที่แสดงมโนมติที่ไม่สอดคล้องหรือคลาดเคลื่อนจากมโนมติที่เป็นที่ยอมรับ และสอดคล้องกับมโนมติของนักคณิตศาสตร์

5. ไม่เข้าใจมโนมติเชิงคณิตศาสตร์ (no understanding) หรือ NU คือ การที่นักเรียนไม่ตอบคำถาม ตอบคำถามในลักษณะทวนคำถามหรือตอบคำถามไม่ตรงประเด็น

ซึ่งงานวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้นำแนวคิดของ Haidar (1997 อ้างถึงใน ธัญญารัตน์ จุมแพง, 2554) เกี่ยวกับการแบ่งประเภทของมโนมติวิทยาศาสตร์ออกเป็น 5 ประเภท มาประยุกต์ใช้กับมโนมติทางคณิตศาสตร์

4.4 ประโยชน์ของมโนมติทางคณิตศาสตร์

นักการศึกษาได้กล่าวถึงประโยชน์ของมโนมติทางคณิตศาสตร์ ไว้ว่า มโนมติทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือพัฒนาความสามารถในการทำความเข้าใจเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ในระดับอื่นๆ

โสภาพรรณ ศิริรัตน์ (2527 อ้างถึงใน ศิลาพร อินไผ่, 2557) กล่าวถึงประโยชน์ของมโนมติทางคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

1. ลดความซับซ้อนในเรื่องที่เรียน เพราะผู้เรียนมุ่งที่จะจำหรือเข้าใจรายละเอียดทั้งหมดก็จะก่อให้เกิดความยุ่งยากในการทำความเข้าใจเรื่องที่เรียนและเนื้อหาคณิตศาสตร์
2. ช่วยในการจัดลำดับความคิด จำแนกเรื่องและเนื้อหาที่เป็นประเภทเดียวกันให้เป็นหมวดหมู่เพื่อให้การเรียนรู้เกิดขึ้นได้เร็วและมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น
3. ประหยัดเวลาในการเรียนรู้ เพราะเมื่อเข้าใจมโนมติทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเรื่องหนึ่งเรื่องใดแล้วก็ไม่ต้องเสียเวลาเรียนมโนมติซ้ำอีก
4. ความเข้าใจในมโนมติทางคณิตศาสตร์เป็นรากฐานการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับสูงขึ้น
5. ช่วยให้มีแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า มโนมติทางคณิตศาสตร์ช่วยในการจัดลำดับความคิด ให้การเรียนรู้เกิดขึ้นได้เร็วขึ้น และมีประสิทธิภาพ ตลอดจนเป็นเครื่องมือในการทำความเข้าใจเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ให้สามารถพัฒนาไปใช้ในระดับสูงต่อไป

4.5 มโนมติที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์

4.5.1 ความหมายของมโนมติที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์

มโนมติที่คลาดเคลื่อนเป็นคำที่มาจากภาษาอังกฤษ คำว่า misconceptions ซึ่งได้มีนักการศึกษาได้ให้ความหมายไว้ ดังนี้

ปุญยนุช กูลเพชร์ (2552) กล่าวว่า มโนมติที่คลาดเคลื่อน หมายถึง ความรู้ความเข้าใจในการเรียนรู้ของผู้เรียนที่ไม่ถูกต้อง ผิดพรากจากความจริง จึงส่งผลให้นักเรียนไม่สามารถศึกษาต่อในระดับที่สูงได้ถูกต้อง

พรประสิทธิ์ ศรีสุพรรณ (2553) กล่าวว่า มโนมติที่คลาดเคลื่อน หมายถึง ความรู้หรือความเข้าใจที่ไม่สมเหตุสมผลของนักเรียนที่ขัดแย้งกับหลักการทางวิทยาศาสตร์ ซึ่งเป็นผลมาจากการสังเกตหรือประสบการณ์เดิมของนักเรียนที่ไม่สมบูรณ์ ทำให้การตีความหรือให้ความหมายกับประสบการณ์ใหม่เบี่ยงเบนไปจากวิทยาศาสตร์ที่เป็นที่ยอมรับกันในปัจจุบัน

นัฏฐพร กมลทิพย์ (2554) กล่าวว่า มโนมติที่คลาดเคลื่อน หมายถึง แนวความคิดหรือความเข้าใจที่ไม่สอดคล้องกับความรู้หรือหลักการทางวิทยาศาสตร์ ที่เป็นที่ยอมรับกันในสังคมวิทยาศาสตร์ในขณะนั้น ซึ่งเป็นผลมาจากการสังเกต และประสบการณ์เดิมของบุคคลในการสร้างความรู้นั้น

งามพร้อม อ่อนบัวขาว (2556) ได้ให้ความหมายว่า มโนมติที่คลาดเคลื่อน หมายถึง ความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับสิ่งใดสิ่งหนึ่งหรือการสรุปความคิดที่มีอยู่เดิมของแต่ละบุคคลที่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ หรือเบี่ยงเบนไปจากความเป็นจริง ทำให้เกิดการเชื่อมโยงประสบการณ์ใหม่ช้าลงไม่เกิดผล ทั้งนี้เนื่องจากสาเหตุหลายประการ เช่น ความคลุมเครือของสิ่งเร้า การขาดประสบการณ์ การมีอคติหรือสภาพอารมณ์ พื้นฐานมาจากการสังเกต หรือประสบการณ์เดิมของนักเรียน เป็นต้น ซึ่งมีพื้นฐานมาจากประสบการณ์ที่ถูกนามาใช้และมีผลรบกวนต่อการเรียนรู้

Drews (2005 อ้างถึงใน มณีรัตน์ ขยันกลาง, 2559) ได้กล่าวว่า มโนมติที่คลาดเคลื่อน หมายถึง ความเชื่อและความเข้าใจที่ได้มาจากแนวความคิดหรือความรู้ที่ไม่ถูกต้อง ความรู้ที่ไม่สมบูรณ์ คลุมเครือ มโนมติที่คลาดเคลื่อนจึงเป็นแนวคิดและความรู้ที่แตกต่างไปจากข้อตกลงที่เป็นที่ยอมรับโดยทั่วไป มโนมติที่คลาดเคลื่อนอาจเกิดขึ้นก่อนหรือระหว่างการเรียนรู้ โดยที่นักเรียนมักจะไม่รู้ว่าตนเองมีมโนมติที่คลาดเคลื่อนอย่างไร และครูเองก็ไม่มีเวลาพอที่จะวินิจฉัยนักเรียนเป็นรายบุคคลได้ทุกๆ เนื้อหา หรือทุกๆ ทักษะ

มณีรัตน์ ขยันกลาง (2559) ได้ให้ความหมายว่า มโนมติที่คลาดเคลื่อน หมายถึง ความเชื่อ ความคิด ความเข้าใจผิดความรู้ที่ไม่ถูกต้อง ความรู้ที่ไม่สมบูรณ์ ที่ได้รับจากประสบการณ์แล้วนำไปใช้ในการแปลความหรือไปใช้คิดคำนวณที่ผิด จึงส่งผลให้นักเรียนไม่สามารถศึกษาในระดับสูงได้ถูกต้อง

Ashlock (2010) ได้ให้ความหมายว่า มโนมติที่คลาดเคลื่อน หมายถึง การเข้าใจผิดอาจจะเกิดความผิดพลาดของกฎ หรือตามลักษณะทั่วไปหรือผลของการตีความที่สอดคล้องทางการเรียนของความคิดทางคณิตศาสตร์ เด็กยังมีบางสิ่งที่ยังไม่ได้เข้าใจอย่างชัดเจนเกี่ยวกับการเรียนรู้คณิตศาสตร์

Cockburn & Littler (2010) กล่าวว่า มโนมติที่คลาดเคลื่อน อาจเกิดจากการใช้สูตร กฎ ผิด สรุปเกินหรือน้อยกว่าความเป็นจริง การแปลความคิดทางคณิตศาสตร์ที่ผิดหรือเข้าใจสิ่งที่นักเรียนคิดไม่ชัดเจน

จากความหมายของคำว่า มโนมติที่คลาดเคลื่อน ตามที่นักการศึกษาหลายท่านได้ให้ความหมายไว้ สามารถสรุปได้ว่า มโนมติที่คลาดเคลื่อน หมายถึง ความคิด หรือความเข้าใจของ

นักเรียนที่ได้ตีความหรือสรุปความเกี่ยวกับเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ อันเกิดจากการสังเกต การเรียนรู้ และการฝึกประสบการณ์ต่างๆ มีความขัดแย้งกับหลักการทางคณิตศาสตร์ที่เป็นที่ยอมรับโดยทั่วไป ซึ่งเป็นผลมาจากการสังเกต การเรียนรู้ หรือประสบการณ์ของนักเรียนที่ไม่ถูกต้องหรือสมบูรณ์ ทำให้เกิดปัญหาต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในระดับต่อไป

4.5.2 **ความสำคัญของการศึกษามโนมติที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์**

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ (2555) กล่าวว่า มโนมติทางคณิตศาสตร์ (mathematics concept) เป็นพื้นฐานสำคัญสำหรับการเรียนรู้คณิตศาสตร์และการนำคณิตศาสตร์ไปแก้หรือใช้งาน ครูที่มีมโนมติดี เข้าใจลึกซึ้งเกี่ยวกับความหมาย ที่มาและความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกันของมโนมติ บทนิยาม ทฤษฎีบท กฎ สูตร หรือการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ มักสามารถจัดการเรียนรู้เพื่อการสื่อสาร สื่อความหมาย ให้นักเรียนเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้องลึกซึ้ง รวมทั้งสามารถวิเคราะห์เนื้อหา และสร้างคำถามขยายความเพื่อพัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนได้ สำหรับนักเรียนที่มีมโนมติทางคณิตศาสตร์ดี มักสามารถเรียนรู้และแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ดีด้วย จึงอาจกล่าวโดยสรุปได้ว่ามโนมติทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญต่อประสิทธิภาพการจัดการเรียนการสอนของครูและการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียน

พร้อมพรรณ อุดมสิน (2544 อ้างถึงใน ธัศวินทร์ ยิ้มละมัย, 2557) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการศึกษามโนมติที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า ในการสอนคณิตศาสตร์ครูผู้สอนมักประสบปัญหาเรื่อง นักเรียนมีมโนมติที่คลาดเคลื่อนนั้นไม่ได้รับการแก้ไข ก็จะส่งผลต่อความล้มเหลวในการเรียนเนื้อหานั้นๆ และเนื้อหาที่ต่อเนื่องไปด้วย ดังนั้นจึงเป็นสิ่งจำเป็นที่ผู้สอนจะต้องหาวิธีอันใดที่จะทำให้มโนมติที่คลาดเคลื่อนต่างๆ ของนักเรียนลดน้อยลง ซึ่งจะเป็นการช่วยปรับปรุงการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น และเกิดความพยายามในการวินิจฉัยมโนมติที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ได้อย่างต่อเนื่อง ตั้งแต่การใช้วิธีที่ไม่เป็นทางการ เช่น การสังเกต หรือการสอนถามนักเรียนเป็นรายบุคคล เป็นต้น

ศิริเดช สุชีวะ (2538 อ้างถึงใน ศิลาพร อินไผ่, 2557) ได้กล่าวถึงวิชาคณิตศาสตร์ว่า เป็นวิชาที่มีเนื้อหาต่อเนื่อง มีความซับซ้อนและมีลักษณะนามธรรม หากครูให้ข้อมูลป้อนกลับเกี่ยวกับมโนมติที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนแต่ละคนที่ได้ในภายหลังของการประเมินผลการเรียนรู้ในแต่ละเนื้อหาก่อนที่จะเรียนเรื่องต่อไป ก็จะเป็นประโยชน์อย่างยิ่ง ทำให้นักเรียนรู้ว่าตนเองมีความบกพร่องที่จุดใด ควรจะปรับปรุงตนเองอย่างไรให้มีผลการเรียนดีขึ้น ขณะเดียวกันครูผู้สอนเมื่อทราบข้อมูลเกี่ยวกับมโนมติของนักเรียนแล้ว ก็สามารถจะนำมาใช้ในการปรับปรุงการสอน ให้เกิดประสิทธิภาพกับนักเรียนมากที่สุด

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่า การศึกษามโนมติที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญเป็นอย่างมากในการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เป็นพื้นฐานสำคัญในการจัดการเรียนรู้เพื่อการสื่อสาร สื่อความหมาย ให้นักเรียนเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง ครูควรสำรวจมโนมติของนักเรียนก่อนการจัดการเรียนรู้และหลังการจัดการเรียนรู้ เพื่อให้ทราบถึงมโนมติของนักเรียนแต่ละคน และหากพบมโนมติที่คลาดเคลื่อน ครูควรหาแนวทางหรือกิจกรรมที่หลากหลายในการเปลี่ยนแปลงมโนมติที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนไปสู่มโนมติที่ถูกต้อง เพื่อให้นักเรียนสามารถนำความรู้ใหม่เชื่อมโยงกับความรู้เดิมของนักเรียนได้ถูกต้องต่อไป

4.5.3 ลักษณะของมโนมติที่คลาดเคลื่อน

Fisher (1985 อ้างถึงใน ละออง พรมราช, 2556) กล่าวว่า มโนมติที่คลาดเคลื่อนมีลักษณะ ดังนี้

1. คลาดเคลื่อนจากมโนมติของผู้ทรงคุณวุฒิหรือผู้เชี่ยวชาญในแขนงวิชานั้นๆ

2. คลาดเคลื่อนจากการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นที่แตกต่างกันของแต่ละบุคคลจำนวนมาก

3. ความคลาดเคลื่อนจะขยายวงกว้างออกไปจากเรื่องที่ง่ายไปสู่เรื่องที่ยากขึ้นถ้าใช้วิธีสอนแบบเดิม

4. ความคลาดเคลื่อนบางอย่างก็เกี่ยวข้องกับความเชื่ออื่นๆ ที่เกี่ยวโยงกันอย่างมีระบบและทำให้นักเรียนมีแนวโน้มที่จะนำไปใช้ในชีวิตของเขาด้วย

5. ความคลาดเคลื่อนบางอย่างก็เป็นสิ่งที่ถ่ายทอดมาตั้งแต่อดีตจากผู้นำทางความรู้ในแขนงวิชานั้นๆ มาสู่นักเรียน

Pippig (1975 อ้างถึงใน มณีรัตน์ ขยันกลาง, 2559) ได้กล่าวถึงลักษณะของการเกิดมโนมติที่คลาดเคลื่อนไว้ว่า ลักษณะของการเกิดมโนมติที่คลาดเคลื่อนจำแนกได้ดังนี้

1. ความคลาดเคลื่อนจากการทำซ้ำ (Errors of Perseveration) ซึ่งมีหนึ่งองค์ประกอบ

2. ความคลาดเคลื่อนจากความสัมพันธ์ (Errors of Association) ที่เกี่ยวข้องกับการมีปฏิสัมพันธ์ที่ไม่ถูกต้องระหว่างหนึ่งองค์ประกอบ

3. ความคลาดเคลื่อนจากการแทรกแซง (Errors of Interference) มีการดำเนินงานที่แตกต่างกันหรือมีแนวคิดของผู้อื่นมาแทรกแซง

4. ความคลาดเคลื่อนจากการดูดซึม ซึ่งนักเรียนจะได้ยินสิ่งที่ไม่ถูกต้องทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนในการอ่านหรือการเขียนและการเกิดความคลาดเคลื่อนด้านอื่นๆ

ความคลาดเคลื่อนดังกล่าวมักจะเป็นความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการขาดความสนใจและขาดความเอาใจใส่ (ความคลาดเคลื่อนที่เกิดแบบสุ่มหรือเกิดจากความประมาท)

5. ความคลาดเคลื่อนจากการถ่ายโยงการเรียนรู้ทางลบ สามารถระบุผลของความคลาดเคลื่อนที่ได้จากชุดของแบบฝึกหัดหรือปัญหาคำ

Pines & West (1983 อ้างถึงใน มณีรัตน์ ขยันกลาง, 2559) ได้กล่าวถึงลักษณะของการเกิดมโนมติที่คลาดเคลื่อนไว้ว่า ลักษณะของการเกิดมโนมติที่คลาดเคลื่อน แบ่งประเภทของการเกิดมโนมติที่คลาดเคลื่อนออกเป็น 3 ประเภทตามสถานการณ์การเรียนรู้ที่แตกต่างกัน 3 รูปแบบ ดังนี้

1. มโนมติที่คลาดเคลื่อนอันเกิดจากสถานการณ์ที่ขัดแย้งกัน (Misconception Derived from Conflict Learning Situation) แบ่งตามขั้นตอนของการเกิดได้ 3 ระยะคือ

1.1 ระยะของการรับรู้ (Awareness Phase) ครูจะต้องจัดเตรียมกิจกรรมต่าง ๆ อันเป็นการชักนำ สิ่งที่มีอยู่ในตัวนักเรียนให้ปรากฏออกมา ครูต้องทุ่มเวลาให้กับช่วงนี้เนื่องจากนักเรียนจะเสาะหาทำความรู้จักกับความรู้ใหม่ๆ ภายในขอบเขตของตนเอง และเมื่อไม่พบสิ่งที่พอใจสำหรับนักเรียนอาจก่อให้เกิดแนวความคิดที่ผิดพลาดขึ้นได้ ครูจะต้องหาทางแก้ไขความคิดผิดๆ นี้

1.2 ระยะของการไม่สมดุล (Disequilbrium Phase) เมื่อนักเรียนได้ทำกิจกรรมต่างๆ นักเรียนจะเกิดการเรียนรู้ซึ่งจะเป็นความรู้ที่นักเรียนค้นพบจากการตีความสิ่งที่รับรู้ใหม่ตามประสบการณ์เดิมของแต่ละบุคคล ซึ่งความรู้เดิมและความรู้ใหม่อาจจะไม่สอดคล้องกันทำให้ผู้เรียนเกิดความไม่สมดุล

1.3 ระยะจัดระบบใหม่ (Reformulation Phase) เมื่อนักเรียนได้เผชิญกับปัญหาทางคณิตศาสตร์นักเรียนจะจัดระบบความรู้ใหม่ว่ามโนมติที่ถูกต้องคืออะไร ซึ่งครูเป็นผู้คอยชี้แนะและช่วยเหลือนักเรียน

2. มโนมติที่คลาดเคลื่อนอันเกิดจากสถานการณ์ที่สอดคล้องกัน (Misconception Derived from Congruent Learning Situation) เช่น การขยาย ความหมายของคำแบบการหยั่งรู้ (Intuitive Meaning) สู่ความหมายใหม่ (New Meaning) หรือการละทิ้งบางแง่มุมของความหมายของการหยั่งรู้เพื่อคงไว้ ซึ่งแง่มุมใหม่ๆ ที่ตนพอใจ ก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงความหมายของคำ อันกลายเป็นปรากฏการณ์ธรรมดาของเด็กๆ เช่น มโนมติที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับกระบวนการสังเคราะห์แสงและอาหารของพืช ซึ่งนักเรียนจะนำความหมายของคำว่า

อาหารโดยทั่วไป เชื่อมโยงกับความหมายของคำว่าแหล่งอาหารของพืช ทำให้เกิดความสับสนและเกิดมโนมติที่คลาดเคลื่อนว่าอาหารของพืชมาจากการที่พืชดูดอาหารจากดิน

3. มโนมติที่คลาดเคลื่อนอันเกิดจากสถานการณ์ที่ให้ความรู้โดยใช้สัญลักษณ์ (Misconception Derived from a Symbolic Learning Situation) ความรู้จากสัญลักษณ์ต่างๆ คือ นักเรียนไม่สามารถนำความรู้จากสัญลักษณ์ (Symbolic Knowledge) ให้มาสัมพันธ์กับความรู้จริง (Real Knowledge) ได้

สรุปได้ว่า ลักษณะของการเกิดมโนมติที่คลาดเคลื่อน จำแนกไว้หลายลักษณะด้วยกัน เช่น คลาดเคลื่อนจากมโนมติของผู้เชี่ยวชาญในแขนงนั้น คลาดเคลื่อนจากการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นที่แตกต่างกัน คลาดเคลื่อนขยายวงกว้างจากเรื่องที่ง่ายไปสู่เรื่องยากขึ้นถ้าใช้วิธีสอนแบบเดิม ความคลาดเคลื่อนบางอย่างที่เกี่ยวข้องกับความเชื่ออื่นๆ คลาดเคลื่อนจากการทำซ้ำ ความคลาดเคลื่อนจากความสัมพันธ์ คลาดเคลื่อนจากการแทรกแซง คลาดเคลื่อนจากการดูดซึมคลาดเคลื่อนจากการถ่ายโยงการเรียนรู้ทางลบ คลาดเคลื่อนจากสถานการณ์ที่ขัดแย้งกัน คลาดเคลื่อนจากสถานการณ์ที่สอดคล้องกัน และคลาดเคลื่อนจากสถานการณ์ที่ให้ความรู้โดยใช้สัญลักษณ์

4.5.4 สาเหตุของการเกิดมโนมติที่คลาดเคลื่อน

นักการศึกษากล่าวถึง สาเหตุของมโนมติที่คลาดเคลื่อน ไว้ดังต่อไปนี้

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2554) ได้กล่าวถึง สาเหตุของการเกิดมโนมติที่คลาดเคลื่อนไว้ว่า สาเหตุของการเกิดมโนมติที่คลาดเคลื่อนอาจเกิดจากการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอที่ครูใช้ บางครั้งทำให้นักเรียนมีความเข้าใจคลาดเคลื่อน ทั้งที่ครูอาจมีมโนมติที่ถูกต้อง แต่การสื่อสารกับนักเรียนไม่ชัดเจนพอ ทำให้เข้าใจผิดหรือไม่มีการสื่อความหมายที่ลึกซึ้งในทางคณิตศาสตร์มากพอ ทำให้นักเรียนเข้าใจไม่ชัดเจน จนอาจกลายเป็นความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนในบางครั้ง

อัมพร ม้าคนอง (2557) ได้กล่าวถึงสาเหตุของการเกิดมโนมติที่คลาดเคลื่อนไว้ว่า สาเหตุของมโนมติที่คลาดเคลื่อน เกิดจากการขาดความเข้าใจที่แท้จริงเกี่ยวกับความหมายและลักษณะของมโนมติ การละเลยเงื่อนไขของทฤษฎีบท กฎ สูตร หรือบทนิยามทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ยังมีปัจจัยอีกมากมายที่ส่งผลต่อความคลาดเคลื่อนของมโนมติ เช่น ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ความสามารถทางการคิด ระดับสติปัญญา และประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน รวมทั้งบริบทและกระบวนการจัดการเรียนรู้

Swan (2001 อ้างถึงใน มณีรัตน์ ขยันกลาง, 2559) ได้กล่าวถึงสาเหตุของการเกิดมโนมติที่คลาดเคลื่อนไว้ว่าการที่นักเรียนจะเกิดมโนมติที่คลาดเคลื่อนอาจเนื่องมาจากสาเหตุหลายๆ ประการ เช่น การได้รับความรู้จากครูที่มีความเข้าใจไม่เพียงพอในมโนมติที่สอน หรืออาจจะเกิดจากที่นักเรียนศึกษาจากตำราเรียนที่ให้ความรู้ไม่ชัดเจน ข้ามขั้นตอนวิธีทำ ทำให้นักเรียนสร้างมโนมติของตนเอง

มณีรัตน์ ขยันกลาง (2559) ได้กล่าวถึงสาเหตุของมโนมติที่คลาดเคลื่อนว่า เกิดจากการสื่อสารระหว่างครูกับนักเรียนเข้าใจไม่ตรงกัน จากประสบการณ์ของนักเรียนที่ได้ในโรงเรียนและในชีวิตจริง จากความเชื่อ จากปรากฏการณ์ธรรมชาติ หรือความพร้อมของนักเรียนที่จะได้รับการถ่ายทอดในบางเรื่องยังไม่ดีพอ ทำให้เข้าใจไม่ชัดเจน จนกลายเป็นมโนมติที่คลาดเคลื่อนได้

จากที่กล่าวมาข้างต้น สามารถสรุปได้ว่า สาเหตุของมโนมติที่คลาดเคลื่อน เกิดจากสาเหตุหลายประการ ได้แก่ การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอที่ครูใช้ การขาดความเข้าใจที่แท้จริงเกี่ยวกับความหมายและลักษณะของมโนมติ การละเลยเงื่อนไขของทฤษฎี บท กฎ สูตร หรือบทนิยามทางคณิตศาสตร์ ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ความสามารถทางการคิด ระดับสติปัญญา ประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน บริบท กระบวนการจัดการเรียนรู้ การข้ามขั้นตอนของวิธีทำ ความเชื่อ ปรากฏการณ์ธรรมชาติ หรือความพร้อมของนักเรียนที่จะได้รับการถ่ายทอดในบางเรื่องยังไม่ดีพอ ทำให้เข้าใจไม่ชัดเจนและเกิดเป็นมโนมติที่คลาดเคลื่อน

4.6 การเปลี่ยนแปลงมโนมติ

4.6.1 ความหมายของการเปลี่ยนแปลงมโนมติ

จากการศึกษาเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงมโนมติ (Conceptual change) นั้น นักวิทยาศาสตร์ศึกษาหลายท่าน ให้ความสนใจการเปลี่ยนแปลงมโนมติด้วยข้อเท็จจริงที่ว่านักเรียนใช้มโนมติที่คลาดเคลื่อนในการทำงานที่ได้รับมอบหมาย ซึ่งเป็นเรื่องยากที่จะเปลี่ยนแปลงผ่านการสอนแบบปกติ (Dykstra, 1992; Vosniadou, 2001 อ้างถึงใน ธัญญารัตน์ จูมแพง, 2554)

DiSessa (2002 อ้างถึงใน Suping, 2003) กล่าวว่า การปรับเปลี่ยนมโนมติเป็นการจัดระบบใหม่ของความรู้หลากหลายประเภทที่สลับซับซ้อนในความคิดของนักเรียน ในมุมมองนี้การปรับเปลี่ยนมโนมติจะเกี่ยวกับการจัดระบบเชิงการรู้ของความรู้ที่ยังไม่ได้รับประสบการณ์ (naïve knowledge) ที่แยกย่อยอยู่

Chi & Roscoe (2002 อ้างถึงใน ทัศนีย์ บุญโย, 2553) กล่าวว่า การเปลี่ยนแปลงมโนมติเป็นการปรับปรุงความเข้าใจมโนมติที่คลาดเคลื่อน เริ่มต้นด้วยมโนมติที่ยังไม่ได้รับประสบการณ์ (naïve conception) นักเรียนจะต้องระบุถึงมโนมติที่เข้าใจผิดและทำการปรับปรุง

ในมุมมองนี้ความเข้าใจมโนมติที่คลาดเคลื่อนเป็นการจัดหมวดหมู่มโนมติที่ผิด ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงมโนมติจึงเป็นการจัดหมวดหมู่มโนมติใหม่ให้ถูกต้อง

ทัศนีย์ บุญโย (2553) กล่าวว่า การเปลี่ยนแปลงมโนมติ เป็นการปรับปรุงความเข้าใจมโนมติของนักเรียนที่ยังไม่ได้รับประสบการณ์จากการสอน (naïve conception) ซึ่งเป็นมโนมติที่นักเรียนมีอยู่ก่อนอันเกิดจากประสบการณ์ในชีวิตประจำวัน ไปเป็นมโนมติที่ใกล้เคียงกับมโนมติเชิงวิทยาศาสตร์ (scientific conceptual) อันเป็นเป้าหมายของการจัดการเรียนการสอน ซึ่งในการปรับปรุงในความเข้าใจนี้ อาจเป็นการขยายความรู้ การจัดหมวดหมู่ความรู้ หรือการจัดระบบโครงสร้างความรู้ใหม่

พรประสิทธิ์ ศรีสุพรรณ (2553) กล่าวว่า การเปลี่ยนแปลงมโนมติ หมายถึง การเปลี่ยนแปลงข้อสรุปของความคิด ความเข้าใจภายในตัวของนักเรียนที่มีต่อมโนมติหนึ่งๆ ซึ่งเกิดจากการสร้างความหมายในทางวิทยาศาสตร์ใหม่ของนักเรียน

ธัญญารัตน์ จูมแพง (2554) กล่าวว่า การเปลี่ยนแปลงมโนมติ หมายถึง กระบวนการพัฒนามโนมติเดิมของนักเรียนซึ่งอาจเป็นมโนมติคณิตศาสตร์อยู่แล้ว หรือเปลี่ยนแปลงมโนมติที่คลาดเคลื่อนไปสู่มโนมติคณิตศาสตร์ โดยสามารถจำแนกลักษณะการเปลี่ยนแปลงมโนมติตามกรอบของ Dykstra et al. (1992)

Fensham, Gunstone & White (1994 อ้างถึงใน Zirbel, 2004) กล่าวว่า การเปลี่ยนแปลงมโนมติ เป็นการเปลี่ยนแปลงที่ไม่เกิดขึ้นอย่างทันทีทันใด แต่เกิดจากการสะสม (accretion)ข้อมูล ซึ่งมีส่วนส่วนสำคัญที่นักเรียนต้องตระหนักถึงมโนมติที่คลาดเคลื่อนและมโนมติวิทยาศาสตร์ในส่วนที่มีความแตกต่างกันของข้อมูลโดยอาจไม่ได้มีการแทนที่ (replace) สิ่งที่มีอยู่ก่อนอย่างเป็นทางการ (Mortimer, 1995 อ้างถึงใน Zirbel, 2004)

จากมุมมองที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า การเปลี่ยนแปลงมโนมติ หมายถึง การปรับเปลี่ยนหรือการปรับปรุงความคิด ความเข้าใจของนักเรียนต่อมโนมติที่มีอยู่เดิม ให้เป็นมโนมติใหม่ที่มีความถูกต้องหรือสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

4.6.2 ลักษณะของการเปลี่ยนแปลงมโนมติ

นักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงระดับหรือลักษณะการเปลี่ยนแปลงมโนมติไว้อย่างหลากหลาย แต่สามารถจัดลักษณะการเปลี่ยนแปลงมโนมติได้ 3 ลักษณะ (Brunsell, 2008 อ้างถึงใน นิวัฒน์ ศรีสวัสดิ์, 2548) ดังนี้

ระดับที่ 1 การเพิ่มเติมความคิดไปยังมโนมติเดิมที่มีอยู่ ซึ่งการเพิ่มความคิดนี้เป็นไปโดยปราศจากการจัดระบบโครงสร้างทางปัญญาความรู้ใหม่ อาจจะเรียกได้ว่า เป็นการขยายมโนมติเบื้องต้นที่มีอยู่ Posner et al. (1982 อ้างถึงใน Brunsell, 2008) และ Strike & Poner

(1992 อ้างถึงใน Brunsell, 2008) เรียกการเพิ่ม (accretion) Carey (1985 อ้างถึงใน Brunsell, 2008) อธิบายความเข้มของการปรับเปลี่ยนระดับนี้ว่าเป็นการสะสมความรู้ (accumulation) โดยปราศจากการเปลี่ยนโครงสร้างใหม่ Vosniadou (1994 อ้างถึงใน Brunsell, 2008) เรียกว่าการเพิ่มพูนความรู้ (enrichment) Chi et al. (1994) กล่าวว่าเป็นการเพิ่มเติมของความคิดในฐานะกระบวนการที่ไม่มีการปรับเปลี่ยนส่วนใดส่วนหนึ่งในเชิงภววิทยาของมโนมติ Schwedes & Schmidt (1992 อ้างถึงใน Brunsell, 2008) กล่าวว่าเป็นการเพิ่มเติมไปยังกลุ่มของกฎและความคิดที่อยู่รอบแกนกลางของมโนมติ Dykstra et al. (1992 อ้างถึงใน นิวัฒน์ ศรีสวัสดิ์, 2008) เรียกว่าการปรับปรุงความเข้าใจ

ระดับที่ 2 การปรับปรุงอย่างผิวเผินของมโนมติ Schwedes & Schmidt (1992 อ้างถึงใน Brunsell, 2008) ได้อธิบายว่า แกนกลางมโนมติมีการปรับเปลี่ยน หรือความรู้ใหม่ได้ถูกเชื่อมติดกับแกนกลางของมโมติ แต่ตัวแกนกลางของมโนมติไม่ได้มีการปรับเปลี่ยน Posner et al. (1982 อ้างถึงใน Brunsell, 2008) และ Strike & Poner (1992 อ้างถึงใน Brunsell, 2008) เรียกว่า การย่อยและการดูดซึม (assimilation) เนื่องจากว่ามีการปรับปรุงแก้ไขความรู้จึงเป็นการดูดซึมคนละความหมายกับการกลมกลืน (assimilation) ของ Piaget ในขณะที่ Dykstra et al. (1992 อ้างถึงใน นิวัฒน์ ศรีสวัสดิ์, 2008) เรียกว่า การขยายชั้นความเข้าใจ

ระดับที่ 3 การจัดโครงสร้างของความรู้ใหม่อย่างสมบูรณ์ของมโนมติ Posner et al. (1982 อ้างถึงใน Brunsell, 2008) และ Strike & Poner (1992 อ้างถึงใน Brunsell, 2008) เรียกว่า การปรับเปลี่ยน(accommodation) Hewson & Hewson (1992 อ้างถึงใน Brunsell, 2008) เรียกว่า การเปลี่ยนแปลงมโนมติ (conceptual exchange) Carey (1985 อ้างถึงใน Brunsell, 2008) เรียกว่า การเปลี่ยนโครงสร้างใหม่อย่างแข็ง (Strong restructuring) Vosniadou (1994 อ้างถึงใน Brunsell, 2008) อธิบายว่า เป็นการปรับปรุงที่ระดับโครงสร้างทฤษฎี Schwedes & Schmidt (1992 อ้างถึงใน Brunsell, 2008) กล่าวว่าเป็นปรับเปลี่ยนอย่างสมบูรณ์ของแกนกลางของมโนมติ Dykstra et al. (1992 อ้างถึงใน นิวัฒน์ ศรีสวัสดิ์, 2008) เรียกว่าการเปลี่ยนกรอบความเข้าใจซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

1. การปรับปรุงความเข้าใจ (Differentiation) เป็นการเปลี่ยนแปลงมโนมติที่เกิดขึ้นเมื่อมโนมติใหม่เกิดขึ้นมาจากมโนมติเดิมที่มีอยู่ โดยที่มีความสอดคล้องกันกับมโนมติที่มีอยู่เดิมและได้เป็นมโนมติเดิมที่กว้างขึ้น

2. การขยายชั้นความเข้าใจ (Class Extension) เป็นการเปลี่ยนแปลงมโนมติที่เกิดขึ้นเมื่อมโนมติที่มีอยู่เดิมถูกพิจารณาเปรียบเทียบความเสมือนหรือความแตกต่างกัน

แล้ว ผลจากการเปรียบเทียบที่พบนั้นสามารถนำมาจัดกลุ่มเป็นมโนมติย่อยที่สอดคล้องกับมโนมติเดิมได้

3. การเปลี่ยนกรอบความเข้าใจ (Reconceptualization) เป็นการเปลี่ยนแปลงมโนมติที่เกิดขึ้น เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นในความสัมพันธ์กันระหว่างมโนมติย่อยของมโนมติเดิมที่มีอยู่เดิม

5. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

5.1 งานวิจัยในประเทศ

กัณทิมา ตราบุรี (2556) ได้ศึกษาการเปลี่ยนแปลงมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง วงกลม โดยการจัดกิจกรรมซ่อมเสริม ที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มเป้าหมายจำนวน 6 คน โดยการคัดเลือกแบบเจาะจง แบ่งกลุ่มเป้าหมายเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มละ 3 คน คละความสามารถ เครื่องมือที่ใช้ ได้แก่ แบบทดสอบวัดมโนมติก่อนและหลังการจัดกิจกรรมซ่อมเสริม การจัดกิจกรรมซ่อมเสริมที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad และแบบสัมภาษณ์ ผลการศึกษาพบว่า ก่อนการจัดกิจกรรมซ่อมเสริม เรื่องวงกลม พบข้อบกพร่องของนักเรียนในมโนมติย่อยหลายมโนมติ สาเหตุเกิดจากการที่ครูจัดการเรียนการสอนแบบบรรยาย เน้นการพูดอธิบาย เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติด้วยตนเองน้อย นักเรียนได้ฝึกประสบการณ์ในระดับหนึ่ง จึงไม่ค่อยเข้าใจและเกิดความสับสนในบางมโนมติ การจัดกิจกรรมซ่อมเสริมที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ขณะปฏิบัติกิจกรรมมีการบันทึกวีดิทัศน์ ภาพนิ่ง บันทึกเสียง และการสัมภาษณ์ จากการจัดกิจกรรม พบว่า นักเรียนมีการเปลี่ยนแปลงมโนมติในทิศทางที่ดีขึ้น สาเหตุเกิดจากนักเรียนได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมด้วยตนเอง ช่วยกระตุ้นให้นักเรียนส่วนใหญ่ได้คิดวิเคราะห์ ฝึกการจินตนาการ ทำให้นักเรียนเข้าใจเกี่ยวกับทฤษฎีบท ซึ่งช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจในแต่ละมโนมติย่อยเพิ่มมากขึ้น

ผ่องฉวี ไวยาวัจมัย (2561) การวิเคราะห์ความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชาติพันธุ์ ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 และ 6 จังหวัดแม่ฮ่องสอน จำนวน 107 คน เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษา ได้แก่ แบบทดสอบโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์แบบเขียนตอบและแบบสัมภาษณ์ จากผลการศึกษาพบว่า ความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหาสองขั้นตอนผิดพลาดมากที่สุด สาเหตุเกิดจากโครงสร้างของโจทย์ปัญหาสองขั้นตอนที่ข้อมูลที่ซ่อนอยู่นักเรียนจะต้องหาคำตอบเพื่อนำไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาซึ่งนักเรียนเขียนแสดงวิธีแก้โจทย์ปัญหาที่มีการเชื่อมต่อสองขั้นตอนมีปัญหามากกว่าโจทย์ปัญหาขั้นตอนเดียว รองลงมาคือความผิดพลาดการทำความเข้าใจคำศัพท์ทั่วไป ไม่เข้าใจโครงสร้างภาษา ส่งผลให้นักเรียนไม่สามารถเปลี่ยนรูปเพื่อใช้

ทักษะกระบวนการหาคำตอบ และความผิดพลาดด้านการใช้ทักษะกระบวนการพบว่า นักเรียนยังขาดความเข้าใจในทักษะการคิดคำนวณ การบวก การลบ การคูณ และการหาร ซึ่งชี้ให้เห็นว่านักเรียนเรียนโดยการท่องจำ ขาดความเข้าใจในพื้นฐานของการคิดคำนวณ และนักเรียนยังขาดการตระหนักรู้ในความสมเหตุสมผลของคำตอบ

สยุมพร สุ่มมาตย์ (2559) การสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในจังหวัดสมุทรสาคร กลุ่มตัวอย่างจำนวน 900 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แบบทดสอบวินิจฉัยวิชาคณิตศาสตร์ ประกอบด้วยเนื้อหา ดังนี้ การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีหลายพจน์ การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ และการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่อยู่ในรูปผลต่างกำลังสอง พบว่าเนื้อหาแต่ละตอนมีข้อบกพร่องแตกต่างกันไปตามเนื้อหา วิธีการคิด และจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม แต่เนื้อหาที่มีความบกพร่องมากที่สุดคือ การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่อยู่ในรูปผลต่างกำลังสองการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ และแบบทดสอบวินิจฉัยวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง สามารถชี้ข้อบกพร่องในการตอบของนักเรียนได้ทุกข้อ โดยใช้คู่กับคู่มือแบบทดสอบวินิจฉัย โดยคำตอบที่คัดไว้สามารถชี้สาเหตุของความบกพร่องของนักเรียนได้ นำมาสร้างเป็นตัวเลือกของแบบทดสอบวินิจฉัย ประเภท ปรนัยชนิด 4 ตัวเลือก ตามจุดประสงค์การเรียนรู้

ภานุมาศ วรสันต์ (2559) ได้ศึกษาการพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์โดยใช้โปรแกรมจีโอจีบรา เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนาม สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2559 โรงเรียนชัยภูมิภักดีชุมพล อำเภอเมือง จังหวัดชัยภูมิ จำนวน 2 ห้องเรียน รวม 91 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมจีโอจีบราและแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และแบบวัดความพึงพอใจ กิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โปรแกรมจีโอจีบรา เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนาม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีประสิทธิภาพ เท่ากับ 80.83/78.14 กิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โปรแกรมจีโอจีบรามีประสิทธิภาพสูงกว่าเกณฑ์ที่ตั้งไว้ 75/75 ผู้วิจัยได้สร้างแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โปรแกรมจีโอจีบรา เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนาม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีกิจกรรมให้ผู้เรียนเป็นผู้ลงมือปฏิบัติโดยครูเป็นผู้คอยชี้แนะ ผ่านกระบวนการสร้างอย่างเป็นระบบและมีวิธีการที่เหมาะสม นักเรียนได้ฝึกฝนแบบฝึกหัดจากโจทย์ที่หลากหลาย

ทำให้นักเรียนเกิดความชำนาญในการคิดคำนวณ มีความรู้กับเรื่องที่เรียนดีขึ้นและสามารถคิดแก้ปัญหาได้ โปรแกรมจีโอจีบราเป็นโปรแกรมใหม่นักเรียนจึงมีความสนใจที่จะเรียนรู้และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โปรแกรมจีโอจีบราเป็นการจัดกิจกรรมที่สื่อการสอนมีการเคลื่อนไหวทำให้ผู้เรียนหาข้อสรุปได้ง่าย และสื่อการสอนจูงใจให้ผู้เรียนสนใจบทเรียนมากยิ่งขึ้น

5.2 งานวิจัยต่างประเทศ

Hafiziani Eka Putri (2018) ได้ศึกษาผลของการสอนโดยวิธีการ Concrete Pictorial Abstract (CPA) ที่มีต่อการเสริมสร้างความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับประถมศึกษาในโรงเรียน เป็นการวิจัยแบบกึ่งทดลองโดยมีการการควบคุมการออกแบบก่อนและหลังการทดลอง ใช้กับนักเรียนระดับประถมศึกษา 39 คน การศึกษาจะดำเนินการกับสองกลุ่มการเรียนรู้ ได้แก่ กลุ่มการเรียนรู้ด้วยวิธี CPA เป็นกลุ่มการทดลองจำนวน 20 คน และการเรียนรู้แบบดั้งเดิมเป็นกลุ่มควบคุม จำนวน 19 คน โดยตัวชี้วัดความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนจะพิจารณาจากความสามารถของนักเรียนในการเชื่อมโยงหัวข้อคณิตศาสตร์เพื่อเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับวิชาอื่นๆ และเพื่อเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับโลกแห่งความเป็นจริงหรือชีวิตประจำวันของนักเรียน เพื่อเพิ่มความสามารถใช้วิธีการ CPA ในการเรียนรู้ในชั้นเรียน ขั้นตอนแรกในการเรียนรู้ด้วยวิธีการ CPA คือการเรียนรู้ด้วยวัสดุที่เป็นรูปธรรม การใช้วัสดุที่เป็นรูปธรรม จะช่วยให้นักเรียนเพิ่มพูนความสามารถในการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับโลกแห่งความเป็นจริง ขั้นตอนที่สองเป็นภาพ ในขั้นตอนนี้นักเรียนจะได้รับโอกาสให้เป็นตัวแทนของวัสดุจริงโดยใช้ภาพ รูปภาพทำหน้าที่เป็นสะพานเชื่อมระหว่างโลกแห่งความจริง และคณิตศาสตร์เชิงนามธรรม การเรียนรู้ในขั้นตอนนี้ จะช่วยให้นักเรียนเพิ่มพูนความสามารถในการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับวิชาอื่นๆ ของสาขาวิชาอื่นๆ ขั้นตอนการเรียนรู้สุดท้ายเป็นระยะนามธรรมในขั้นตอนนี้นักเรียนจะได้เรียนรู้การใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรม การเรียนรู้ในขั้นตอนนี้จะเปิดโอกาสให้นักเรียนเพิ่มพูนความสามารถในการเชื่อมโยงหัวข้อทางคณิตศาสตร์ ทุกกิจกรรมการเรียนรู้ที่ได้รับการออกแบบภายใต้วิธีการ CPA ที่ส่งเสริมการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ผลการศึกษาพบว่า ความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับประถมศึกษา ที่ได้รับการสอนโดยใช้วิธีการเรียนรู้แบบ CPA นั้นสูงกว่านักเรียนระดับประถมศึกษาที่ได้รับการสอนโดยใช้การเรียนแบบปกติ

Jai Sharma & Doreen Connor (2017) ได้ศึกษาการพัฒนาแบบจำลอง Concrete Pictorial Abstract (CPA) เรื่อง จำนวนเต็มลบ กลุ่มทดลอง จำนวน 7 คน ได้รับการสอนในหัวข้อของจำนวนเต็มลบโดยใช้โมเดล CPA และกลุ่มควบคุมจำนวน 5 คน ได้รับการสอนโดยใช้วิธีการที่ non-CPA เนื้อหาเป็นการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ 4 แบบ ได้แก่ การบวก การลบ การคูณ และ

การหาร จำนวนเต็มลบ โดยใช้เส้นจำนวนในการเป็นตัวแทนที่สำคัญสำหรับการศึกษาครั้งนี้ในระหว่างบทเรียนของการบวกและการลบนักเรียนสามารถทำงานโดยไม่ขอให้ครูตรวจสอบว่างานของตัวเองถูกต้องหรือไม่ นักเรียนสามารถประเมินงานของตัวเองจากการแสดงด้วยภาพ จากภาระงานในบทเรียนแสดงหลักฐานว่านักเรียนใช้เส้นจำนวนได้ถูกต้อง สามารถดำเนินการเพื่อตอบคำถามที่ท้าทายมากขึ้นโดยไม่ต้องใช้ตัวเลข หลักฐานเหล่านี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนเกิดแนวคิดภายในตัวเองบางอย่างอาจเกิดขึ้น และครูสังเกตพฤติกรรมของระดับการมีส่วนร่วมของนักเรียนพบว่าโดยรวมดีขึ้น และจากผลการศึกพบว่านักเรียนที่ได้รับการสอนจำนวนเต็มลบโดยใช้แบบจำลอง CPA มีคะแนนเพิ่มขึ้นหลังการประเมินผลมากขึ้นอย่างมีนัยสำคัญ ($p = 0.025 < 0.05$) มากกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้วิธี non-CPA และยังมีหลักฐานเชิงคุณภาพเพื่อชี้ให้เห็นว่ารูปแบบ CPA มีผลในเชิงบวกต่อความเชื่อมั่นของนักเรียน ความเป็นอิสระและการมีส่วนร่วมของนักเรียน จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า การจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete- Pictorial-Abstract (CPA) สามารถพัฒนาแนวคิดให้ได้เข้าใจถึงแนวคิดทางคณิตศาสตร์จากพื้นฐานที่ถูกต้องหรือมีมโนมติทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้มีทักษะที่ดีพร้อมต่อการนำไปประยุกต์ในระดับสูงได้อย่างมั่นใจ

Vlassis (2004) ศึกษาการเปลี่ยนแปลงมโนมติเกี่ยวกับการดำเนินการลบของจำนวนโดยใช้การสร้างความหมายกับสัญลักษณ์เครื่องหมายลบของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 12 คน โดยการใช้คำถามเกี่ยวกับวิธีการและมโนมติของนักเรียนแต่ละคนเกี่ยวกับสัญลักษณ์เครื่องหมายลบ จากการวิเคราะห์งานเขียนและบทสนทนาซึ่งแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงมโนมติ คือ นักเรียนพยายามปรับความเข้าใจเกี่ยวกับเลขคณิตให้สอดคล้องกับธรรมชาติของจำนวนและกฎพีชคณิตในการดำเนินการลบ และเขาพบว่าการเปลี่ยนแปลงมโนมติจะเกิดขึ้นไม่ได้หากขาดการพัฒนาของการตระหนักถึงมโนมติที่มีอยู่ในกิจกรรมเชิงสัญลักษณ์ของนักเรียน

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงปฏิบัติการ มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ และเพื่อพัฒนามโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่าง เมื่อจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra มีวิธีดำเนินการวิจัยตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ผู้เข้าร่วมวิจัย
2. รูปแบบการวิจัย
3. ข้อมูลพื้นฐานของโรงเรียน
4. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
5. การเก็บรวบรวมข้อมูลในการวิจัย
6. การวิเคราะห์ข้อมูล

1. ผู้เข้าร่วมวิจัย

ผู้เข้าร่วมในการวิจัยในครั้งนี้ได้แก่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562 ของโรงเรียนขยายโอกาสแห่งหนึ่งในจังหวัดกำแพงเพชร จำนวน 7 คน เป็นนักเรียนชายจำนวน 5 คน และนักเรียนหญิงจำนวน 2 คน ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยเลือกกลุ่มเป้าหมายแบบเจาะจง (Purposive Sampling)

2. รูปแบบการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงปฏิบัติการ (Action Research) โดยเน้นการศึกษาด้วยข้อมูลเชิงคุณภาพ มีขั้นตอนการวิจัยประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ที่เป็นวงจรต่อเนื่องกันตามแนวคิดของ Kemmis (1988 อ้างถึงใน สิรินภา กิจเกื้อกูล, 2557, หน้า 149-151) ดังนี้

ขั้นวางแผน (Plan)

1. ผู้วิจัยสำรวจสภาพปัญหาในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ และวิเคราะห์สิ่งที่เกี่ยวข้องกับปัญหา

2. ผู้วิจัยศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เพื่อเป็นแนวทางในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract และการจัดการเรียนการสอนโดยใช้โปรแกรม GeoGebra เพื่อเป็นแนวทางในการแก้ปัญหาการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์

3. ผู้วิจัยวางแผนและสร้างเครื่องมือในการวิจัย ได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra จำนวน 4 แผน แบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ ใบกิจกรรมการเรียนรู้ ผลงานนักเรียน และแบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

4. ผู้วิจัยเตรียมกระบวนการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra

ขั้นปฏิบัติ (Act)

ผู้วิจัยนำแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยผู้วิจัยจะดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการที่ 1 เพื่อนำผลไปปรับปรุงการจัดกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการที่ 2 ทำต่อเนื่องจนครบ 4 วงจร

ขั้นสังเกต (Observe)

ในระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ผู้วิจัยตรวจสอบตนเองขณะปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ และสังเกตพฤติกรรมในการเรียนรู้ของผู้เรียน เพื่อหาข้อบกพร่องและสาเหตุที่เป็นปัญหาของการจัดการเรียนรู้ รวมถึงเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้แสดงความคิดเห็นหรือสะท้อนผลความรู้สึก และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของผู้วิจัย

ขั้นสะท้อนผล (Reflect)

ผู้วิจัยประเมินผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้และแบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยผู้วิจัยสะท้อนผลการปฏิบัติหลังเสร็จสิ้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในแต่ละวงจรปฏิบัติการ เพื่อให้ได้แนวทางในการพัฒนาและปรับปรุงการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการต่อๆไป ให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น จนครบ 4 วงจร แล้วจึงรวบรวมข้อมูลเพื่อสรุปผลในภาพรวมในการวิจัย เรื่อง การวิจัยปฏิบัติการเพื่อพัฒนาแนวทางการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนชนเผ่าในเขตภาคเหนือตอนล่าง ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนของการวิจัยเชิงปฏิบัติการ โดยมีลักษณะทำซ้ำเป็นวงจรทั้งหมด 4 วงจร แบ่งได้ดังนี้

วงจรที่ 1 ประกอบด้วยแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจง

วงจรที่ 2 ประกอบด้วยแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว

วงจรที่ 3 ประกอบด้วยแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์

วงจรที่ 4 ประกอบด้วยแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง

3. ข้อมูลพื้นฐานของโรงเรียน

โรงเรียนที่ผู้วิจัยจัดการเรียนการสอน เป็นโรงเรียนขยายโอกาสขนาดกลาง เปิดสอนระดับชั้นอนุบาล 1 ถึงระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เนื้อที่ประมาณ 25 ไร่ ตั้งอยู่ในอำเภอคลองลาน จังหวัดกำแพงเพชร มีนักเรียนทั้งหมด 220 คน ครูและบุคลากรทางการศึกษาทั้งหมด 18 คน ระยะทางระหว่างโรงเรียนถึงอำเภอประมาณ 20 กิโลเมตร โรงเรียนตั้งอยู่บริเวณพื้นที่ภูเขาโอบล้อม ซึ่งอยู่ห่างจากชุมชนของนักเรียนประมาณ 5 กิโลเมตร นักเรียนร้อยละ 80 เป็นชนเขาเผ่าลาหู่ โรงเรียนแห่งนี้เปิดทำการเรียนการสอนภาคปกติ โดยได้ดำเนินการอย่างเป็นระบบ ทั้งทางด้านการบริหารจัดการ โรงเรียนมีนโยบายที่น้อมนำหลักปรัชญาของเศรษฐกิจพอเพียง โดยกำหนดให้จัดกิจกรรมโครงการให้สอดคล้องกับคำขวัญ พันธกิจ และเป้าประสงค์ของโรงเรียน

วิถีชีวิตของคนในชุมชนของนักเรียน โดยส่วนใหญ่แล้วมีอาชีพรับจ้างทั่วไป ส่วนใหญ่ใช้ชีวิตอยู่บนพื้นฐานของความเรียบง่ายมีการกินอยู่ที่เน้นเพื่อการดำรงชีวิต ลักษณะของอาหารส่วนใหญ่แล้วจะเป็นประเภทผัดแบบง่ายๆ เช่น ผัดผัก ไข่เจียว เป็นส่วนใหญ่ และมีการทำขนมประจำถิ่นบ้างในช่วงเวลาที่สำคัญต่างๆ เช่น ประเพณีปีใหม่ลาหู่ที่ถือว่าเป็นประเพณีการเริ่มต้นสิ่งใหม่ๆ ความสัมพันธ์ภายในครอบครัวของนักเรียนส่วนใหญ่มีปัญหาทางครอบครัว และอาศัยอยู่กับปู่ ย่า ตา และยาย นักเรียนส่วนใหญ่เป็นนักเรียนชนเผ่า ซึ่งพื้นฐานครอบครัวไม่ได้ใช้ภาษาไทยในการสื่อสารในชีวิตประจำวัน ทำให้บางครอบครัวไม่สามารถสื่อสารเป็นภาษาไทยได้ ไม่เข้าใจภาษาและโครงสร้างของภาษา ทำให้อาจเกิดความผิดพลาดในการใช้ภาษาบ่อยครั้ง และเมื่อนักเรียนเกิดความผิดพลาดในการใช้ภาษาทำให้นักเรียนไม่กล้าที่จะสื่อสารกับผู้อื่น และเมื่อเกิดความผิดพลาดในการใช้ภาษาและการสื่อสารแล้วส่งผลให้นักเรียนส่วนใหญ่มีมโนมติที่คลาดเคลื่อนในบางเรื่องด้วย จากสภาพบริบทที่กล่าวมาจะทำให้มองเห็นสิ่งแวดล้อมในการดำรงชีวิตของนักเรียน เป็น

สังคมแห่งวัฒนธรรม สังคมแห่งการหล่อหลอมจากรุ่นสู่รุ่น เมื่อนักเรียนจบการศึกษาออกไปยังคงต้องใช้ชีวิตกับสิ่งต่างๆ เหล่านี้ ซึ่งเป็นวิถีชีวิตที่แตกต่างไปจากสังคมในเมืองใหญ่ๆ

4. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

4.1 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ประกอบด้วย 2 ส่วน ได้แก่ เครื่องมือที่ใช้ในการปฏิบัติการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ และเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล มีรายละเอียดดังนี้

4.1.1 เครื่องมือที่ใช้ปฏิบัติการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 4 แผน รวมใช้เวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ทั้งหมด 10 ชั่วโมง ประกอบด้วย

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจง จำนวน 2 ชั่วโมง

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว จำนวน 3 ชั่วโมง

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ จำนวน 3 ชั่วโมง

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง จำนวน 2 ชั่วโมง

4.1.2 เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

1) ใบกิจกรรมการเรียนรู้
2) ผลงานนักเรียน
3) แบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้
4) แบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์

โดยเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลจะจำแนกตามวัตถุประสงค์ของงานวิจัย รายละเอียดดังตาราง 1

ตาราง 1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างวัตถุประสงค์ของงานวิจัยและเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

จุดประสงค์		เครื่องมือที่ใช้
1. เพื่อศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่าง	✓	แผนการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง
	✓	แบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้
2. เพื่อศึกษามโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่าง เมื่อจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra	✓	ใบกิจกรรมการเรียนรู้
	✓	ผลงานนักเรียน
	✓	แบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์

4.2 การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย เป็นไปตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

4.2.1 แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra

1) ศึกษาหลักสูตรแกนกลาง สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยศึกษารายละเอียดดังต่อไปนี้ มาตรฐาน ตัวชี้วัด โครงสร้างเวลาในการเรียน กระบวนการจัดการเรียนรู้ รวมถึงคู่มือการออกแบบกิจกรรมการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

2) ศึกษาเนื้อหาเรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง จากหนังสือเรียน คู่มือการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ และเว็บไซต์

3) ศึกษาแนวคิด หลักการเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract

4) ศึกษาคู่มือการใช้งานโปรแกรม GeoGebra ในการสร้างสื่อการเรียนการสอนที่เหมาะสมกับผู้เรียน

5) ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับมโนมติทางคณิตศาสตร์ เพื่อนำไปสร้างแผนการจัดกิจรรมการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra

6) ศึกษาภาษา วัฒนธรรม ประเพณี วิถีชีวิตของนักเรียนชนเผ่าลาหู่

7) จัดทำแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง สำหรับนักเรียนชนเผ่าชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 4 แผน โดยใช้เวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ทั้งหมด 10 ชั่วโมง

โดยแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง สำหรับนักเรียนชนเผ่าลาหู่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 แต่ละแผนการจัดการเรียนรู้มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. มาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัด
2. จุดประสงค์การเรียนรู้
3. สาระการเรียนรู้
4. ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ดังนี้
   - 4.1 ขั้นตอน Guided Explication
   - 4.2 ขั้นตอน Exploratory Familiarization
   - 4.3 ขั้นตอน Knowledge classification
   - 4.4 ขั้นตอน Concept Reification
5. สื่อและแหล่งเรียนรู้
6. การวัดและประเมินผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้
7. บันทึกหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

8) นำแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง สำหรับนักเรียนชนเผ่าชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่สร้างขึ้นจำนวน 4 แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ให้อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระตรวจเพื่อพิจารณาความถูกต้อง ความสอดคล้องและความเหมาะสม และนำมาปรับปรุงแก้ไขตามข้อแนะนำ

9) นำแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มาปรับปรุงตามคำแนะนำของอาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน ได้แก่ ผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ศึกษา ผู้เชี่ยวชาญด้านหลักสูตรและการสอน และผู้เชี่ยวชาญด้านวิทยาศาสตร์ศึกษา ตามคุณสมบัติดังต่อไปนี้

9.1) อาจารย์ในระดับอุดมศึกษา สาขาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ จำนวน 1 ท่าน

9.2) อาจารย์ในระดับอุดมศึกษา สาขาหลักสูตรและการสอน คณะศึกษาศาสตร์ จำนวน 1 ท่าน

9.3) อาจารย์ในระดับอุดมศึกษา สาขาวิทยาศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ จำนวน 1 ท่าน (อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ วิทยาศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์)

เพื่อประเมินและให้ข้อเสนอแนะแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ดังต่อไปนี้

1) ด้านจุดประสงค์การเรียนรู้

2) ด้านสาระสำคัญ

3) ด้านการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

4) ด้านสื่อและแหล่งเรียนรู้

5) ด้านการวัดผลและประเมินผล

10) นำแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ได้รับการพิจารณาตรวจสอบความเหมาะสมแล้วมาปรับปรุงตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

10.1) ปรับขั้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ขั้นตอนที่ 2 Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra) ให้มีความชัดเจนมากขึ้น โดยนำตัวอย่างที่ได้จากการใช้งานโปรแกรม GeoGebra ลงในแผนการจัดการเรียนรู้

10.2) ปรับขั้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ขั้นตอนที่ 3 Knowledge classification (การจำแนกความรู้) โดยให้นักเรียนเป็นผู้เขียนภาพที่ได้จากการแยกตัวประกอบลงในใบกิจกรรมการเรียนรู้ จำนวน 2-3 ข้อ

10.3) ปรับเกณฑ์การวัดและประเมินผลให้สอดคล้องกับตัวแปรที่ศึกษา

11) จัดทำแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ฉบับสมบูรณ์ (ตัวอย่างแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แสดงในภาคผนวก ข)

4.2.2 ผลงานนักเรียน

ผลงานนักเรียน เป็นผลงานที่ได้จากการปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ผ่านโปรแกรม GeoGebra (พัฒนาโดย Tim Brzezinski, 2019) ซึ่งเมื่อนักเรียนได้ศึกษา เรียนรู้ ปฏิบัติกิจกรรมด้วยโปรแกรม GeoGebra แล้ว ผู้วิจัยเก็บรวบรวมผลงานของนักเรียน เพื่อเป็นข้อมูลในการสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ โดยผู้วิจัยใช้เกณฑ์การจำแนกมโนมติเป็นเกณฑ์การประเมินผลการเรียนรู้ของนักเรียน

4.2.3 แบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

แบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เพื่อเก็บรวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของผู้วิจัยขณะที่ดำเนินกิจกรรม โดยผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เป็นครูประจำการกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ผู้วิจัยและผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้จะทำการจดบันทึก บรรยายเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนในแต่ละวงจรว่าเป็นอย่างไร มีความเหมาะสมหรือไม่ สามารถช่วยส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ได้หรือไม่อย่างไร และควรแก้ไขปรับปรุงอย่างไร เพื่อเป็นแนวทางในการปรับปรุงแก้ไขแผนการจัดการเรียนรู้ครั้งต่อไป ซึ่งมีขั้นตอนการสร้างดังต่อไปนี้

1) ศึกษาวิธีการสร้างแบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้จากเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีการและหลักการสร้างแบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

2) กำหนดขอบเขตของการสังเกต ได้แก่ การจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัยว่าสามารถส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ได้จริงหรือไม่ อย่างไร โดยพิจารณาจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในแต่ละขั้น การจัดกิจกรรมการเรียนรู้มีปัญหาและอุปสรรคอย่างไร และมีแนวทางการแก้ไขปรับปรุงอย่างไร

3) สร้างแบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

4) นำแบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระตรวจเพื่อพิจารณาความถูกต้อง เหมาะสม และนำมาปรับปรุงแก้ไขตามข้อแนะนำ

5) นำแบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของอาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน ดังข้อ 3.2.1 ข้อ 8)

6) จัดทำแบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ฉบับสมบูรณ์ (ตัวอย่างแบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แสดงในภาคผนวก ค)

4.2.4 ใบกิจกรรมการเรียนรู้

ใบกิจกรรมการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เพื่อใช้ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง สำหรับนักเรียนชนเผ่าลาหู่ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เพื่อเป็นเครื่องมือในการเก็บรวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับมโนมติทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยให้นักเรียนเขียนบันทึกทุกครั้งที่มีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ใบกิจกรรมการเรียนรู้จะเป็นส่วนหนึ่งของแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ซึ่งแต่ละใบกิจกรรมการเรียนรู้มีขั้นตอนการสร้างดังต่อไปนี้

1) ศึกษาค้นคว้าเอกสารและตำราที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาเรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง วิเคราะห์เพื่อออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ในใบกิจกรรมสำหรับส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ และวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงมโนมติทางคณิตศาสตร์

2) สร้างใบกิจกรรมการเรียนรู้ที่มีข้อคำถามสอดคล้องกับมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง

3) สร้างเกณฑ์การวิเคราะห์มโนมติทางคณิตศาสตร์ในใบกิจกรรมการเรียนรู้ตามกรอบแนวคิดของ Haidar AH. (1997 อ้างถึงใน ธัญญารัตน์ จูมแพง, 2554)

4) นำใบกิจกรรมการเรียนรู้และการวิเคราะห์มโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง สำหรับนักเรียนชนเผ่าลาหู่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ให้อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระตรวจเพื่อพิจารณาความถูกต้อง ความเหมาะสม และนำมาปรับปรุงแก้ไขตามข้อแนะนำ

5) นำใบกิจกรรมการเรียนรู้ที่ปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของอาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน ดังข้อ 3.2.1 ข้อ 8)

6) นำใบกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ที่ได้รับการพิจารณาตรวจสอบความเหมาะสมแล้วมาปรับปรุงตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

6.1) ปรับใบกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ ซึ่งอยู่ในขั้นตอนที่ 3 Knowledge classification (การจำแนกความรู้) ของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยให้เพิ่มภาระงานของนักเรียนเกี่ยวกับการเขียนภาพที่ได้จากการแยกตัวประกอบจำนวน 3 ข้อ และปรับลดภาระงานของนักเรียนซึ่งอยู่ในขั้นตอนที่ 4 Concept Reification (การปรับแนวคิด) ของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ที่เกี่ยวกับการเขียนแสดงการแยกตัวประกอบให้เหลือจำนวน 4 ข้อ จากทั้งหมด 6 ข้อ

7) จัดทำใบกิจกรรมการเรียนรู้ฉบับสมบูรณ์ (ตัวอย่างใบกิจกรรมการเรียนรู้แสดงในภาคผนวก ง)

4.2.5 แบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์

แบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น จำนวน 2 ฉบับ เป็นแบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียน เป็นแบบสำรวจคู่ขนาน เพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการเก็บรวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับมโนมติทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนทั้งก่อนและหลังเรียน เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 แบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์เป็นแบบ Two Tier Test จำนวน 12 ข้อ และเนื่องจากบริบทของโรงเรียนซึ่งนักเรียนร้อยละ 80 เป็นชนเผ่าลาหู่ การใช้ภาษาหรือการสื่อสารอาจมีความผิดพลาด ผู้วิจัยจำเป็นต้องทำการสัมภาษณ์รายบุคคล หากพบประเด็นที่นักเรียนตอบไม่ชัดเจน โดยสัมภาษณ์แบบไม่มีโครงสร้าง ผู้วิจัยได้สร้างแบบสัมภาษณ์ขึ้นให้มีความสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ ซึ่งแบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ มีขั้นตอนการสร้างดังนี้

1) ศึกษาวิธีสร้างแบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ จากทฤษฎีและเอกสารที่เกี่ยวข้อง

2) ศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับมโนมติ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองจากเนื้อหาในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และคู่มือครูสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

3) วิเคราะห์มโนมติ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง จากเนื้อหาในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และคู่มือครูสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และจุดประสงค์การเรียนรู้

4) สร้างแบบสำรวจมโนมติ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองทั้งสองฉบับ

5) นำแบบสำรวจมโนมติ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองทั้งสองฉบับ เสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ เพื่อตรวจสอบความถูกต้อง เหมาะสม และนำมาปรับปรุงแก้ไขตามข้อแนะนำ

6) นำแบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ที่ปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของอาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน ดังข้อ 3.2.1 ข้อ 8)

7) นำแบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ที่ได้รับการพิจารณาตรวจสอบความเหมาะสมแล้ว มาปรับปรุงตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ โดยมีรายละเอียดดังนี้

7.1) ปรับข้อคำถามในแบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ ในมโนมติที่ 3 เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสมบูรณ์ ข้อ 7 ให้มีความชัดเจนมากขึ้น

8) จัดทำแบบสำรวจโนมติทางคณิตศาสตร์ฉบับสมบูรณ์ (ตัวอย่างแบบสำรวจโนมติทางคณิตศาสตร์ฉบับสมบูรณ์แสดงในภาคผนวก จ)

5. การเก็บและรวบรวมข้อมูลในการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ มีขั้นตอนในการเก็บรวบรวมข้อมูล ดังรายละเอียดต่อไปนี้

5.1 ผู้วิจัยนำแบบสำรวจโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ผู้วิจัยปรับปรุงและพัฒนาขึ้น ไปสำรวจโนมตินักเรียนล่วงหน้าเป็นระยะเวลา 2 สัปดาห์ ก่อนดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ และทำการสัมภาษณ์นักเรียนรายบุคคลหากพบประเด็นที่นักเรียนตอบในแบบสำรวจโนมติทางคณิตศาสตร์ไม่ชัดเจน โดยการสัมภาษณ์แบบไม่มีโครงสร้าง เพื่อสำรวจโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองก่อนดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

5.2 ผู้วิจัยดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง สำหรับนักเรียนชนเผ่าลาหู่ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ตามรูปแบบของการวิจัยปฏิบัติการ จำนวน 4 วงจรปฏิบัติการ รวมใช้เวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ทั้งหมด 10 ชั่วโมง

5.3 ในระหว่างที่นักเรียนดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้แต่ละกิจกรรม ผู้วิจัยและผู้ร่วมวิจัยสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ โดยทำการบันทึกข้อมูลในแบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ แล้วทำการวิเคราะห์ผลการจัดการเรียนรู้ เพื่อให้ได้ข้อสรุปเกี่ยวกับแนวทางการจัดการกิจกรรมการเรียนรู้ และหาแนวทางในการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้น จากนั้นผู้วิจัยนำผลที่ได้ไปปรับปรุงในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในวงจรถัดไป

5.4 เมื่อจัดกิจกรรมการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ครบ 10 ชั่วโมงแล้ว ให้นักเรียนทำแบบสำรวจโนมติทางคณิตศาสตร์หลังเรียน เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง และและทำการสัมภาษณ์นักเรียนรายบุคคลหากพบประเด็นที่นักเรียนตอบในแบบสำรวจโนมติทางคณิตศาสตร์ไม่ชัดเจน โดยการสัมภาษณ์แบบไม่มีโครงสร้าง เพื่อสำรวจโนมติทางคณิตศาสตร์หลังเรียน

5.5 นำข้อมูลที่ได้จากการเก็บรวบรวมทั้งหมดไปวิเคราะห์ผลต่อไป

6. การวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิเคราะห์ข้อมูลนั้น ผู้วิจัยได้นำข้อมูลจากการเก็บรวบรวมข้อมูลโดยใช้เครื่องมือต่างๆ มาวิเคราะห์ โดยการวิเคราะห์นั้นจะแบ่งออกเป็น 2 ส่วน ตามวัตถุประสงค์ 2 ข้อดังนี้

6.1 วิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่าง

ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์ข้อมูลเมื่อสิ้นสุดกระบวนการในแต่ละวงจรปฏิบัติการ และทำการวิเคราะห์โดยภาพรวมเมื่อเสร็จสิ้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองครบทั้ง 4 แผน รวม 10 ชั่วโมง

6.1.1 ผู้วิจัยรวบรวมข้อมูลจากเครื่องมือ แบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

6.1.2 ผู้วิจัยทำการจัดระเบียบเนื้อหาของข้อมูลตามประเด็นที่ผู้วิจัยต้องการวิเคราะห์ข้อมูล ในประเด็นดังต่อไปนี้

1) การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ได้หรือไม่ อย่างไร

2) ปัญหาหรืออุปสรรคที่ค้นพบจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra

3) แนวทางการปรับปรุงแก้ไขปัญหาสำหรับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ในครั้งต่อไป

โดยประเด็นเหล่านี้จะแสดงถึงความเกี่ยวข้องต่อการปรับปรุงและพัฒนาแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์

6.1.3 ผู้วิจัยทำการวิเคราะห์เชิงเนื้อหา (Content Analysis) โดยนำข้อมูลที่ได้จากผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มาจัดกลุ่มข้อมูลให้อยู่ในหมวดหมู่เดียวกัน เพื่อให้สะดวกต่อการวิเคราะห์และอภิปรายผล

6.1.4 การรายงานผลการวิจัยใน 4 ขั้นตอน ได้แก่

1) ขั้นวางแผน ผู้วิจัยรายงานแผนการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ได้วางแผนไว้ในแต่ละวงจรปฏิบัติการ

2) ขั้นปฏิบัติ ผู้วิจัยรายงานขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ซึ่งมีทั้งหมด 4 ขั้นตอนประกอบด้วย (1) Guided Explication (2) Exploratory Familiarization (3) Knowledge classification (4) Concept Reification

3) ขั้นสังเกต ผู้วิจัยรายงานผลที่ได้จากการจัดหมวดหมู่ของข้อมูล

4) ขั้นสะท้อนผล ผู้วิจัยรายงานการสะท้อนปัญหา อุปสรรค และแนวทางแก้ไขปัญหาของแต่ละขั้นตอนของกระบวนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เพื่อนำไปปรับปรุงแผนการจัดกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ในวงจรต่อไป

6.1.5 ผู้วิจัยตรวจสอบข้อมูลเชิงคุณภาพด้วยวิธีสามเส้า (Triangulation) ด้านการใช้แหล่งข้อมูลมากกว่า 1 แหล่ง (Resource Triangulation) และการเข้าไปมีส่วนร่วมในบริบทเป็นเวลานาน (Prolonged Engagement) แหล่งข้อมูลที่ได้มาจากผู้วิจัยและผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ นำมาพิจารณาถึงความสอดคล้องของข้อมูลว่าเป็นไปในทิศทางเดียวกันหรือไม่ แล้วสรุปแนวทางการจัดการเรียนรู้ที่เหมาะสมกับนักเรียน

6.2 วิเคราะห์มโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่างเมื่อจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra

ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์ข้อมูลจากผลงานนักเรียน ใบกิจกรรมการเรียนรู้ แบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจะทำการวิเคราะห์เมื่อสิ้นสุดกระบวนการในแต่ละวงจรปฏิบัติการ และทำการวิเคราะห์โดยภาพรวมเมื่อเสร็จสิ้นการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ครบทั้ง 4 วงจรปฏิบัติการ รวม 10 ชั่วโมง จากนั้นนำผลที่ได้จากการวิเคราะห์มาพิจารณาตรวจสอบถึงความสอดคล้องของข้อมูล โดยมีขั้นตอนการวิเคราะห์ดังนี้

6.2.1 รวบรวมข้อมูลจากผลงานนักเรียน ใบกิจกรรมการเรียนรู้ และแบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ มีจัดระเบียบของข้อมูล การให้รหัสข้อมูล แล้วจัดกลุ่มข้อมูลตามมโนมติทางคณิตศาสตร์ ตามแนวคิดของ Haidar AH. (1997 อ้างถึงใน ธัญญารัตน์ จูมแพง, 2554) 5 รูปแบบ

6.2.2 ผู้วิจัยทำการวิเคราะห์เชิงเนื้อหา (Content Analysis) โดยผู้วิจัยนำข้อมูลจากคำตอบในผลงานนักเรียน ใบกิจกรรมการเรียนรู้ และแบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ มาจัดกลุ่มข้อมูลให้อยู่ในหมวดหมู่เดียวกันซึ่งแบ่งออกเป็น 5 รูปแบบ ได้แก่ มโนมติทางคณิตศาสตร์ หรือ SU มโนมติทางคณิตศาสตร์แบบไม่สมบูรณ์ หรือ PU มโนมติทางคณิตศาสตร์บางส่วนและ

มโนมติคลาดเคลื่อนบางส่วน หรือ PU&MU มโนมติทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อน หรือ MU ไม่เข้าใจมโนมติทางคณิตศาสตร์ หรือ NU ตามลำดับ แสดงตัวอย่างของการวิเคราะห์ข้อมูลในแต่ละมโนมติได้ ดังตาราง 2 – 5

ตาราง 2 แสดงตัวอย่างการวิเคราะห์ข้อมูลในมโนมติที่ 1 เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติของการแจกแจง

ระดับความเข้าใจในมโนมติ	รหัส	ตัวอย่างลักษณะการตอบ	ตัวอย่างการวิเคราะห์ข้อมูล
มโนมติทางคณิตศาสตร์ (Sound Understanding)	SU	$6x^2y-21xy^2$ $=3(2x^2y-7xy^2)$ $=3x(2xy-7y^2)$ $=3xy(2x-7y)$	-ใช้สมบัติของการแจกแจงได้ถูกต้อง -ใช้สมบัติของเลขยกกำลังได้ถูกต้อง
มโนมติทางคณิตศาสตร์แบบไม่สมบูรณ์ (Partial Understanding)	PU	$6x^2y-21xy^2$ $=x(6xy-21y^2)$ $=xy(6x-21y)$	-ใช้สมบัติของเลขยกกำลังได้ถูกต้อง
มโนมติทางคณิตศาสตร์บางส่วนและมโนมติคลาดเคลื่อนบางส่วน (Partial Understanding with Specific Misconception)	PU&MU	$6x^2y-21xy^2$ $=x(6xy-21y^2)$ $=xy(6x-21y)$ $=6xy(x-21y)$	-ใช้สมบัติของเลขยกกำลังได้ถูกต้อง -ใช้สมบัติของการแจกแจงไม่ถูกต้อง
มโนมติทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อน (Misconception)	MU	$6x^2y-21xy^2$ $=6x^2y(-7xy^2)$	-ใช้สมบัติของเลขยกกำลังไม่ถูกต้อง -ใช้สมบัติของการแจกแจงไม่ถูกต้อง
ไม่เข้าใจมโนมติทางคณิตศาสตร์ (No Understanding)	NU	$6x^2y-21xy^2$ $=6x^2y-21xy^2$	ไม่ตอบ หรือคำตอบไม่ถูก อธิบายวิธีคิดไม่ได้

ตาราง 3 แสดงตัวอย่างการวิเคราะห์ข้อมูลในมโนมติที่ 2 เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว

ระดับความเข้าใจในมโนมติ	รหัส	ตัวอย่างลักษณะการตอบ	ตัวอย่างการวิเคราะห์ข้อมูล
มโนมติทางคณิตศาสตร์ (Sound Understanding)	SU	$x^2-4x-12$ เนื่องจาก $(-6)(2)=-12$ $(-6)+2=-4$ ดังนั้น $x^2-4x-12$ $=(x-6)(x+2)$	-บวกและคูณจำนวนเต็มได้ถูกต้อง -แยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวได้ถูกต้อง
มโนมติทางคณิตศาสตร์แบบไม่สมบูรณ์ (Partial Understanding)	PU	$x^2-4x-12$ $=(x-6)(x+2)$	-แยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวได้ถูกต้องแต่ไม่แสดงรายละเอียดของวิธีการคิด
มโนมติทางคณิตศาสตร์บางส่วนและมโนมติคลาดเคลื่อนบางส่วน (Partial Understanding with Specific Misconception)	PU&MU	$x^2-4x-12$ เนื่องจาก $(-6)(2)=-12$ $(-6)+2=-4$ ดังนั้น $x^2-4x-12$ $=(x+6)(x+2)$	-บวกและคูณจำนวนเต็มได้ถูกต้อง -แยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวไม่ถูกต้อง
มโนมติทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อน (Misconception)	MU	$x^2-4x-12$ $=(x-4)(x-12)$	-แยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวไม่ถูกต้อง
ไม่เข้าใจมโนมติทางคณิตศาสตร์ (No Understanding)	NU	$x^2-4x-12$ $=x^2-4x-12$	ไม่ตอบ หรือคำตอบไม่ถูก อธิบายวิธีคิดไม่ได้

ตาราง 4 แสดงตัวอย่างการวิเคราะห์ข้อมูลในมโนมติที่ 3 เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสมบูรณ์

ระดับความเข้าใจในมโนมติ	รหัส	ตัวอย่างลักษณะการตอบ	ตัวอย่างการวิเคราะห์ข้อมูล
มโนมติทางคณิตศาสตร์ (Sound Understanding)	SU	$4x^2-12x+9$ $=2^2x^2-12x+3^2$ $=(2x)^2-2(2x)(3)+3^2$ $=(2x-3)^2$	-ใช้สมบัติของเลขยกกำลังได้ถูกต้อง -แยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสมบูรณ์ได้ถูกต้อง
มโนมติทางคณิตศาสตร์แบบไม่สมบูรณ์ (Partial Understanding)	PU	$4x^2-12x+9$ $=2^2x^2-12x+3^2$ $=(2x)^2-2(2x)(3)+3^2$	-ใช้สมบัติของเลขยกกำลังได้ถูกต้อง
มโนมติทางคณิตศาสตร์บางส่วนและมโนมติคลาดเคลื่อนบางส่วน (Partial Understanding with Specific Misconception)	PU&MU	$4x^2-12x+9$ $=2^2x^2-12x+3^2$ $=(2x)^2+2(2x)(3)+3^2$ $=(2x+3)^2$	-ใช้สมบัติของเลขยกกำลังได้ถูกต้อง -แยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสมบูรณ์ไม่ถูกต้อง
มโนมติทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อน (Misconception)	MU	$4x^2-12x+9$ $=2x^2-12x+3^2$ $=2x^2-2(2x)(3)+3^2$ $=(2x+3)^2$	-ใช้สมบัติของเลขยกกำลังไม่ถูกต้อง -แยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสมบูรณ์ไม่ถูกต้อง
ไม่เข้าใจมโนมติทางคณิตศาสตร์ (No Understanding)	NU	$4x^2-12x+9$ $=4x^2-12x+9$	ไม่ตอบ หรือคำตอบไม่ถูก อธิบายวิธีคิดไม่ได้

ตาราง 5 แสดงตัวอย่างการวิเคราะห์ข้อมูลในมโนมติที่ 4 เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง

ระดับความเข้าใจในมโนมติ	รหัส	ตัวอย่างลักษณะการตอบ	ตัวอย่างการวิเคราะห์ข้อมูล
มโนมติทางคณิตศาสตร์ (Sound Understanding)	SU	$36x^2-49$ $=6^2x^2-7^2$ $=(6x)^2-7^2$ $=(6x+7)(6x-7)$	-ใช้สมบัติของเลขยกกำลังได้ถูกต้อง -แยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นผลต่างของกำลังสองได้ถูกต้อง
มโนมติทางคณิตศาสตร์แบบไม่สมบูรณ์ (Partial Understanding)	PU	$36x^2-49$ $=6^2x^2-7^2$ $=(6x)^2-7^2$	-ใช้สมบัติของเลขยกกำลังได้ถูกต้อง
มโนมติทางคณิตศาสตร์บางส่วนและมโนมติคลาดเคลื่อนบางส่วน (Partial Understanding with Specific Misconception)	PU&MU	$36x^2-49$ $=6^2x^2-7^2$ $=(6x)^2-7^2$ $=(6x-7)(6x-7)$	-ใช้สมบัติของเลขยกกำลังได้ถูกต้อง -แยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นผลต่างของกกำลังสองไม่ถูกต้อง
มโนมติทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อน (Misconception)	MU	$36x^2-49$ $=6x^2-7^2$ $=(6x-7)(6x-7)$	-ใช้สมบัติของเลขยกกำลังไม่ได้ถูกต้อง -แยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นผลต่างของกกำลังสองไม่ถูกต้อง
ไม่เข้าใจมโนมติทางคณิตศาสตร์ (No Understanding)	NU	$36x^2-49$ $=36x^2-49$	ไม่ตอบ หรือคำตอบไม่ถูก อธิบายวิธีคิดไม่ได้

6.2.3 ผู้วิจัยตรวจสอบข้อมูลเชิงคุณภาพด้วยวิธีสามเส้า (Triangulation) ด้านการใช้เครื่องมือมากกว่า 1 ชนิด (Methed Triangulation) การเข้าไปมีส่วนร่วมในบริบทเป็นเวลานาน (Prolonged Engagement) และการแสดงให้เห็นร่องรอยการวิเคราะห์ข้อมูล (Audit Trail) ข้อมูลที่ได้จากผลงานนักเรียน ใบกิจกรรมการเรียนรู้ และแบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ นำมาพิจารณาถึงความสอดคล้องของข้อมูลว่าเป็นไปในทิศทางเดียวกันหรือไม่

ผู้วิจัยได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างวัตถุประสงค์ของงานวิจัย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย และการวิเคราะห์ข้อมูลการวิจัย รายละเอียดดังตาราง 6

ตาราง 6 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างวัตถุประสงค์ของงานวิจัย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย และการวิเคราะห์ข้อมูลการวิจัย

จุดประสงค์	เครื่องมือที่ใช้	การวิเคราะห์ข้อมูล
1. เพื่อศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่าง	✓ แผนการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ✓ แบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้	✓ Content Analysis ✓ Triangulation (Resource Triangulation & Prolonged Engagement) - ผู้วิจัย - ครูผู้สอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียน
2. เพื่อศึกษามโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่าง เมื่อจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra	✓ ใบกิจกรรมการเรียนรู้ ✓ ผลงานนักเรียน ✓ แบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์	✓ Content Analysis ✓ Triangulation (Method Triangulation & Prolonged Engagement) ✓ Audit Trial

บทที่ 4

ผลการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ใช้รูปแบบการวิจัยเชิงปฏิบัติการ ซึ่งเป็นการวิจัยตามรูปแบบของ Kemmis and Mc Taggart (2008 อ้างถึงใน สิรินภา กิจเกื้อกูล, 2557) เพื่อศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง สำหรับนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่าง ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยผู้วิจัยได้นำเสนอผลการวิจัยตามวัตถุประสงค์ของงานวิจัย 2 ตอน ได้แก่

ตอนที่ 1 แนวทางการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่าง

ตอนที่ 2 มโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่าง เมื่อจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra

ตอนที่ 1 แนวทางการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่าง

1. ผลการดำเนินการจัดการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการที่ 1, 2, 3 และ 4

การดำเนินการวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนของการวิจัยเชิงปฏิบัติการในการศึกษาผลการศึกษาแนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ซึ่งประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นวางแผน ผู้วิจัยรายงานแผนการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ได้วางแผนไว้ในแต่ละวงจรปฏิบัติการ

ขั้นปฏิบัติ ผู้วิจัยรายงานขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ซึ่งมีทั้งหมด 4 ขั้นตอน ประกอบด้วย ขั้นตอน Guided Explication (การแนะนำ ชี้แจง) ขั้นตอน Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra) ขั้นตอน Knowledge classification (การจำแนกความรู้) และขั้นตอน Concept Reification (การปรับแนวคิด)

ขั้นสังเกต ผู้วิจัยและผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ช่วยกันสังเกตและทำการจดบันทึกสังเกตพฤติกรรมที่เกิดขึ้นระหว่างการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน

ขั้นสะท้อนผล ผู้วิจัยรายงานการสะท้อนปัญหา อุปสรรค และแนวทางแก้ไขปัญหาของแต่ละขั้นตอนของกระบวนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เพื่อนำไปปรับปรุงแผนการจัดกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ในวงจรต่อไปโดยจะมีลักษณะเป็นการปฏิบัติการซ้ำเป็นวงจรทั้งหมด 4 วงจร

1.1 **วงจรปฏิบัติการที่** 1

การดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการที่ 1 มีลักษณะการดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นวางแผน (Plan)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาสภาพปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ โดยพบว่านักเรียนยังขาดความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหาคณิตศาสตร์ และมีมโนมติที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์อีกด้วย เมื่อนักเรียนมีมโนมติที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ จะมีผลกระทบต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก โดยอาจจะทำให้นักเรียนนำความรู้ไปใช้อย่างไม่ถูกต้อง หรือไม่สามารถนำความรู้ไปใช้ได้ รวมทั้งอาจทำให้ความรู้พื้นฐานไม่ดีพอที่จะเรียนรู้ในระดับที่สูงขึ้นไป และอาจจะทำให้ประสิทธิภาพด้านทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนลดลง (เอื้อมพร หลินเจริญ, สิริศักดิ์ อาจวิชัย และภีรภา จันทร์อินทร์, 2552) จากการสัมภาษณ์นักเรียนเกี่ยวกับการเรียนคณิตศาสตร์พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มองว่าคณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่ยาก มีความซับซ้อน ถ้าในระดับสูงขึ้นไปจะมีความเป็นนามธรรมค่อนข้างมาก ส่วนอีกสาเหตุหนึ่งคือ ครูขาดทักษะการเรียนรู้ที่ต่อเนื่องเพื่อปรับปรุงพัฒนาการเรียนการสอน (กระทรวงศึกษาธิการ, 2559, หน้า 111) ซึ่งอาจจะไม่ได้ส่งเสริมให้นักเรียนได้เชื่อมโยงแนวคิดและกระบวนการคิดต่างๆ ครูมุ่งให้นักเรียนท่องจำสูตร จำกฎหรือวิธีการต่างๆ ที่มีผู้อื่นกำหนด ไม่ได้ใช้สื่อการสอนที่หลากหลายเป็นรูปธรรม ทำให้นักเรียนเกิดมโนมติที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ได้

จากการศึกษาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ผู้วิจัยพบว่าการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract เป็นวิธีการสอนสำหรับการพัฒนามโนมติทางคณิตศาสตร์เบื้องต้น โดยการสร้างความเชื่อมโยงผ่านสื่อการสอนที่หลากหลายที่เป็นรูปธรรม เช่น เกม วัตถุ หรือสิ่งของในชีวิตประจำวัน ทำให้นักเรียนได้สัมผัสกับคณิตศาสตร์ผ่านสิ่งของที่เป็นรูปธรรม มองภาพรวมออกได้ง่าย เป็นการสร้างแรงจูงใจให้กับนักเรียน และมองว่าคณิตศาสตร์เป็นเรื่องใกล้ตัว เป็นวิธีการสอนที่ทำให้นักเรียนได้มาซึ่งมโนมติที่ถูกต้องทางคณิตศาสตร์ และสามารถนำความรู้ที่ได้ไปประยุกต์ใช้และนำไปแก้ปัญหาต่อไปได้ และในระดับที่สูงขึ้นไปเนื้อหาทางคณิตศาสตร์เป็นเนื้อหาที่มีความซับซ้อน เป็นนามธรรม ยากต่อการทำความเข้าใจ การจัดการเรียนรู้ผ่านสิ่งของใน

ชีวิตประจำวัน หรือเกม อาจยังไม่เพียงพอต่อการทำความเข้าใจมโนมติทางคณิตศาสตร์ในเรื่องนั้นๆ ในการสร้างความเข้าใจให้กระจ่างชัดเพื่อให้นักเรียนสามารถแลเห็นมโนมติทางคณิตศาสตร์ที่เป็นรูปธรรมมากขึ้น ผู้วิจัยจึงได้นำโปรแกรม GeoGebra ซึ่งเป็นเทคโนโลยีแบบพลวัตที่ช่วยให้การสอนคณิตศาสตร์เป็นรูปธรรม ช่วยให้ผู้เรียนมีโอกาสเรียนคณิตศาสตร์โดยการสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง และเป็นการเรียนโดยเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ เป็นสื่อที่ช่วยให้ผู้เรียนพัฒนาทักษะของการนึกภาพ หรือภาพเคลื่อนไหว กระบวนการแก้ปัญหา ถือว่าเป็นตัวอธิบายเพื่อสร้างความเข้าใจที่กระจ่างชัดให้กับผู้เรียนได้เป็นอย่างดี ผู้วิจัยจึงได้ออกแบบและวางแผนการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง สำหรับนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่าง ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ทั้งหมด 4 แผนการจัดการเรียนรู้ จำนวน 10 ชั่วโมง ซึ่งแบ่งกระบวนการจัดการเรียนรู้เป็นขั้นตอน 4 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นตอน Guided Explication (การแนะนำชี้แจง) ขั้นตอน Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra) ขั้นตอน Knowledge classification (การจำแนกความรู้) และขั้นตอน Concept Reification (การปรับแนวคิด)

ขั้นที่ 2 ขั้นปฏิบัติ (Act)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยได้ดำเนินการจัดการเรียนรู้ ตามแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจง จำนวน 2 ชั่วโมง ดำเนินกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ตามขั้นตอน 4 ขั้นตอน โดยในแต่ละขั้นตอนมีรายละเอียดในการดำเนินการ ดังนี้

1) Guided Explication (การแนะนำ ชี้แจง)

ผู้วิจัยเริ่มสนทนากับนักเรียนถึงงานปีใหม่ที่กำลังจะมาถึง โดยพูดคุยถึงงานปีใหม่ในชนเผ่าของนักเรียนว่ามีการจัดงานอย่างไรบ้าง และซักถามนักเรียนว่ามีการจุดพลุหรือไม่ ซึ่งผู้วิจัยถามคำถามกระตุ้นนักเรียนว่า นักเรียนคิดว่าพลุที่จุดในงานวันปีใหม่ เราสามารถหาความสูงของพลุได้หรือไม่ ถ้าหาได้สามารถทำได้อย่างไร ผู้วิจัยได้ตั้งคำถามเพื่อจุดประเด็นสงสัยให้กับนักเรียน และอธิบายถึงการนำสมการพหุนามมาใช้ในการหาความสูงของพลุ ในช่วงนี้จะทำให้นักเรียนได้ตระหนักถึงความสำคัญของคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยงคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวันของนักเรียน ก่อนที่นักเรียนจะหาความสูงของพลุนั้น ผู้วิจัยได้ทบทวนสมบัติการแจกแจงของจำนวนเต็มและความหมายของตัวประกอบร่วมของจำนวนนับ และทบทวนความรู้ในเรื่องเอกนาม ในช่วงแรกนักเรียนจะสามารถสรุปสมบัติการแจกแจงของจำนวนนับ ซึ่งจำเป็นต้องนำมาเชื่อมโยงกับการแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจง จากนั้นผู้วิจัยนำเสนอโปรแกรม GeoGebra ผู้วิจัยอธิบายเกี่ยวกับเครื่องมือ ขั้นตอนการใช้งานโปรแกรม GeoGebra โดยแนะนำโปรแกรมว่า

เป็นโปรแกรมสำหรับการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เป็นพลวัต สามารถใช้จัดการเรียนการสอนในทุกสาระของคณิตศาสตร์ สำหรับการแยกตัวประกอบของพหุนามนั้น ผู้วิจัยจะนำโปรแกรม GeoGebra มาช่วยในการจัดการเรียนการสอนเพื่อให้นักเรียนเข้าใจในเนื้อหามากขึ้น

2) Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra)

ผู้วิจัยให้นักเรียนจับคู่กับเพื่อนลองใช้งานโปรแกรม GeoGebra โดยให้นักเรียนสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากจากชิ้นส่วนที่กำหนดให้ แล้วหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่นักเรียนสร้างขึ้นมาและร่วมกันอภิปรายถึงพื้นที่ที่ได้จากรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหลายๆ รูป จากนั้นเมื่อครูกำหนดโจทย์ให้นักเรียนฝึกการหาผลคูณของพหุนามด้วยโปรแกรม GeoGebra และให้นักเรียนนำชิ้นงานที่ได้จากการฝึกการคูณมาแลกเปลี่ยนเรียนรู้กันในชั้นเรียน เป็นการส่งเสริมให้นักเรียนเห็นถึงวิธีการแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจงของเพื่อนในชั้นเรียน และเห็นแนวคิดของเพื่อนๆ ที่แตกต่างกัน และส่งเสริมให้มีการแสดงความคิดเห็นในชั้นเรียน

3) Knowledge classification (การจำแนกความรู้)

ผู้วิจัยให้นักเรียนทำใบกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1.1 ตอนที่ 1 โดยให้นักเรียนเขียนภาพการหาผลคูณลงในใบงาน เพื่อสำรวจว่านักเรียนได้เชื่อมโยงแนวคิดในขั้นตอนที่ 2 มาเป็นภาพในขั้นตอนที่ 3 จากการเขียนภาพการหาผลคูณ ผู้วิจัยได้ถามกระตุ้นความคิดของนักเรียนถึงวิธีการแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจง ถ้าหากไม่เขียนภาพจะมีวิธีแยกตัวประกอบได้อย่างไร ในขั้นตอนนี้นักเรียนจะได้พูดคุย อภิปรายกันในชั้นเรียน และพบข้อสังเกตเกี่ยวกับวิธีการแยกตัวประกอบซึ่งสามารถหาตัวประกอบร่วมของพหุนามได้

4) Concept Reification (การปรับแนวคิด)

ผู้วิจัยให้นักเรียนทำใบกิจกรรมการเรียนรู้ตอนที่ 2 โดยให้นักเรียนเขียนภาพการหาผลคูณลงในใบงาน เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนในการเชื่อมโยงแนวคิดมาเป็นแนวคิดเชิงนามธรรม และเมื่อทำใบงานกิจกรรมการเรียนรู้เสร็จแล้ว ผู้วิจัยให้นักเรียนแต่ละคู่หาความสูงของพลุในวันปีใหม่ที่ได้กล่าวไปในชั่วโมงที่ 1 โดยผู้วิจัยเชื่อมโยงความรู้เรื่องพหุนามดีกรีสองว่าสามารถนำไปใช้ประโยชน์ในชีวิตประจำวันได้ ดังเช่นกิจกรรมที่นักเรียนได้ทำไป เพื่อให้นักเรียนเห็นถึงการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้

ขั้นที่ 3 ขั้นสังเกต (Observe)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยได้สังเกตการเปลี่ยนแปลงต่างๆ ที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนระหว่างการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra โดยผู้วิจัยและผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ช่วยกันสังเกตและจดบันทึกลงในแบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยผู้วิจัยได้ผลดังต่อไปนี้

1) Guided Explication (การแนะนำ ชี้แจง)

ในขั้นตอนนี้ผู้วิจัยเริ่มสนทนากับนักเรียนถึงงานปีใหม่ที่กำลังจะมาถึง โดยพูดคุยถึงงานปีใหม่ในชนเผ่าของนักเรียนว่ามีการจัดงานอย่างไรบ้าง สังเกตได้ว่า เมื่อพูดถึงงานปีใหม่ของชนเผ่านักเรียนมีความตื่นเต้น อยากให้ถึงงานปีใหม่เร็วๆ สังเกตได้จากการแสดงออกทางสีหน้า สนใจในการตอบคำถาม โดยนักเรียนได้เล่าถึงประเพณีปีใหม่ของตนเองว่ามีการจัดอย่างไรบ้าง จากนั้นผู้วิจัยซักถามนักเรียนว่ามีการจุดพลุหรือไม่ นักเรียนตอบว่า "มีการจุดพลุด้วยค่ะ ผู้ใหญ่บ้านกับพวกผู้ใหญ่หลายคนจะเป็นคนไปจุดพลุที่โบสถ์ค่ะ" (นักเรียน, 17 กุมภาพันธ์ 2563) ผู้วิจัยจึงสอบถามนักเรียนต่อว่า นักเรียนคิดว่าพลุที่จุดในงานวันปีใหม่ มีความเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์อย่างไร "รูปแบบของพลุที่กระจายออกครับ" (นักเรียน, 17 กุมภาพันธ์ 2563) "การสะท้อนของพลุที่อยู่ในน้ำครับ" (นักเรียน, 17 กุมภาพันธ์ 2563) ผู้วิจัยได้ถามคำถามเพื่อเชื่อมโยงถึงเรื่องพหุนามโดยถามต่อว่า นักเรียนคิดว่าพลุที่จุดมีความสูงเท่าไหร่ หาได้หรือไม่ ซึ่งนักเรียนตอบว่า "น่าจะหาได้นะคะ อาจต้องคำนวณ" (นักเรียน, 17 กุมภาพันธ์ 2563) "คิดว่าหาไม่ได้ครับ จะวัดความสูงได้ยังไงล่ะ" (นักเรียน, 17 กุมภาพันธ์ 2563) เมื่อผู้วิจัยถามคำถามกระตุ้นความคิดของนักเรียนแล้วได้อธิบายต่อว่า การหาความสูงของพลุนั้น เราสามารถนำความรู้เกี่ยวกับพหุนามมาใช้ในการหาความสูงของพลุได้ นักเรียนถามว่า "จะหาได้ยังไงคะครู" (นักเรียน, 17 กุมภาพันธ์ 2563) เมื่อนักเรียนเกิดประเด็นสงสัยในการหาความสูงของพลุ สังเกตได้ว่านักเรียนพยายามที่จะค้นหาวิธีการหาความสูงของพลุจากในหนังสือเรียน และได้พูดคุยกับเพื่อนว่าจะหาได้อย่างไร โดยสังเกตจากการพฤติกรรมการเปิดหนังสือเรียน และการพูดคุยกับเพื่อนข้างๆ ผู้วิจัยสนทนากับนักเรียนต่อว่าเมื่อจบชั่วโมงเราจะมาหาความสูงของพลุกัน จากนั้นผู้วิจัยทบทวนสมบัติการแจกแจงของจำนวนเต็มและความหมายของตัวประกอบร่วมของจำนวนนับ และทบทวนความรู้ในเรื่องเอกนาม ในช่วงนี้นักเรียนให้ความสนใจไม่มากนัก สังเกตจากพฤติกรรมการเหม่อลอยและการตอบคำถาม แต่เมื่อถึงช่วงที่ผู้วิจัยนำเสนอและแนะนำโปรแกรม GeoGebra พบว่า นักเรียนมีความสนใจ กระตือรือร้นซักถามเกี่ยวกับโปรแกรม และอยากลองใช้งานโปรแกรม ซึ่งนำไปสู่ความสนใจในการเรียนรู้ในขั้นตอนต่อๆ ไป

2) Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยให้นักเรียนจับคู่กับเพื่อนลองใช้งานโปรแกรม GeoGebra โดยให้นักเรียนสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากจากชิ้นส่วนของรูปสี่เหลี่ยมขนาดต่างๆ ตามเงื่อนไข แล้วให้นักเรียนหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่นักเรียนสร้างขึ้นมา ดังภาพ 3 ผู้วิจัยสังเกตว่า นักเรียนเริ่มต้นลงมือปฏิบัติด้วยตนเองได้ อาจจะมีการพูดคุยเพื่อปรึกษาคู่ของตนเอง และมีบางส่วนมียกมือถามเพื่อยืนยันในคำตอบของตนเองในประเด็นที่ว่า "ครูครับเขียนอย่างนี้ไหมครับ" (นักเรียน, 17 กุมภาพันธ์

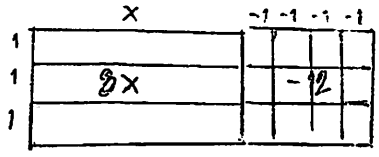
2563) จากนั้นครูได้กำหนดโจทย์เพื่อให้นักเรียนฝึกการหาผลคูณของพหุนามด้วยโปรแกรม GeoGebra ดังภาพที่ 3 เพื่อให้นักเรียนเข้าใจถึงวิธีการแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจง และเมื่อนำเสนอชิ้นงาน เพื่อมาแลกเปลี่ยนเรียนรู้กันในชั้นเรียนโดยผู้วิจัยได้เห็นว่าการแลกเปลี่ยนเรียนรู้เป็นการแบ่งปันข้อมูลของแต่ละคู่เป็นการนำเสนอข้อมูลของตนเองและถ่ายทอดให้เพื่อนๆ ได้รู้ว่าการแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจงอาจจะได้ภาพที่แตกต่างกัน สังเกตได้จากการที่นักเรียนถามว่า "ครูครับทำไมของคู่นี้ได้รูปไม่เหมือนของผมครับ" (นักเรียน, 17 กุมภาพันธ์ 2563) และเป็นการส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักการยอมรับฟังความคิดเห็นของคนอื่นมากขึ้น

ภาพ 3 แสดงการสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยใช้โปรแกรม GeoGebra

3) Knowledge classification (การจำแนกความรู้)

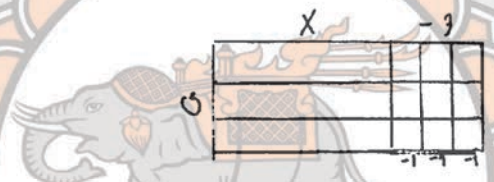
ในขั้นนี้ผู้วิจัยให้นักเรียนทำใบกิจกรรมการเรียนรู้ตอนที่ 1 ซึ่งให้นักเรียนเขียนภาพการหาผลคูณของพหุนาม เพื่อสำรวจว่านักเรียนสามารถเชื่อมโยงแนวคิดในขั้นตอนที่ 2 มาสู่ขั้นตอนที่ 3 ผู้วิจัยได้ถามกระตุ้นความคิดของนักเรียนถึงวิธีการแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจงว่า นักเรียนจะแยกตัวประกอบของพหุนามได้อย่างไร หากไม่วาดภาพ นักเรียนตอบว่า "ดูที่ตัวคูณที่มีร่วมกันค่ะ" (นักเรียน, 18 กุมภาพันธ์ 2563) ในช่วงนี้ ผู้วิจัยสังเกตได้ว่า นักเรียนสามารถเชื่อมโยงแนวคิดในขั้นตอนที่ 2 มาสู่ขั้นตอนที่ 3 ได้ ซึ่งนักเรียนได้เกิดความคิดในตัวเองเกี่ยวกับการหาตัวคูณที่มีร่วมกันของพจน์ในพหุนาม จากนั้นผู้วิจัยและนักเรียนพูดคุย อภิปรายจน

พบข้อสังเกตเกี่ยวกับวิธีการแยกตัวประกอบโดยใช้สมบัติการแจกแจง ซึ่งสามารถหาได้จากการหาตัวประกอบร่วมของพหุนาม ดังภาพ 4 และ 5

โจทย์	ภาพ	คำตอบที่ได้
1. $3(x-4)$		$3x-12$

ภาพ 4 แสดงการเขียนภาพการหาผลคูณของพหุนาม

3. $3x-9$



$3(X-3)$

ภาพ 5 แสดงการเขียนการแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้สมบัติของการแจกแจง

4) Concept Reification (การปรับแนวคิด)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยให้นักเรียนทำใบกิจกรรมการเรียนรู้ตอนที่ 2 โดยให้นักเรียนแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจง เพื่อสำรวจความเข้าใจของนักเรียนในการเชื่อมโยงแนวคิดมาเป็นแนวคิดเชิงนามธรรม ผู้วิจัยสังเกตได้ว่า นักเรียนส่วนใหญ่สามารถแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจงได้ แต่มีนักเรียนบางคนยังไม่มั่นใจในคำตอบ มักจะยกมือถามผู้วิจัยว่า "ทำแบบนี้ใช่ไหมครับ" (นักเรียน, 18 กุมภาพันธ์ 2563) จากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนแต่ละคู่หาความสูงของพลุในวันปีใหม่ที่ได้กล่าวไปในต้นชั่วโมง โดยนำความรู้เกี่ยวกับพหุนามมาใช้ เพื่อเชื่อมโยงความรู้ให้นักเรียนได้ตะหนักถึงคุณค่าของวิชาคณิตศาสตร์ ว่าสามารถนำไปใช้ประโยชน์ในชีวิตประจำวันได้ ดังภาพ 6 , 7 และ 8

1. $7x-14$

วิธีทำ $7x-14$

$7x = 7 \times x$

$14 = 7 \times 2$

ดังนั้น $7x-14 = 7(x-2)$

ตอบ $7x-14 = 7(x-2)$

ภาพ 6 แสดงการแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจง
ของนักเรียนที่สามารถเชื่อมโยงแนวคิดเชิงนามธรรมได้

4. $ab^2-cb^2-6a+6c$

วิธีทำ $(ab^2-cb^2)+(-6a+6c)$

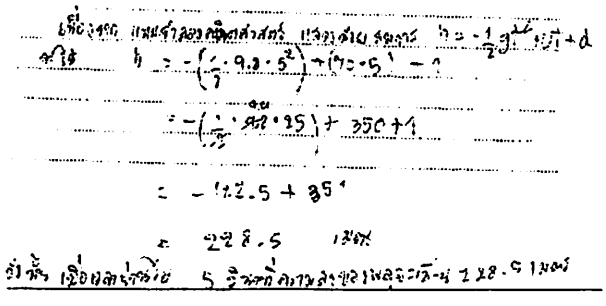
$=(ab^2-cb^2)-(6a-6c)$

$=b^2(a-c)-6(a-c)$

$=(a-c)(b^2-6)$

ตอบ $(ab^2-cb^2)(-6a+6c)=(a-c)(b^2-6)$

ภาพ 7 แสดงการแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจง
ของนักเรียนที่สามารถเชื่อมโยงแนวคิดเชิงนามธรรมได้



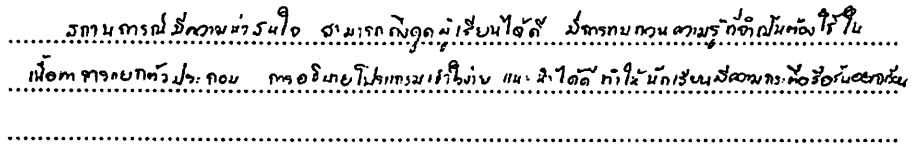
ภาพ 8 แสดงการหาความสูงของพลุในสถานการณ์ที่เป็นบริบทชีวิตจริงของนักเรียนได้

ขั้นที่ 4 ขั้นสะท้อนผล (Reflect)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยได้นำข้อมูลระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจง ตามรูปแบบการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ผู้วิจัยได้ใช้แบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เป็นเครื่องมือในการเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ ซึ่งบันทึกข้อมูลโดยผู้วิจัยและผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยสังเกตระหว่างการจัดกิจกรรมในชั้นเรียนของนักเรียน รวมทั้งบรรยากาศของการจัดกิจกรรม หลังจากนั้นนำข้อมูลมาทำการวิเคราะห์เพื่อหาแนวทางในการพัฒนาวิธีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น ซึ่งสามารถนำผลจากการวิเคราะห์มาสะท้อนปัญหาและแนวทางการแก้ไขที่เกิดขึ้นในแต่ละขั้นตอนของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มีรายละเอียดดังนี้

1) Guided Explication (การแนะนำ ชี้แจง)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยมีความคิดเห็นว่า การนำเข้าสู่กิจกรรมการเรียนรู้โดยการนำเรื่องพลุในวันปีใหม่มาพูดคุยทำให้กิจกรรมดำเนินไปอย่างน่าสนใจและสร้างความตื่นเต้นให้นักเรียนซึ่งเป็นสถานการณ์ที่นักเรียนอยากให้ถึงวันงานเร็วๆ และการหาความสูงของพลุหาได้หรือไม่ อย่างไร ทำให้นักเรียนมีความอยากรู้ว่าในสถานการณ์ดังกล่าวที่ผู้วิจัยนำมาใช้นั้นสามารถหาได้จริงหรือไม่ นักเรียนจึงกล้าที่จะแสดงความคิดเห็นและตอบคำถามในประเด็นต่างๆ ได้เป็นอย่างดี ซึ่งส่งเสริมกระบวนการคิดและเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็นอย่างหลากหลาย สังเกตเห็นได้ชัดเจนว่าเมื่อผู้วิจัยถามคำถามเกี่ยวกับประเพณีวันปีใหม่ชนเผ่าของนักเรียนและพลุในวันปีใหม่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์เรื่องใด ประเด็นดังกล่าวสอดคล้องกับผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่มีความคิดเห็นว่า สถานการณ์ที่นำมามีความน่าสนใจ ดึงดูดนักเรียนได้ดี และมีการทบทวนความรู้ของนักเรียนได้ดี ซึ่งจำเป็นต้องใช้ในเรื่องนี้ (ผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้, 17 กุมภาพันธ์ 2563) ดังภาพ 9



ภาพ 9 แสดงการสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ขั้น Guided Explication (การแนะนำ ชี้แจง) ในวงจรปฏิบัติการที่ 1 โดยผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้

2) Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยมีความคิดเห็นว่า โปรแกรม GeoGebra สามารถกระตุ้นและดึงดูดความสนใจของผู้เรียนได้เป็นอย่างดี สังเกตได้จากการลงมือปฏิบัติกิจกรรมร่วมกัน และสังเกตจากการพูดคุยสนทนา โดยนักเรียนมักจะพูดกับเพื่อนว่า "ง่ายมาก ทำไมง่ายจัง" (นักเรียน, 17 กุมภาพันธ์ 2563) และมักจะบอกกับผู้วิจัยว่า "อยากทำแบบนี้เยอะๆ ค่ะ" (นักเรียน, 17 กุมภาพันธ์ 2563) แต่มีประเด็นของการเขียนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก นักเรียนไม่มั่นใจในการเขียนพื้นที่เพราะอยู่ในรูปตัวแปร ซึ่งอาจจะสงสัยในช่วงแรกว่าควรเขียนอย่างไรดี ผู้วิจัยจะต้องอธิบายให้ชัดเจนถึงการนำพื้นที่ที่ต่อกันมาบวกกัน และการพูดคุยสนทนากันของนักเรียนในบางครั้งนักเรียนใช้ภาษาถิ่น ซึ่งครูอาจฟังไม่เข้าใจ จึงต้องซักถามถึงสิ่งที่นักเรียนพูดคุยกับเพื่อนซึ่งอาจเสียเวลานาน และจากการบันทึกผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มีความคิดเห็นว่าโปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมที่น่าสนใจในการนำมาจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ นักเรียนมีความตื่นเต้น และอยากเรียนคณิตศาสตร์ นักเรียนมีความตั้งใจและทำงานร่วมกันเป็นอย่างดี แต่จุดที่ควรปรับปรุงคือ เวลาในการทำกิจกรรมเกี่ยวกับโปรแกรม GeoGebra น้อยเกินไป อาจต้องใช้เวลามากกว่านี้เพราะโปรแกรมเป็นสิ่งที่จะทำให้นักเรียนเกิดแนวคิดของการหาตัวคูณร่วมของพหุนาม (ผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้, 17 กุมภาพันธ์ 2563) ดังภาพ 10

โปรแกรม GeoGebra ปีความน่าสนใจ นักเรียนกระตือรือร้นมาก และนักเรียนสามารถหาคุณ
และยกตัวประกอบพหุนามได้ การใช้งานโปรแกรมทำให้นักเรียนเข้าใจในการหาตัวประกอบพหุนามมากขึ้น

2.2 การพัฒนา/ปรับปรุงการสอน

เวลาในการทำกิจกรรมส่วนนี้ น้อยเกินไป ควรเพิ่มเวลาในส่วนนี้ เพราะการให้ทำให้ได้ฝึกและวิเคราะห์
ด้วยโปรแกรม จะทำให้นักเรียนได้เกิดแนวคิดของการหาตัวประกอบที่สมบูรณ์ขึ้นไปสู่เนื้อหา
ต่อไปได้ง่ายขึ้น

2.3 แนวทางในการแก้ไขปรับปรุง

ควรเพิ่มเวลาในขั้นนี้ และอาจปรับเวลาในขั้นที่ 1 ลงมา

ภาพ 10 แสดงการสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ขั้น Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra) ในวงจรปฏิบัติการที่ 1 โดยผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้

3) Knowledge classification (การจำแนกความรู้)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยมีความคิดเห็นว่า สามารถเขียนภาพการคูณและการแยกตัวประกอบพหุนามได้ สังเกตได้จากการทำใบกิจกรรมที่ 1.1 ตอนที่ 1 โดยที่ผู้วิจัยไม่ได้แนะนำหรืออธิบายใดๆ แต่ก็ยัง สอดคล้องกับผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มีความคิดเห็นและไปในทิศทางเดียวกับผู้วิจัยว่า นักเรียนสามารถเขียนภาพผลคูณและการแยกตัวประกอบพหุนามได้ถูกต้อง (ผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้, 18 กุมภาพันธ์ 2563)

4) Concept Reification (การปรับแนวคิด)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยมีความคิดเห็นว่า เมื่อนักเรียนสามารถเขียนภาพของการแยกตัวประกอบได้แล้ว นักเรียนได้เกิดมโนมติทางคณิตศาสตร์ถึงการหาตัวคูณร่วมของพหุนามนั้นๆ สังเกตได้จากการตอบคำถามของนักเรียนและการทำใบกิจกรรมที่ 1.1 ตอนที่ 2 แต่มีนักเรียนบางคนสามารถตอบคำถามได้ แต่เมื่อนักเรียนทำใบกิจกรรม นักเรียนไม่รู้ว่าต้องเขียนยังไงหากไม่ใช้ภาพ ซึ่งผู้วิจัยได้แนะนำและอธิบายให้นักเรียนเข้าใจถึงวิธีการเขียนการแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติของการแจกแจง แต่มีประเด็นของการแยกตัวประกอบพหุนามที่มีความซับซ้อนมากขึ้น หรือโจทย์เริ่มมีความยากขึ้น นักเรียนมีความสงสัยถึงการแยกตัวประกอบพหุนามได้ว่าจะทำได้อย่างไร สังเกตได้จากการที่นักเรียนถามว่า "ในข้อที่ 4 มีสองพจน์ที่ไม่มีตัวคูณร่วมกับสองพจน์ข้างหน้า จะต้องทำยังไงครับ" (นักเรียน, 18 กุมภาพันธ์ 2563) ผู้วิจัยได้ถามกระตุ้นเพื่อให้นักเรียนได้คำนึงถึงการจัดกลุ่มพหุนาม แล้วจึงค่อยใช้สมบัติของการแจกแจงในการแยกตัวประกอบ และอีกหนึ่งประเด็นที่ทำให้นักเรียนบางคนเกิดความผิดพลาดในการแยกตัวประกอบพหุนามคือ การคูณจำนวนเต็ม นักเรียนเกิดความสับสนเกี่ยวกับผลลัพธ์ที่ได้ของการคูณจำนวนเต็ม สังเกตได้จากการตอบคำถามและการทำใบกิจกรรม ซึ่งผู้วิจัยได้อธิบายนักเรียนเป็นรายบุคคลเพื่อให้นักเรียนสามารถนำไปใช้ในการแยกตัวประกอบได้อย่างถูกต้อง และจากการทำใบกิจกรรมที่ 1.2 "พลุ มู คือองี" นักเรียนมีความกระตือรือร้นอยากทำ เนื่องจากเห็นชื่อกิจกรรม เป็นภาษาถิ่นของตนเอง สังเกตได้จากการแสดงออกทางสีหน้า ยิ้มแย้ม คุยกับเพื่อนว่าจะต้องหาเกี่ยวกับความสูงของพลุ ในช่วงนี้ทำให้นักเรียนได้เห็นคุณค่าของคณิตศาสตร์ว่าสามารถนำไปประยุกต์กับบริบทในชีวิตจริงของนักเรียนได้ และจากการบันทึกผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มีความคิดเห็นว่า นักเรียนได้เกิดมโนมติทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจงจากการหาตัวคูณร่วมของพหุนามนั้นๆ แต่ยังมีนักเรียนบางคนยังสับสนเกี่ยวกับการคูณจำนวนเต็ม และอาจจะส่งผลกระทบต่อการเรียนรู้การแยกตัวประกอบพหุนามต่อไปได้ (ผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้, 18 กุมภาพันธ์ 2563) ดังภาพ 11

4.3 การพัฒนา/ปรับปรุงการสอน

ในขั้นนี้ ครู ควร นำวิธีการเรียนการแยกตัวประกอบให้ละเอียดยิ่งขึ้น และในเนื้อหาเรื่องการดูผลต่างกำลังสอง นักเรียนยังสับสนอยู่มาก ควรสอนเพิ่มเติมก่อนที่จะสอนเรื่องต่อไป

4.4 แนวทางในการพัฒนา/ปรับปรุงการสอน

ครูควรอธิบายการเรียนการแยกตัวประกอบให้ละเอียดยิ่งขึ้น และทบทวนเนื้อหาการดูผลต่างกำลังสองเพิ่มเติม

ภาพ 11 แสดงการสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ขั้น Concept Reification (การปรับแนวคิด) ในวงจรปฏิบัติการที่ 1 โดยผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้

จากการวิเคราะห์แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัยร่วมกับแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้โดยผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ ในวงจรปฏิบัติการที่ 1 สามารถสรุปได้ดังตาราง 7

ตาราง 7 ปัญหาและแนวทางในการแก้ไขปรับปรุงในวงจรปฏิบัติการที่ 1

ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้	ปัญหา	แนวทางในการแก้ไขปรับปรุง
1. Guided Explication (การแนะนำ ชี้แจง)	-	ในขั้นตอนนี้ยังไม่พบปัญหาที่ควรปรับปรุงแก้ไข
2. Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra)	1. นักเรียนสับสนเกี่ยวกับการเขียนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากว่าจะต้องเขียนอย่างไร เมื่อพื้นที่อยู่ในลักษณะของตัวแปร เนื่องจากนักเรียนไม่เคยเขียนมาก่อน 2. การพูดคุยสนทนาของนักเรียน ส่วนใหญ่นักเรียนใช้ภาษาถิ่น ซึ่งผู้วิจัยไม่เข้าใจ ทำ	1. ผู้วิจัยได้แนะนำและอธิบายให้เข้าใจตรงกันถึงการนำพื้นที่มารวมกัน โดยการยกตัวอย่างการสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากจากชิ้นส่วนต่างๆ แล้วหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยการนำพื้นที่ที่ได้มาบวกกัน และถามย้อนกลับโดยให้นักเรียนร่วมกันตอบคำถามเพื่อสำรวจมโนมติของนักเรียน

ตาราง 7 (ต่อ)

ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ (ต่อ)	ปัญหา (ต่อ)	แนวทางในการแก้ไขปรับปรุง (ต่อ)
	ให้ต้องถามเพื่อแปลสิ่งที่นักเรียนพูด ทำให้เสียเวลานาน 3. เวลาในการทำกิจกรรมในขั้นตอนนี้ น้อยเกินไป เนื่องจากเป็นวงจรปฏิบัติการที่ 1 นักเรียนอาจต้องใช้เวลานานในการสำรวจ	2. ผู้วิจัยสร้างข้อตกลงกับนักเรียนเกี่ยวการสนทนากันในระหว่างการจัดการเรียนรู้ ให้นักเรียนใช้ภาษาไทยในการสื่อสาร เพื่อให้นักเรียนสามารถใช้ภาษาไทยให้คล่อง ถูกต้อง และหากนักเรียนใช้ภาษาถิ่นอาจเกิดการสื่อสารที่ผิดพลาด หรือการเกิดมโนมติที่คลาดเคลื่อนได้ 3. ผู้วิจัยจะทำการปรับเวลาในการทำกิจกรรมในขั้นตอนนี้ให้มีความเหมาะสม โดยอาจจะลดเวลาในขั้นตอนที่ 1 ให้น้อยลง เพื่อให้นักเรียนได้ใช้เวลาในการทำกิจกรรมเกี่ยวกับโปรแกรม GeoGebra ให้มากขึ้น เพราะในขั้นตอนนี้ นักเรียนจะได้มองภาพของการหาตัวคูณร่วมและการแยกตัวประกอบได้ชัดเจนเป็นรูปธรรมมากขึ้น ผู้วิจัยจะทำการปรับเวลาในวงจรปฏิบัติการที่ 2 ต่อไป
3. Knowledge classification (การจำแนกความรู้)	นักเรียนบางส่วนยังไม่มั่นใจในการวาดภาพ และยังไม่กล้าเขียนคำตอบ	ผู้วิจัยได้ซักถามนักเรียนรายกลุ่มและคอยเสริมความมั่นใจในการคิด ให้นักเรียนกล้าคิดและเขียนภาพลงในใบงาน

ตาราง 7 (ต่อ)

ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ (ต่อ)	ปัญหา (ต่อ)	แนวทางในการแก้ไขปรับปรุง (ต่อ)
4. Concept Reification (การปรับแนวคิด)	นักเรียนบางคนยังเกิดความผิดพลาดในการแยกตัวประกอบอันเนื่องจากความผิดพลาดของของผลลัพธ์ที่ได้ของการคูณจำนวนเต็ม	ผู้วิจัยได้แนะนำพร้อมทั้งอธิบายนักเรียนเป็นรายบุคคล โดยการถาม-ตอบ กับนักเรียนเพื่อสำรวจมโนมติของนักเรียน พร้อมทั้งทบทวนการคูณจำนวนเต็ม เพื่อให้นักเรียนสามารถนำไปใช้ในการแยกตัวประกอบพหุนามได้อย่างถูกต้อง

1.2 วงจรปฏิบัติการที่ 2

การดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการที่ 2 มีลักษณะการดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นวางแผน (Plan)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยได้นำผลการสะท้อนจากการดำเนินการตามวงจรปฏิบัติการที่ 1 มาทำการพิจารณาเกี่ยวกับปัญหาที่เกิดขึ้นจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่อง แยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติของการแจกแจง ได้แก่ 1) ปรับเพิ่มเวลาในการทำกิจกรรมของโปรแกรม GeoGebra ให้มากขึ้น 2) ทบทวนความรู้ ความเข้าใจนักเรียนก่อนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 3) สร้างข้อตกลงกับนักเรียนโดยให้นักเรียนใช้ภาษาไทยในการสื่อสาร 4) ผู้วิจัยจะต้องมีการแนะนำ และอธิบายให้ชัดเจนเพื่อให้นักเรียนมั่นใจในคำตอบตนเอง จากนั้นนำมาปรับปรุงแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว จำนวนทั้งสิ้น 3 ชั่วโมง

ขั้นที่ 2 ขั้นปฏิบัติ (Act)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยได้ดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว จำนวน 3 ชั่วโมง ดำเนินกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ตามขั้นตอน 4 ขั้นตอน โดยในแต่ละขั้นตอนมีรายละเอียดในการดำเนินการ ดังนี้

1) Guided Explication (การแนะนำ ชี้แจง)

ผู้วิจัยสนทนากับนักเรียนเกี่ยวกับการเลี้ยงสัตว์ในหมู่บ้านของนักเรียน โดยสอบถามนักเรียนถึงประเด็นการเลี้ยงสัตว์ในหมู่บ้าน หากเลี้ยงแล้วสัตว์อะไรที่ต้องมีคอก หากมีคอกแล้วคอกมีลักษณะเป็นอย่างไร เพื่อเชื่อมโยงเกี่ยวกับการหาความยาวของคอกหมูโดยการใช้ความรู้ในเรื่องของพหุนาม ผู้วิจัยสอบถามนักเรียนเพื่อจุดประเด็นสงสัยว่าเราจะสามารถหาความยาวของคอกหมูโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับพหุนามได้อย่างไร สิ่งที่นักเรียนคุ้นเคยในบริบทชีวิตจริงจะเกิดเป็นคำถามว่าสิ่งเหล่านี้มีความเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์อย่างไร ทำให้นักเรียนสนใจและอยากจะเรียนเพื่อตอบข้อสงสัยในประเด็นดังกล่าวนี้ ผู้วิจัยทบทวนความรู้ที่ได้เรียนไปในชั่วโมงที่แล้วในเรื่องของการแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติของการแจกแจง จากนั้นผู้วิจัยแนะนำให้นักเรียนได้รู้จักพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวหรือพหุนามกำลังสองที่อยู่ในรูป ax^2+bx+c เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ $c=0$ ผู้วิจัยได้ยกตัวอย่างพหุนามแล้วถามกระตุ้นเพื่อให้นักเรียนเกิดข้อสังเกตและได้ข้อสรุปเกี่ยวกับการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวที่อยู่ในรูป ax^2+bx+c เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ $c=0$ สามารถใช้สมบัติการแจกแจงแยกตัวประกอบของพหุนามได้ จากนั้นผู้วิจัยแนะนำ อธิบายเกี่ยวกับขั้นตอนการแยกตัวประกอบพหุนามโดยการใช้โปรแกรม GeoGebra และเปิดโอกาสให้นักเรียนซักถามข้อสงสัย

2) Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra)

ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนจับคู่กับเพื่อน ทำการสำรวจพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากด้วยโปรแกรม GeoGebra โดยการลองใช้งานโปรแกรม จากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนแต่ละคู่ฝึกแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวที่อยู่ในรูป ax^2+bx+c เมื่อ $a=1$, b และ c เป็นจำนวนเต็ม และ $c\neq 0$ โดยอาศัยความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากจากโปรแกรม GeoGebra และให้นักเรียนส่งชิ้นงานหลังจากทำกิจกรรม การทำกิจกรรมในโปรแกรม GeoGebra ส่งเสริมให้นักเรียนตื่นตัวกับการเรียนรู้ กระตุ้นให้นักเรียนได้เรียนรู้ในแนวทางใหม่ๆ นอกเหนือจากการเรียนบนกระดาน หลังจากทำกิจกรรมแล้วนั้นผู้วิจัยได้กำหนดพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวที่อยู่ในรูป ax^2+bx+c เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม และ $a\neq 0$, $c\neq 0$ ผู้วิจัยได้ซักถามนักเรียนในประเด็นที่ $a\neq 0$ ในกิจกรรมว่านักเรียนจะสร้างรูปลักษณะเป็นอย่างไร โดยนักเรียนจะได้แสดงความคิดเห็นต่อสิ่งที่เกิดขึ้นและพูดคุยกับเพื่อนสรุปประเด็นดังกล่าวนำไปสู่การเรียนรู้ในขั้นต่อไป

3) Knowledge classification (การจำแนกความรู้)

หลังจากที่นักเรียนได้ฝึกแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวจากโปรแกรม GeoGebra ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 2.1 ตอนที่ 1 เกี่ยวกับการเขียนภาพของแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว เพื่อให้นักเรียนได้เชื่อมโยงแนวคิดจากสิ่งที่เป็นรูปธรรมมา

เป็นภาพ จากนั้นผู้วิจัยได้พูดคุย สอบถามเกี่ยวกับภาพการแยกตัวประกอบพหุนามที่นักเรียนแต่ละกลุ่มได้เขียนออกมา เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน

4) Concept Reification (การปรับแนวคิด)

ผู้วิจัยได้ถามกระตุ้นความคิดของนักเรียนถึงวิธีการแยกตัวประกอบของพหุนาม ถ้าหากไม่เขียนภาพจะมีวิธีแยกตัวประกอบของพหุนามได้อย่างไร ในช่วงนี้นักเรียนจะได้พูดคุย อภิปราย โต้แย้งกันในชั้นเรียน และพบข้อสังเกตที่นำไปสู่ข้อสรุปเกี่ยวกับวิธีการแยกตัวประกอบของพหุนาม ซึ่งผู้วิจัยได้แนะนำนักเรียนถึงการเรียกพจน์ในพหุนามเพื่อให้สะดวกและรวดเร็วในการแยกตัวประกอบของพหุนาม โดยจะเรียก ax^2 ว่า พจน์หน้า เรียก bx ว่าพจน์กลาง และเรียก c ว่าพจน์หลัง จากนั้นผู้วิจัยได้ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 2.1 ตอนที่ 2 เกี่ยวกับการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนในการเชื่อมโยงแนวคิดจากภาพมาเป็นแนวคิดเชิงนามธรรม และเมื่อทำใบงานกิจกรรมการเรียนรู้เสร็จแล้ว ผู้วิจัยให้นักเรียนแต่ละคู่หาความยาวรอบคอกหมูที่ได้กล่าวไปในต้นชั่วโมง โดยผู้วิจัยเชื่อมโยงความรู้เรื่องพหุนามดีกรีสองว่าสามารถนำไปใช้ประโยชน์ในชีวิตประจำวันได้ ดังเช่นกิจกรรมที่นักเรียนได้ทำไป เพื่อให้นักเรียนเห็นถึงการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้

ขั้นสังเกต (Observe)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยได้สังเกตการเปลี่ยนแปลงต่างๆ ที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra โดยผู้วิจัยและผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ช่วยกันสังเกตและจดบันทึกลงในแบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยผู้วิจัยได้ผลดังต่อไปนี้

1) Guided Explication (การแนะนำ ชี้แจง)

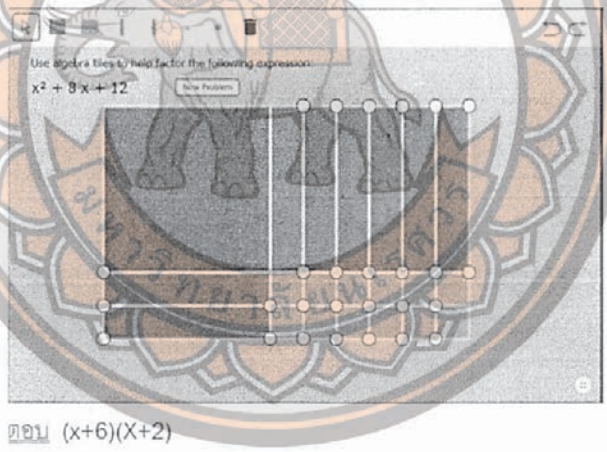
ผู้วิจัยสนทนากับนักเรียนเกี่ยวกับการเลี้ยงสัตว์ในหมู่บ้านของนักเรียน โดยสอบถามนักเรียนถึงประเด็นการเลี้ยงสัตว์ในหมู่บ้าน หากเลี้ยงแล้วสัตว์อะไรที่ต้องมีคอก หากมีคอกแล้วคอกมีลักษณะเป็นอย่างไร นักเรียนร่วมกันตอบคำถามจากสัตว์ที่นักเรียนพบเห็นทั้งในบริเวณบ้านของตนเองและบ้านของเพื่อน ผู้เรียนให้ความร่วมมือและสนใจเป็นอย่างมาก จากนั้นผู้วิจัยสอบถามนักเรียนเพื่อจุดประเด็นสงสัยว่าเราจะสามารถหาความยาวของคอกหมูโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับพหุนามได้อย่างไร สิ่งที่นักเรียนคุ้นเคยในบริบทชีวิตจริงจะเกิดเป็นคำถามว่าสิ่งเหล่านี้มีความเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์อย่างไร จะเห็นว่านักเรียนให้ความสนใจกับประเด็นดังกล่าวและร่วมกันแสดงความคิดเห็น นักเรียนกล้าที่จะนำเสนอแนวทางในการตอบคำถามตามแนวคิดของตนเอง อาจเนื่องจากประเด็นดังกล่าวเป็นประเด็นที่นักเรียนคุ้นเคย ส่งผลต่อความมั่นใจในการตอบคำถามมากยิ่งขึ้น จากนั้นผู้วิจัยทบทวนความรู้ในเรื่องของการแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้

สมบัติของการแจกแจง โดยการซักถามนักเรียนเป็นรายบุคคล จากนั้นผู้วิจัยแนะนำให้นักเรียนได้รู้จักพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวหรือพหุนามกำลังสองที่อยู่ในรูป ax^2+bx+c เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ $c=0$ ผู้วิจัยได้ยกตัวอย่างพหุนามแล้วถามกระตุ้นความคิดนักเรียนว่าจะสามารถแยกตัวประกอบพหุนามได้อย่างไร นักเรียนพบข้อสังเกตอะไรบ้าง นักเรียนได้พิจารณาพหุนามตัวอย่างแล้วพูดคุยกับเพื่อนข้างๆ แต่นักเรียนยังไม่มั่นใจในการคำถามของตนเอง ผู้วิจัยได้สอบถามนักเรียน และให้นักเรียนเสนอแนวคิดของตนเอง และบอกว่า "เราใช้สมบัติการแจกแจงได้มั้ยครับ มันมีตัวร่วม" (นักเรียน, 20 กุมภาพันธ์ 2563) จากการเสนอแนวคิดดังกล่าวทำให้เห็นว่านักเรียนเกิดข้อสังเกตเกี่ยวกับการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวที่อยู่ในรูป ax^2+bx+c เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ $c=0$ ว่าสามารถใช้สมบัติการแจกแจงแยกตัวประกอบของพหุนามได้ จากนั้นผู้วิจัยแนะนำ อธิบายเกี่ยวกับขั้นตอนการแยกตัวประกอบพหุนามโดยการใช้โปรแกรม GeoGebra นักเรียนมีความตื่นเต้น กระตือรือร้นที่จะได้ใช้งานโปรแกรมอีก สังเกตได้จากสีหน้า ท่าทาง และพฤติกรรมของนักเรียนที่แสดงออก ซึ่งพฤติกรรมดังกล่าวสามารถ นำไปสู่ความสนใจในการเรียนรู้ในขั้นตอนต่อไป

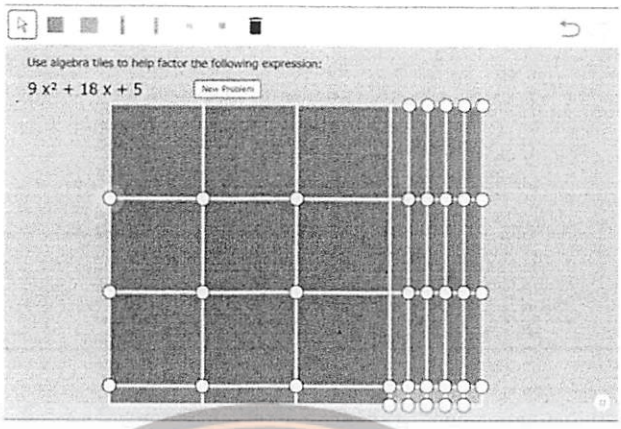
2) Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra)

ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนจับคู่กับเพื่อน ทำการสำรวจพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากด้วยโปรแกรม GeoGebra โดยการลองใช้งานโปรแกรม ผู้วิจัยสังเกตว่า เมื่อเข้าใช้งานโปรแกรมนักเรียนมีความคล่องแคล่ว รวดเร็ว จากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนแต่ละคู่ฝึกแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวที่อยู่ในรูป ax^2+bx+c เมื่อ $a=1, b$ และ c เป็นจำนวนเต็ม และ $c\neq 0$ โดยอาศัยความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากจากโปรแกรม GeoGebra นักเรียนเกิดความสับสนเกี่ยวกับการวางรูปให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากว่าจะวางอย่างไร ผู้วิจัยจึงได้แสดงตัวอย่างพร้อมกับซักถามนักเรียน เพื่อให้นักเรียนช่วยกันวางรูปที่ผู้วิจัยยกตัวอย่างให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก จากนั้นผู้วิจัยได้ลองให้นักเรียนสร้างรูปจากโจทย์ที่กำหนดให้พบว่า มีนักเรียนบางคู่ยังไม่สามารถสร้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้ ผู้วิจัยได้แนะนำให้นักเรียนลองย้ายชิ้นส่วนของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก พบว่าเมื่อนักเรียนได้ลองย้ายชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมมุมฉากไปมา นักเรียนสามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากนั้นได้ และสามารถแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวที่อยู่ในรูป ax^2+bx+c เมื่อ $a=1, b$ และ c เป็นจำนวนเต็ม และ $c\neq 0$ สังเกตได้จากการชิ้นงานของนักเรียนและการปฏิบัติกิจกรรมที่รวดเร็วมากยิ่งขึ้น ผู้วิจัยเห็นว่านักเรียนสามารถแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวที่อยู่ในรูป ax^2+bx+c เมื่อ $a=1, b$ และ c เป็นจำนวนเต็ม และ $c\neq 0$ ได้แล้วผู้วิจัยจึงนำโจทย์ที่ท้าทายมากยิ่งขึ้น โดยการให้นักเรียนลองแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวที่อยู่ในรูป ax^2+bx+c เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม และ $a\neq 0, c\neq 0$ ดังภาพ 12, 13 และ 14

ภาพ 12 แสดงการฝึกปฏิบัติการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว ด้วยโปรแกรม GeoGebra ของนักเรียน



ภาพ 13 แสดงชิ้นงานนักเรียนที่ได้จากการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ตัวแปรเดียวด้วยโปรแกรม GeoGebra เมื่อ $a=1$



ตอบ (3X+5) (3X+1)

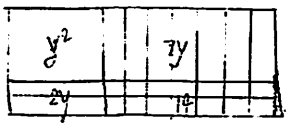
ภาพ 14 แสดงชิ้นงานนักเรียนที่ได้จากการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ตัวแปรเดียวด้วยโปรแกรม GeoGebra เมื่อ $a \neq 0$

ในช่วงนี้ เป็นช่วงที่กระตุ้นให้นักเรียนได้เรียนรู้ในแนวทางใหม่ๆ นอกเหนือจากการเรียนบนกระดาน ผู้วิจัยสอบถามนักเรียนว่านักเรียนจะสร้างรูปลักษณะเป็นอย่างไรหาก $a \neq 0$ นักเรียนบอกว่า "ทำได้โดยการเพิ่มรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่ากับ a" (นักเรียน, 21 กุมภาพันธ์ 2563) สังเกตได้ว่านักเรียนได้แสดงความคิดเห็นต่อสิ่งที่เกิดขึ้นและพูดคุยกับเพื่อนถึงดังกล่าวและสรุปประเด็นดังกล่าวนำไปสู่การเรียนรู้ในขั้นต่อไป

3) Knowledge classification (การจำแนกความรู้)

ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 2.1 ตอนที่ 1 เกี่ยวกับการเขียนภาพของแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว เพื่อให้นักเรียนได้เชื่อมโยงแนวคิดจากสิ่งที่เป็นรูปธรรมมาเป็นภาพ พบว่า เมื่อนักเรียนทำใบกิจกรรมนักเรียนแต่ละกลุ่มปรึกษากันว่าจะว่าอย่างไรดี โดยมอบหมายให้นักเรียนคนหนึ่งเป็นวาดแล้วเพื่อนที่เหลือช่วยกันคิด นักเรียนบางกลุ่มได้ลองวาดภาพลงในกระดาษจากนั้นเมื่อรู้สึกไม่แน่ใจ นักเรียนจะมีการปรึกษากันกับเพื่อน และจึงซักถามผู้วิจัยเพื่อช่วยยืนยันกระบวนการคิดของตนเอง ดังภาพ 15 และ 16 จากนั้นผู้วิจัยได้ซักถามแต่ละกลุ่มเกี่ยวกับภาพการแยกตัวประกอบพหุนามที่นักเรียนแต่ละกลุ่มได้เขียนออกมา เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน

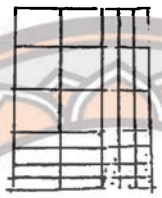
$y^2+9y+14$



$(y+7)(y+2)$

ภาพ 15 แสดงการเขียนภาพการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว เมื่อ $a=1$ ของนักเรียนได้อย่างถูกต้อง

$6x^2-x-12$



$(2x-3)(3x+4)$

ภาพ 16 แสดงการเขียนภาพการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว เมื่อ $a\neq 0$ ของนักเรียนได้อย่างถูกต้อง

4) Concept Reification (การปรับแนวคิด)

ผู้วิจัยได้ถามกระตุ้นความคิดของนักเรียนถึงวิธีการแยกตัวประกอบของพหุนาม ถ้าหากไม่เขียนภาพจะมีวิธีแยกตัวประกอบของพหุนามได้อย่างไร นักเรียนช่วยกันตอบคำถาม และอภิปราย กันในชั้นเรียน จนพบข้อสังเกตที่นำไปสู่ข้อสรุปเกี่ยวกับวิธีการแยกตัวประกอบของพหุนาม ผู้วิจัยผู้วิจัยได้แนะนำนักเรียนถึงการเรียกพจน์ในพหุนามเพื่อให้สะดวกและรวดเร็วในการแยกตัวประกอบของพหุนาม โดยจะเรียก ax^2 ว่า พจน์หน้า เรียก bx ว่าพจน์กลาง และเรียก c ว่า พจน์หลัง พบว่า นักเรียนสามารถตอบคำถามและอธิบายแนวคิดได้ ผู้วิจัยยกตัวอย่างเพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนเป็นรายบุคคล จากนั้นผู้วิจัยได้ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 2.1 ตอนที่ 2 เกี่ยวกับการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว เพื่อเชื่อมโยงแนวคิดจากภาพมาเป็นแนวคิดเชิงนามธรรม ในช่วงนี้นักเรียนเกิดความสับสนบ้างเล็กน้อยถึงวิธีการเขียนการแยกตัวประกอบพหุนามว่าจะเขียนอย่างไร ผู้วิจัยจะต้องอธิบายให้นักเรียนเข้าใจก่อนและยกตัวอย่างวิธีการเขียนการแยกตัวประกอบพหุนามใช้ชัดเจน เมื่อเห็นว่าผู้วิจัยสามารถแยกตัวประกอบพหุนามได้แล้ว ดังภาพ 17 และ 18

4. $9x^2-6x+1$

วิธีทำ $9x^2-6x+1=(3x-1)(3x-1)$

$(-1)(-1)=1$

$(3x)+(-3x)=-6x$

$(3x)(3x)=9x^2$

ตอบ $9x^2-6x+1=(3x-1)(3x-1)$

ภาพ 17 แสดงการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว ของนักเรียนที่สามารถเชื่อมโยงแนวคิดเชิงนามธรรมได้

5. $-12a^2-20a-7$

$-12a^2-20a-7=-(12a^2+20a+7)$

$-(12a^2+20a+7)=-(6a+7)(2a+1)$

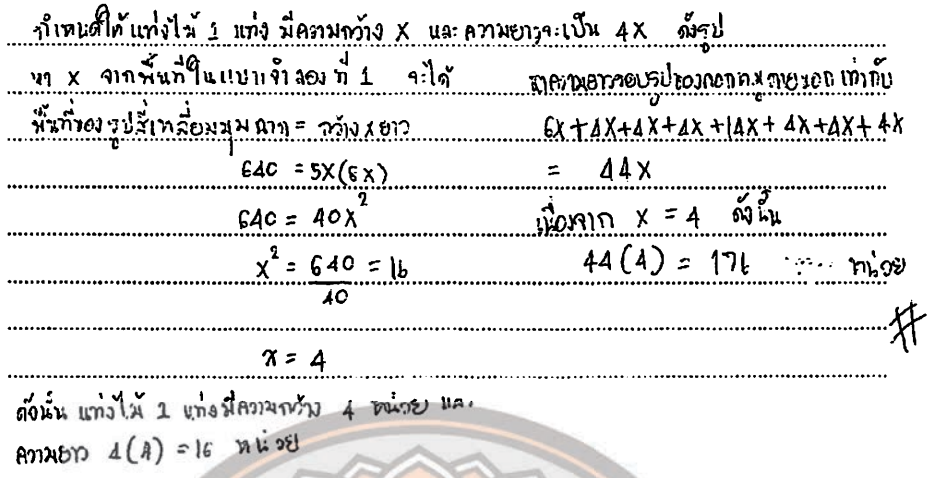
$(7)(1)=7$

$(6a)(2a)=12a^2$

$14a+6a=20a$

ภาพ 18 แสดงการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว ของนักเรียนที่สามารถเชื่อมโยงแนวคิดเชิงนามธรรมได้

จากนั้นผู้วิจัยจึงให้นักเรียนหาความยาวรอบคอกหมูที่ได้กล่าวไปในต้นชั่วโมง เพื่อเชื่อมโยงความรู้เรื่องพหุนามว่าสามารถนำไปใช้ประโยชน์ในชีวิตประจำวันได้ ดังเช่นกิจกรรมที่นักเรียนได้ทำไป เพื่อให้นักเรียนเห็นถึงการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ ดังภาพ 19



ภาพ 19 แสดงการนำความรู้ไปใช้ในการแก้สถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง

ขั้นสะท้อนผล (Reflect)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยได้นำข้อมูลระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ผู้วิจัยได้ใช้แบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เป็นเครื่องมือในการเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ ซึ่งบันทึกข้อมูลโดยผู้วิจัยและผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ หลังจากนั้นนำข้อมูลมาทำการวิเคราะห์เพื่อหาแนวทางในการพัฒนาวิธีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น ซึ่งสามารถนำผลจากการวิเคราะห์มาสะท้อนปัญหาและแนวทางการแก้ไขที่เกิดขึ้นในแต่ละขั้นตอนของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มีรายละเอียดดังนี้

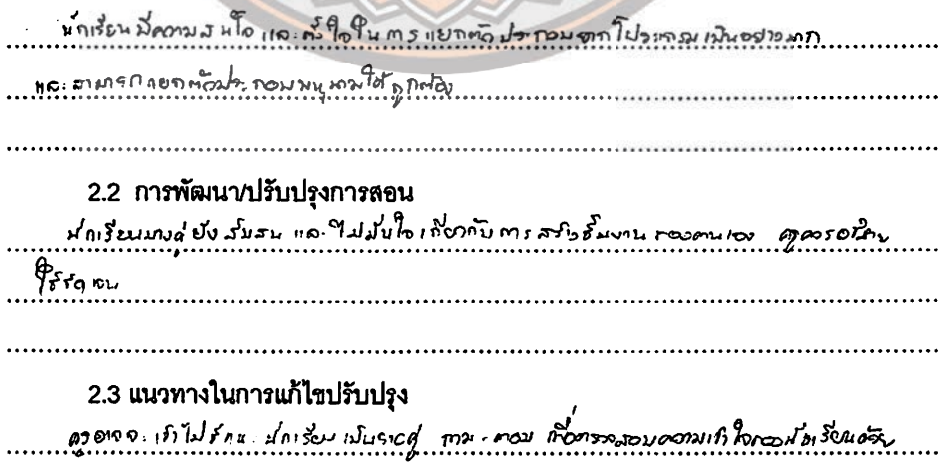
1) Guided Explication (การแนะนำ ชี้แจง)

ในขั้นตอนนี้ผู้วิจัยมีความคิดเห็นว่า การนำเข้าสู่กิจกรรมการเรียนรู้โดยการนำนักเรียนสนทนาถึงการเลี้ยงสัตว์ สร้างความน่าสนใจและตื่นเต้นให้นักเรียนเมื่อพบเจอกับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับบริบทชีวิตจริง ทำให้นักเรียนมีความอยากรู้ว่าในสถานการณ์การหาความยาวคอกหมูมีความเกี่ยวข้องกับพหุนามอย่างไร คำถามที่ผู้วิจัยใช้ควรจะส่งเสริมกระบวนการคิดและเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็นในประเด็นของการหาความยาวของหมูว่าจะหาได้อย่างให้มีความหลากหลาย เป็นการแตกประเด็นให้นักเรียนมองเห็นภาพการเชื่อมโยงระหว่างสถานการณ์ความยาวคอกหมูและพหุนามก่อน เนื่องจากสถานการณ์ที่นำมาเป็นสิ่งที่อยู่รอบตัวนักเรียน นักเรียนจึงกล้าที่จะแสดงความคิดเห็นและตอบคำถาม และการทบทวนความรู้เดิมเรื่องการแยก

พหุนามโดยใช้สมบัติของการแจกแจงมีความสำคัญเนื่องจากนักเรียนจะต้องนำไปใช้ในการเรียนเรื่องต่อไป ซึ่งสอดคล้องกับผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่มีความคิดเห็นว่า การสร้างสถานการณ์ที่น่าสนใจสามารถดึงดูดความสนใจของนักเรียนได้และเป็นสิ่งที่อยู่รอบตัวนักเรียน นักเรียนจึงสามารถตอบคำถามได้ (ผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้, 20 กุมภาพันธ์ 2563)

2) Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra)

ในขั้นตอนนี้ผู้วิจัยมีความคิดเห็นว่า ในการทำกิจกรรมด้วยโปรแกรม GeoGebra เป็นกิจกรรมที่ให้นักเรียนสามารถลงมือปฏิบัติกิจกรรมได้ด้วยตนเอง การให้นักเรียนฝึกการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรโดยการลงมือปฏิบัติทำให้นักเรียนเกิดแนวคิดได้มากกว่าการเรียนบนกระดานและการปรึกษากับเพื่อนที่เป็นคู่ของตัวเอง ยิ่งเพิ่มความมั่นใจในการทำงานมากขึ้น และให้นักเรียนเห็นความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกับการแยกตัวประกอบ ผู้วิจัยจะต้องถามกระตุ้นพร้อมทั้งให้คำแนะนำเป็นการเสริมแรงทางบวกให้นักเรียนมั่นใจที่จะคิดหาคำตอบ อีกทั้งยังต้องมีการยกตัวอย่างและให้คำแนะนำในบางประเด็นเพื่อให้นักเรียนได้เห็นถึงการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว นักเรียนถึงจะสร้างชิ้นงานได้ ซึ่งสอดคล้องกับผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มีความคิดเห็นว่า นักเรียนให้ความสนใจในการฝึกการแยกตัวประกอบพหุนามเป็นอย่างมาก แต่มีนักเรียนบางคู่ยังสับสนเกี่ยวกับการสร้างชิ้นงาน อีกทั้งยังไม่มั่นใจในคำตอบของตนเอง ผู้วิจัยควรแนะนำและอธิบายถึงแนวทางในการสร้างชิ้นงานให้ชัดเจน (ผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้, 21 กุมภาพันธ์ 2563) ดังภาพ 20



ภาพ 20 แสดงการสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ขั้น Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra) ในวงจรปฏิบัติการที่ 2 โดยผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้

3) Knowledge classification (การจำแนกความรู้)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยมีความคิดเห็นว่า ผู้เรียนสามารถเขียนภาพการแยกตัวประกอบพหุนามได้ สังเกตได้จากการทำใบกิจกรรมที่ 2.1 ตอนที่ 1 แต่ยังมีนักเรียนบางกลุ่มมีการโต้แย้งกันในกลุ่มเล็กน้อยเกี่ยวกับการเขียนภาพ และใช้เวลาค่อนข้างนานในเขียนภาพ จนได้ข้อสรุปร่วมกันแต่ก็ยังไม่มั่นใจในคำตอบ ผู้วิจัยจะต้องคอยแนะนำ และซักถามกระตุ้นเสริมความมั่นใจในการคิด สอดคล้องกับผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มีความคิดเห็นและไปในทิศทางเดียวกับผู้วิจัยว่า นักเรียนมีความตั้งใจเรียนรู้ดีมากและนักเรียนทำงานร่วมกับเพื่อนได้เป็นอย่างดี การพูดคุย โต้แย้งในกลุ่มอาจจะทำให้ผู้เรียนได้เกิดแนวคิดใหม่ๆ ได้ (ผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้, 21 กุมภาพันธ์ 2563)

4) Concept Reification (การปรับแนวคิด)

ในขั้นตอนนี้ผู้วิจัยและผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มีความคิดเห็นไปในแนวทางเดียวกันว่า นักเรียนสามารถเชื่อมโยงแนวคิดจากการรับรู้ด้วยภาพมาเป็นแนวคิดเชิงนามธรรม สังเกตได้จากการทำใบกิจกรรมที่ 2.1 ตอนที่ 2 นักเรียนสามารถแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว ถึงแม้ว่าในตอนแรกนักเรียนอาจจะมีการดำเนินการของจำนวนเต็มที่ผิดพลาดบ้าง แต่ขั้นตอนวิธีการทำนั้นค่อนข้างถูกต้อง มีนักเรียนส่วนน้อยที่ผู้วิจัยจะต้องให้คำแนะนำเป็นรายบุคคลอย่างสม่ำเสมอ

จากการวิเคราะห์แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัยร่วมกับแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้โดยผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ ในวงจรปฏิบัติการที่ 2 สามารถสรุปได้ดังตาราง 8

ตาราง 8 ปัญหาและแนวทางในการแก้ไขปรับปรุงในวงจรปฏิบัติการที่ 2

ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้	ปัญหา	แนวทางในการแก้ไขปรับปรุง
1. Guided Explication (การแนะนำ ชี้แจง)	-	ในขั้นตอนนี้ยังไม่พบปัญหาที่ควรปรับปรุงแก้ไข
2. Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วย	1. นักเรียนบางส่วนสับสนว่าจะต้องทำสร้างชิ้นงานในโปรแกรมอย่างไรจึงจะเป็นรูป	1. ผู้วิจัยอธิบาย ซักถาม และจะต้องย้ำกับนักเรียนหลาย ๆ รอบ ก่อนเริ่มกิจกรรม ทบทวนว่านักเรียนจะต้อง

ตาราง 8 (ต่อ)

ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ (ต่อ)	ปัญหา (ต่อ)	แนวทางในการแก้ไขปรับปรุง (ต่อ)
โปรแกรม GeoGebra)	สี่เหลี่ยมมุมฉาก 2. เมื่อนักเรียนสร้างรูปเสร็จแล้ว ยังมีนักเรียนบางคู่ไม่มั่นใจในการพิมพ์คำตอบ และสอบถามกับเพื่อนคู่อื่นเพื่อเสริมความมั่นใจในการตอบของตนเอง	ทำอะไรบ้าง และในระหว่างทำกิจกรรมผู้วิจัยต้องคอยกระตุ้นนักเรียนให้ดำเนินกิจกรรมภายในเวลาที่กำหนด 2. ผู้วิจัยซักถามแนวการคิดของนักเรียน แล้วให้นักเรียนถาม-ตอบกับผู้วิจัย เมื่อนักเรียนเห็นแนวทางในการหาคำตอบในข้อแรกๆ แล้ว จะสามารถทำข้อต่อๆ ไปได้ด้วยตนเองและมีความมั่นใจมากขึ้น
3. Knowledge classification (การจำแนกความรู้)	1. นักเรียนบางกลุ่มยังไม่มั่นใจในคำตอบของกลุ่มตนเอง และได้มีการสอบถามเพื่อนกลุ่มอื่น 2. นักเรียนบางกลุ่มใช้เวลาค่อนข้างนาน ในการวาดภาพการแยกตัวประกอบ	1. ผู้วิจัยคอยแนะนำ และซักถามแนวการคิดของนักเรียนแต่ละกลุ่ม แล้วให้นักเรียนแต่ละกลุ่มถาม-ตอบ กับผู้วิจัย เพื่อเสริมความมั่นใจในการคิดและกระตุ้นให้สมาชิกภายในกลุ่มแสดงความคิดเห็นร่วมกัน
4. Concept Reification (การปรับแนวคิด)	นักเรียนบางคนยังเกิดความสับสนว่าจากเขียนการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวได้อย่างไร	ผู้วิจัยได้แนะนำและอธิบายพร้อมทั้งยกตัวอย่างถึงวิธีการเขียนการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวอย่างละเอียด และใช้คำถามย้อนกลับนักเรียนเป็นรายบุคคล

1.3 วงจรปฏิบัติการที่ 3

การดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการที่ 3 มีลักษณะการดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นวางแผน (Plan)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยได้นำผลการสะท้อนจากการดำเนินการตามวงจรปฏิบัติการที่ 2 มาทำการพิจารณาเกี่ยวกับปัญหาที่เกิดขึ้น จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว ได้แก่ 1) ขณะทำกิจกรรมผู้วิจัยจะต้องอธิบายย้ำก่อนจะเริ่มการทำกิจกรรมทุกอย่างจนนักเรียนเข้าใจตรงกัน 2) ในขั้นที่ 4 Concept Reification (การปรับแนวคิด)จะต้องมีการอธิบายซ้ำและยกตัวอย่างอย่างหลากหลายเพื่อให้นักเรียนเข้าใจกระบวนการและขั้นตอนการคิดยิ่งขึ้น จากนั้นนำมาปรับปรุงแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง การแยกพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสมบูรณ์ จำนวนทั้งสิ้น 3 ชั่วโมง

ขั้นที่ 2 ขั้นปฏิบัติ (Act)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยได้ดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ จำนวน 3 ชั่วโมง ดำเนินกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ตามขั้นตอน 4 ขั้นตอน โดยในแต่ละขั้นตอนมีรายละเอียดในการดำเนินการ ดังนี้

1) Guided Explication (การแนะนำ ชี้แจง)

ผู้วิจัยนำนักเรียนสนทนาในเรื่องของการรายงานข่าวเกี่ยวกับโรคหวัดในโทรทัศน์ และซักถามนักเรียนถึงโทรทัศน์ที่บ้านนักเรียนมีลักษณะอย่างไร หากต้องการซื้อชั้นวางที่มีลักษณะเป็นช่องรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมาวางโทรทัศน์จะต้องซื้อในลักษณะอย่างไร จากนั้นผู้วิจัยได้ตั้งคำถามกระตุ้นให้นักเรียนคิดในประเด็น การเลือกชั้นวางให้มีความพอดีกับโทรทัศน์มีความเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์อย่างไร เราสามารถนำความรู้เรื่องพหุนามมาแก้ปัญหาได้หรือไม่ อย่างไร ผู้วิจัยเปิดกว้างทางความคิดให้นักเรียนตอบตามประสบการณ์ของแต่ละคนซึ่งในช่วงนี้นักเรียนจะได้ตระหนักว่าความรู้ในเรื่องพหุนามสามารถนำมาแก้ปัญหาได้ จากนั้นผู้วิจัยทบทวนความรู้ที่ได้เรียนไปในชั่วโมงที่แล้วในเรื่องของการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว โดยการถามตอบนักเรียนรายบุคคลเพื่อให้นักเรียนแต่ละคนได้แสดงแนวคิดของตนเอง จากนั้นผู้วิจัยแนะนำ อธิบายเกี่ยวกับขั้นตอนการแยกตัวประกอบพหุนามโดยการใช้โปรแกรม GeoGebra และเปิดโอกาสให้นักเรียนซักถามข้อสงสัย

2) Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra)

ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนจับคู่กับเพื่อน ทำการสำรวจพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากด้วยโปรแกรม GeoGebra โดยการลองใช้งานโปรแกรม จากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนแต่ละคู่ฝึกแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ หลังจากทำกิจกรรมผู้วิจัยถามคำถามกระตุ้นให้นักเรียนเกิดการคิดในประเด็นของการแยกตัวประกอบพหุนาม ความสัมพันธ์ที่นักเรียนพบขณะ

แยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์เป็นอย่างไร โดยนักเรียนจะได้แสดงความคิดเห็นต่อสิ่งที่เกิดขึ้นและพูดคุยกับเพื่อนสรุปประเด็นดังกล่าวนำไปสู่การเรียนรู้ในขั้นต่อไป

3) Knowledge classification (การจำแนกความรู้)

หลังจากที่นักเรียนได้ฝึกแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ด้วยโปรแกรม GeoGebra ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 3.1 ตอนที่ 1 เกี่ยวกับการเขียนภาพของแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ เพื่อให้นักเรียนได้เชื่อมโยงแนวคิดจากสิ่งที่เป็นรูปธรรมมาเป็นภาพ จากนั้นผู้วิจัยได้พูดคุย สอบถามเกี่ยวกับภาพที่ได้จากแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ที่นักเรียนแต่ละกลุ่มได้เขียนออกมา เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน

4) Concept Reification (การปรับแนวคิด)

ผู้วิจัยได้ถามกระตุ้นความคิดของนักเรียนถึงวิธีการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ถ้าหากไม่เขียนภาพจะมีวิธีแยกตัวประกอบของพหุนามได้อย่างไร ในขั้นตอนนี้นักเรียนจะได้พูดคุย อภิปรายกันในชั้นเรียน ถึงความสัมพันธ์ที่พบที่สามารถที่นำไปสู่ข้อสรุปเกี่ยวกับวิธีการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ จากนั้นผู้วิจัยได้ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 3.1 ตอนที่ 2 เกี่ยวกับการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนในการเชื่อมโยงแนวคิดจากภาพมาเป็นแนวคิดเชิงนามธรรม และเมื่อทำใบงานกิจกรรมการเรียนรู้เสร็จแล้ว ผู้วิจัยให้นักเรียนจับคู่กับเพื่อนหาความกว้างและความยาวของชั้นวางให้มีขนาดพอดีกับโทรทัศน์ เมื่อกำหนดความยาวของเส้นทแยงมุมและพื้นที่ของโทรทัศน์ให้ โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับพหุนามที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์

ขั้นสังเกต (Observe)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยได้สังเกตการเปลี่ยนแปลงต่างๆ ที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra โดยผู้วิจัยและผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ช่วยกันสังเกตและจดบันทึกลงในแบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยผู้วิจัยได้ผลดังต่อไปนี้

1) Guided Explication (การแนะนำ ชี้แจง)

ผู้วิจัยสนทนากับนักเรียนในเรื่องของการรายงานข่าวเกี่ยวกับโรคหวัดในโทรทัศน์ และซักถามนักเรียนถึงโทรทัศน์ที่บ้านนักเรียนมีลักษณะอย่างไร สังเกตว่านักเรียนยังไม่ค่อยร่วมกันแสดงความคิดเห็นมากเท่าที่ควร ผู้วิจัยจึงได้ตั้งคำถามกระตุ้นให้นักเรียนคิดในประเด็น หากต้องการซื้อชั้นวางที่มีลักษณะเป็นช่องรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมาวางโทรทัศน์จะต้องซื้อในลักษณะอย่างไร การเลือกชั้นวางให้มีความพอดีกับโทรทัศน์มีความเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์อย่างไร เรา

สามารถนำความรู้เรื่องพหุนามมาแก้ปัญหาได้หรือไม่ อย่างไร จากนั้นผู้วิจัยทบทวนความรู้ที่ได้เรียนไปในชั่วโมงที่แล้วในเรื่องของการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว โดยการถามตอบนักเรียนรายบุคคลเพื่อให้นักเรียนแต่ละคนได้แสดงแนวคิดของตนเอง จากการที่ผู้วิจัยใช้คำถาม ถามกระตุ้นนักเรียนเป็นรายบุคคล แต่ยังมีนักเรียนบางคนที่ยังไม่สามารถแสดงแนวคิดออกมาได้อย่างสมบูรณ์ จึงต้องมีเพื่อนและผู้วิจัยช่วยกันเสริมเพื่อให้แนวคิดสมบูรณ์ ทำให้ผู้วิจัยต้องใช้เวลาค่อนข้างมากในการทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนก่อนจะดำเนินการต่อในขั้นต่อไป จากนั้นผู้วิจัยแนะนำ อธิบายเกี่ยวกับขั้นตอนการแยกตัวประกอบพหุนามโดยการใช้โปรแกรม GeoGebra ในช่วงนี้นักเรียนคุ้นเคยกับโปรแกรม GeoGebra ในส่วนของการแยกตัวประกอบดีแล้ว ทำให้ผู้วิจัยไม่ต้องแนะนำหรืออธิบายมากนัก สังเกตได้จากการตอบคำถามและการเข้าใช้งานโปรแกรม

2) Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra)

ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนจับคู่กับเพื่อน ทำการสำรวจพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากด้วยโปรแกรม GeoGebra โดยการลองใช้งานโปรแกรม จากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนจับคู่กับเพื่อนแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ด้วยโปรแกรม GeoGebra พบว่านักเรียนทุกคนสามารถแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้ถูกต้อง สังเกตได้จากการสร้างชิ้นงานนักเรียนไม่ซักถามผู้วิจัยใดๆ เลย ดังภาพ 21 และ 22

ภาพ 21 แสดงการฝึกปฏิบัติการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ด้วยโปรแกรม GeoGebra ของนักเรียน

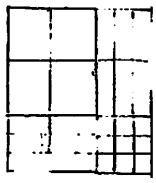
ภาพ 22 แสดงชิ้นงานนักเรียนที่ได้จากการแยกตัวประกอบพหุนาม
ที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ด้วยโปรแกรม GeoGebra

จากการสังเกตพฤติกรรมในการทำงานพบว่านักเรียนสามารถทำได้อย่างคล่องแคล่วและรวดเร็ว หลังจากทำกิจกรรมผู้วิจัยถามคำถามกระตุ้นให้นักเรียนเกิดการคิดในประเด็นของการแยกตัวประกอบพหุนามว่า ความสัมพันธ์ที่นักเรียนพบขณะแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์เป็นอย่างไร ซึ่งนักเรียนส่วนใหญ่สังเกตเห็นความสัมพันธ์ที่ได้และสามารถอธิบายเพื่อแสดงแนวคิดของตนเองได้ เมื่อผู้วิจัยถามย้อนกลับเพื่อสอบถามความเข้าใจของนักเรียนพบว่ามีนักเรียนบางคนสามารถอธิบายความสัมพันธ์ที่พบได้แต่ยังไม่สมบูรณ์ ผู้วิจัยจึงถามนักเรียนโดยรวมเพื่อให้เพื่อนช่วยกันเสริมแนวคิดเพื่อให้แนวคิดนั้นสมบูรณ์

3) Knowledge classification (การจำแนกความรู้)

ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 3.1 ตอนที่ 1 เกี่ยวกับการเขียนภาพของแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ เพื่อให้นักเรียนได้เชื่อมโยงแนวคิดจากสิ่งที่เป็นรูปธรรมมาเป็นภาพ พบว่า นักเรียนแต่ละกลุ่มสามารถเขียนภาพของแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้ถูกต้อง ดังภาพ 23 โดยในกลุ่มนักเรียนได้ปรึกษากันและเสนอแนวคิดของตนเอง นักเรียนมีความตั้งใจในการทำงานอย่างมาก ในขั้นนี้ผู้วิจัยไม่ต้องแนะนำหรืออธิบายใดๆเลย นักเรียนแต่ละกลุ่มมีความคุ้นเคยในการเขียนภาพและสามารถทำได้ด้วยตนเองอย่างถูกต้อง

3. $4x^2-12x+9$



$(2x-3)(2x-3)$

ภาพ 23 แสดงการเขียนภาพการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ของนักเรียนได้อย่างถูกต้อง

4) Concept Reification (การปรับแนวคิด)

ผู้วิจัยถามกระตุ้นความคิดของนักเรียนถึงวิธีการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ถ้าหากไม่เขียนภาพจะมีวิธีแยกตัวประกอบของพหุนามได้อย่างไร ผู้วิจัยได้สอบถามนักเรียนโดยรวมเพื่อให้นักเรียนช่วยกันเสนอแนวคิดและอภิปรายกันในชั้นเรียนถึงความสัมพันธ์ที่พบในขั้นตอนของการสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra พบว่านักเรียนสามารถตอบความสัมพันธ์ที่พบได้แต่ยังไม่สมบูรณ์ ผู้วิจัยได้แนะนำ และอธิบายย้ำอย่างชัดเจนเพื่อเสริมแนวคิดของนักเรียนให้สมบูรณ์ จากนั้นผู้วิจัยได้ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 3.1 ตอนที่ 2 เกี่ยวกับการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนในการเชื่อมโยงแนวคิดจากภาพมาเป็นแนวคิดเชิงนามธรรม พบว่านักเรียนสามารถแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้อย่างถูกต้อง ดังภาพ 24

2. $x^2-38x+361$

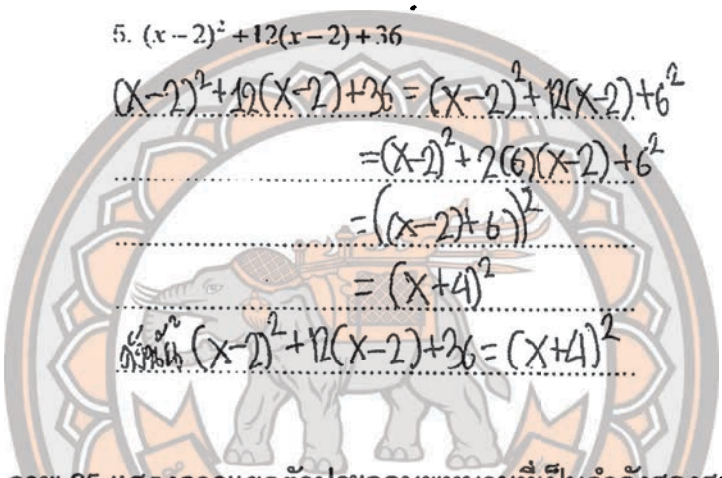
$x^2-38x+361=(x-19)(x+19)$

$=(x-19)^2$

สรุปได้ว่า $x^2-38x+361=(x-19)^2$

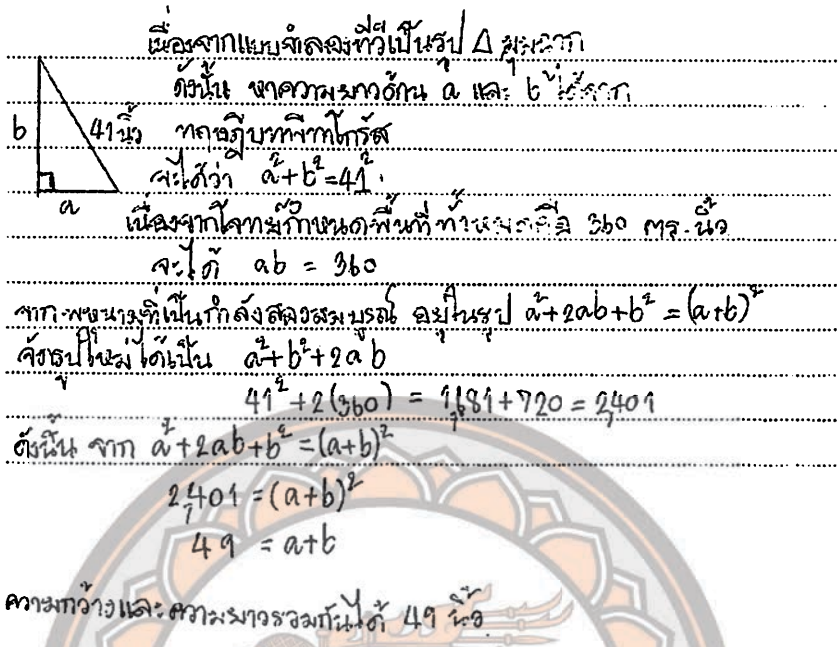
ภาพ 24 แสดงการแยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ของนักเรียนที่สามารถเชื่อมโยงแนวคิดเชิงนามธรรมได้

แต่เมื่อโจทย์มีความซับซ้อนนักเรียนเริ่มสับสนถึงการทำให้พจน์หน้าหรือพจน์หลังอยู่ในรูปกำลังสอง ผู้วิจัยจึงได้ยกตัวอย่างที่แตกต่างกัน หลายตัวอย่างเพื่อแสดงให้นักเรียนเห็นถึงการทำพจน์หน้าและพจน์หลังของพหุนามให้อยู่ในรูปกำลังสอง และอธิบายย้ำพร้อมทั้งถามย้อนกลับเพื่อให้นักเรียนเข้าใจตรงกัน จากนั้นพบว่า เมื่อโจทย์มีความซับซ้อนนักเรียนสามารถแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้ถูกต้อง สังเกตจากการใบกิจกรรมที่ 3.1 ตอนที่ 2 ดังภาพ 25



ภาพ 25 แสดงการแยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ของนักเรียนที่สามารถเชื่อมโยงแนวคิดเชิงนามธรรมได้

แต่มีนักเรียนบางคนที่ยังเขียนไม่ค่อยถูกต้อง เนื่องจากต้องนำความรู้ในเรื่องเลขยกกำลังมาใช้ ซึ่งผู้วิจัยได้ทบทวนความรู้เกี่ยวกับเลขยกกำลัง ทำให้ในขั้นตอนนี้ใช้เวลาค่อนข้างนาน หลังจากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนจับคู่กับเพื่อนหาความกว้างและความยาวของชั้นวางให้มีขนาดพอดีกับโทรทัศน์ เมื่อกำหนดความยาวของเส้นทแยงมุมและพื้นที่ของโทรทัศน์ให้ สังเกตได้ว่านักเรียนปรึกษาคู่ของตนเอง และช่วยกันทำงานเป็นอย่างดี แต่มีนักเรียนบางคู่ได้คำตอบไม่ตรงกับเพื่อนคู่อื่น ทำให้นักเรียนไม่มั่นใจในคำตอบของตนเอง และเมื่อผู้วิจัยสอบถามพบว่านักเรียนมีการคิดคำนวณผิด ทำให้ได้คำตอบไม่ตรงกับเพื่อน ดังภาพ 26



ภาพ 26 แสดงการนำความรู้เรื่องการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ไปใช้ในการแก้สถานการณ์ปัญหา

ขั้นสะท้อนผล (Reflect)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยได้นำข้อมูลระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ผู้วิจัยได้ใช้แบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เป็นเครื่องมือในการเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ ซึ่งบันทึกข้อมูลโดยผู้วิจัยและผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ หลังจากนั้นนำข้อมูลมาทำการวิเคราะห์เพื่อหาแนวทางในการพัฒนาวิธีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น ซึ่งสามารถนำผลจากการวิเคราะห์มาสะท้อนปัญหาและแนวทางการแก้ไขที่เกิดขึ้นในแต่ละขั้นตอนของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มีรายละเอียดดังนี้

1) Guided Explication (การแนะนำ ชี้แจง)

ในขั้นตอนนี้ผู้วิจัยมีความคิดเห็นว่า การนำเข้าสู่กิจกรรมการเรียนรู้โดยการนำนักเรียนสนทนาถึงข่าวสารและโทรทัศน์ในบ้านของนักเรียน ยังไม่ค่อยน่าสนใจและตื่นเต้นมากเท่าที่ควรทำให้นักเรียนไม่ค่อยแสดงความคิดเห็น และตอบคำถามแบบสั้นๆ ผู้วิจัยจึงใช้คำถามถาม-ตอบกับผู้เรียนเป็นรายบุคคล เช่น หากเราจะเลือกซื้อชั้นวางทีวีควรเลือกอย่างไร นักเรียนมีความคิดเห็นว่า

อย่างไร เราสามารถนำความรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ไปใช้ได้หรือไม่ อย่างไร และการทบทวนความรู้เดิมเรื่องการแยกพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว ทำให้นักเรียนสามารถเชื่อมโยงความรู้ไปในเรื่องต่อไปได้ ซึ่งสอดคล้องกับผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่มีความคิดเห็นว่า สถานการณ์ยังไม่สามารถดึงดูดนักเรียนได้เท่าที่ควร ผู้วิจัยควรใช้คำถามกระตุ้นผู้เรียนรายบุคคลเพื่อให้ผู้เรียนได้แสดงความคิดเห็น (ผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้, 24 กุมภาพันธ์ 2563) ดังภาพ 27

1.2 การพัฒนา/ปรับปรุงการสอน

สถานการณ์ยังไม่ค่อยดึงดูดผู้เรียนมากเท่าที่ควร ทำให้ผู้เรียนยังไม่ค่อยแสดงความคิดเห็น

ผู้วิจัยควรใช้คำถามกระตุ้น และทบทวนรายบุคคลผู้เรียนมากๆ

ภาพ 27 แสดงการสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ขั้น Guided Explication (การแนะนำ ชี้แจง) ในวงจรปฏิบัติการที่ 3 โดยผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้

2) Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra)

ในขั้นตอนนี้ผู้วิจัยมีความคิดเห็นว่า ในการทำกิจกรรมด้วยโปรแกรม GeoGebra เป็นกิจกรรมที่ให้นักเรียนสามารถลงมือปฏิบัติกิจกรรมได้ด้วยตนเอง การให้นักเรียนได้ฝึกแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์โดยการลงมือปฏิบัติ ทำให้นักเรียนเกิดเป็นความรู้ที่คงทน และการปรึกษาเพื่อนยิ่งเพิ่มความมั่นใจในการทำงานมากขึ้น ผู้วิจัยจะต้องถามกระตุ้นพร้อมทั้งให้คำแนะนำเป็นการเสริมแรงทางบวกให้นักเรียนมั่นใจในการคิดหาคำตอบ อีกทั้งยังต้องมีการยกตัวอย่างและให้คำแนะนำในบางประเด็นเพื่อให้นักเรียนได้เห็นความสัมพันธ์ที่นักเรียนพบขณะแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ซึ่งสอดคล้องกับผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มีความคิดเห็นว่า นักเรียนให้ความสนใจเกี่ยวกับการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์เป็นอย่างมาก นักเรียนมีองค์ความรู้เป็นของตนเอง สังเกตได้จากการที่นักเรียนไม่ซักถามผู้วิจัยแต่สามารถทำงานได้อย่างถูกต้อง และเมื่อผู้วิจัยถามย้อนกลับนักเรียนสามารถตอบได้อย่างถูกต้อง แต่ในประเด็นของการเกิดแนวคิดการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ผู้วิจัยควรเสริมแนวคิดของนักเรียนให้สมบูรณ์และย้ำให้นักเรียนเข้าใจ (ผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้, 26 กุมภาพันธ์ 2563) ดังภาพ 28

นักเรียน มีความสนใจ และตั้งใจทำงานค่อนข้างมาก นักเรียนมีองค์ความรู้ในเนื้อหา
ทำให้สามารถทำงานค่อนข้างได้อย่างคล่องแคล่วและรวดเร็ว

2.2 การพัฒนา/ปรับปรุงการสอน

ในขั้นนี้นักเรียนเกิดแนวคิดจากการทำงานค่อนข้างได้ไม่สมบูรณ์ ครูควรแนะนำ
และตอบกับนักเรียนเพื่อเสริมแนวคิดให้สมบูรณ์

2.3 แนวทางในการแก้ไขปรับปรุง

ครูควรเพิ่มเติมนักเรียนทุกคน เพื่อดู Concept ของนักเรียน และอธิบายเพิ่มเติม
ให้เข้าใจตรงกันทั้งชั้นเรียน

ภาพ 28 แสดงการสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ขั้น Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra) ในวงจรปฏิบัติการที่ 3 โดยผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้

3) Knowledge classification (การจำแนกความรู้)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยมีความคิดเห็นว่า ผู้เรียนสามารถเขียนภาพของการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้ สังเกตได้จากการทำใบกิจกรรมที่ 3.1 ตอนที่ 1 นักเรียนแต่ละกลุ่มมีความคุ้นเคยในการเขียนภาพและสามารถทำได้ด้วยตนเองอย่างถูกต้อง ผู้วิจัยคิดว่านักเรียนได้เชื่อมโยงแนวคิดจากสิ่งที่เป็นรูปธรรมมาเป็นภาพได้ และมีความเข้าใจถึงภาพที่แต่กลุ่มได้เขียนตอบ สอดคล้องกับผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มีความคิดเห็นและไปในทิศทางเดียวกับผู้วิจัยว่า นักเรียนมีความคล่องแคล่วและสามารถเขียนภาพได้อย่างถูกต้อง อาจเนื่องจากนักเรียนมีความคุ้นเคยในการเขียนภาพและมีความเข้าใจในความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก (ผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้, 26 กุมภาพันธ์ 2563)

4) Concept Reification (การปรับแนวคิด)

ในขั้นตอนนี้ผู้วิจัยและผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มีความคิดเห็นไปในแนวทางเดียวกันว่า นักเรียนส่วนใหญ่สามารถแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้อย่างถูกต้อง แต่มีนักเรียนบางส่วนที่ยังสับสนเมื่อโจทย์มีความซับซ้อนมากขึ้น ผู้วิจัยจะต้องอธิบายและยกตัวอย่างที่หลากหลาย ทบทวนความรู้ในเรื่องเลขยกกำลัง และใช้คำถามย้อนกลับนักเรียนรายบุคคลเพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน ในการทำกิจกรรมทีวีแตตู ซึ่งหาความกว้างและความยาวของชิ้นวางให้มีขนาดพอดีกับโทรทัศน์นักเรียนมีความตั้งใจในการทำงาน

แม้ว่านักเรียนบางคู่อาจจะมีคิดคำนวณที่ผิดพลาด แต่ขั้นตอนวิธีการค่อนข้างถูกต้อง มีนักเรียนส่วนน้อยที่ผู้วิจัยจะต้องให้คำแนะนำเป็นรายบุคคลอย่างสม่ำเสมอ

จากการวิเคราะห์แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัยร่วมกับแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้โดยผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ ในวงจรปฏิบัติการที่ 3 สามารถสรุปได้ดังตาราง 9

ตาราง 9 ปัญหาและแนวทางในการแก้ไขปรับปรุงในวงจรปฏิบัติการที่ 3

ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้	ปัญหา	แนวทางในการแก้ไขปรับปรุง
1. Guided Explication (การแนะนำ ชี้แจง)	การใช้สถานการณ์ปัญหาในขั้นนี้ยังไม่ค่อยน่าสนใจ นักเรียนจึงยังไม่ค่อยช่วยกันตอบคำถาม หรือตอบคำถามแบบสั้นๆ ยังไม่กล้าแสดงความคิดเห็นมากเท่าที่ควร	ผู้วิจัยถามกระตุ้นนักเรียนเป็นรายบุคคลและถามนักเรียนทั้งชั้นเพื่อให้ช่วยกันตอบคำถาม และให้คำแนะนำเพิ่มเติม เช่น หากนักเรียนต้องการซื้อชั้นวางที่มีลักษณะเป็นช่องรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมาวางโทรทัศน์จะต้องซื้อในลักษณะอย่างไร การเลือกชั้นวางให้มีความพอดีกับโทรทัศน์มีความเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์อย่างไร
2. Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra)	นักเรียนบางคนสามารถอธิบายความสัมพันธ์ของการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้แต่ยังไม่สมบูรณ์มากนัก	ผู้วิจัยถามกระตุ้นนักเรียน และอาจชี้แนะแนวทางเพื่อเติมเติมแนวคิดและถามนักเรียนโดยรวมเพื่อให้เพื่อนช่วยกันเสริมแนวคิดนั้นให้สมบูรณ์
3. Knowledge classification (การจำแนกความรู้)	-	ในขั้นตอนนี้ไม่พบปัญหาที่ควรปรับปรุงแก้ไข
4. Concept Reification	1. นักเรียนเกิดความสับสนเมื่อโจทย์มีความซับซ้อนมากขึ้น	1. ผู้วิจัยจะต้องอธิบายย้ำและยกตัวอย่างที่หลากหลายซึ่งมีความ

ตาราง 9 (ต่อ)

ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ (ต่อ)	ปัญหา (ต่อ)	แนวทางในการแก้ไขปรับปรุง (ต่อ)
(การปรับแนวคิด)	2. นักเรียนบางส่วนเขียนการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ยังไม่ค่อยถูกต้อง เนื่องจากนักเรียนยังไม่เข้าใจในเรื่องเลขยกกำลัง 3. นักเรียนไม่มั่นใจในคำตอบของตนเอง	แตกต่างกันและใช้คำถามย้อนกลับนักเรียนเป็นรายบุคคลเพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน 2. ผู้วิจัยได้ทบทวนความรู้เกี่ยวกับเลขยกกำลัง พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบและถามย้อนกลับเพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน 3. ผู้วิจัยจะต้องคอยแนะนำ และซักถามแนวการคิดของนักเรียนแล้วให้นักเรียนถามตอบกับผู้วิจัย เพื่อเสริมความมั่นใจในการคิด

1.4 วงจรปฏิบัติการที่ 4

การดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการที่ 4 มีลักษณะการดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นวางแผน (Plan)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยได้นำผลการสะท้อนจากการดำเนินการตามวงจรปฏิบัติการที่ 3 มาทำการพิจารณาเกี่ยวกับปัญหาที่เกิดขึ้น จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ได้แก่ 1) ขณะทำกิจกรรมผู้วิจัยจะต้องอธิบายย้ำก่อนจะเริ่มการทำกิจกรรมทุกอย่างจนนักเรียนเข้าใจตรงกัน 2) ในขั้นที่ 4 Concept Reification (การปรับแนวคิด) จะต้องมีการอธิบายซ้ำและยกตัวอย่างที่หลากหลายเพื่อให้นักเรียนเข้าใจกระบวนการและขั้นตอนการคิดยิ่งขึ้น จากนั้นนำมาปรับปรุงแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง จำนวนทั้งสิ้น 2 ชั่วโมง

ขั้นที่ 2 ขั้นปฏิบัติ (Act)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยได้ดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง จำนวน 2 ชั่วโมง ดำเนินกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ตามขั้นตอน 4 ขั้นตอน โดยในแต่ละขั้นตอนมีรายละเอียดในการดำเนินการ ดังนี้

1) Guided Explication (การแนะนำ ชี้แจง)

ผู้วิจัยกล่าวถึงสถานการณ์ภัยแล้งที่กำลังจะเกิดขึ้น และถามนักเรียนว่า "น้ำในหมู่บ้านของนักเรียนเพียงพอหรือไม่ ในครัวเรือนของนักเรียนทำอย่างไรหากไม่ไหล และวิธีประหยัดน้ำทำได้อย่างไร" จากนั้นผู้วิจัยเชื่อมโยงประเด็นของการเก็บพักน้ำในแท็งก์น้ำว่า "หากในครัวเรือนของนักเรียนมีแท็งก์น้ำ นักเรียนสามารถคำนวณปริมาตรน้ำให้เพียงพอใช้ในฤดูแล้งได้หรือไม่" ผู้วิจัยใช้คำถามที่เป็นการเปิดกว้างทางความคิดให้นักเรียนตอบตามประสบการณ์ของแต่ละคน และผู้วิจัยถามนักเรียนต่อว่า "หากเราจะคำนวณปริมาตรน้ำในแท็งก์จะต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์เรื่องใดบ้าง" ซึ่งในขั้นตอนนี้นักเรียนจะได้ตระหนักถึงว่ามีความเกี่ยวข้องกันกับคณิตศาสตร์ได้อย่างไร จากนั้นผู้วิจัยทบทวนความรู้ที่ได้เรียนไปในชั่วโมงที่แล้วในเรื่องของการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ โดยการถามตอบนักเรียนรายบุคคลเพื่อให้นักเรียนแต่ละคนได้แสดงแนวคิดของตนเอง จากนั้นผู้วิจัยแนะนำ อธิบายเกี่ยวกับขั้นตอนที่เป็นผลต่างของกำลังสองโดยการใช้โปรแกรม GeoGebra และเปิดโอกาสให้นักเรียนซักถามข้อสงสัย

2) Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra)

ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนจับคู่กับเพื่อน ทำการสำรวจพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากด้วยโปรแกรม GeoGebra โดยการลองใช้งานโปรแกรม จากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนแต่ละคู่ฝึกแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง หลังจากทำกิจกรรมผู้วิจัยถามคำถามกระตุ้นให้นักเรียนเกิดการคิดในประเด็นของการแยกตัวประกอบพหุนาม ความสัมพันธ์ที่นักเรียนพบขณะแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสองเป็นอย่างไร โดยนักเรียนจะได้แสดงความคิดเห็นต่อสิ่งที่เกิดขึ้นและพูดคุยกับเพื่อนสรุปประเด็นดังกล่าวนำไปสู่การเรียนรู้ในขั้นต่อไป

3) Knowledge classification (การจำแนกความรู้)

หลังจากที่นักเรียนได้ฝึกแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสองด้วยโปรแกรม GeoGebra ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 4.1 ตอนที่ 1 เกี่ยวกับการเขียนภาพการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง เพื่อให้นักเรียนได้เชื่อมโยงแนวคิดจากสิ่งที่เป็นรูปธรรมมาเป็นภาพ จากนั้นผู้วิจัยได้พูดคุย สอบถามเกี่ยวกับภาพที่ได้จากการแยกตัว

ประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสองที่นักเรียนแต่ละกลุ่มได้เขียนออกมา เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน

4) Concept Reification (การปรับแนวคิด)

ผู้วิจัยได้ถามกระตุ้นความคิดของนักเรียนถึงวิธีการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง ถ้าหากไม่เขียนภาพจะมีวิธีแยกตัวประกอบของพหุนามได้อย่างไร ในขั้นตอนนี้นักเรียนจะได้พูดคุย อภิปรายกันในชั้นเรียน ถึงความสัมพันธ์ที่พบที่สามารถที่นำไปสู่ข้อสรุปเกี่ยวกับวิธีการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง จากนั้นผู้วิจัยได้ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 4.1 ตอนที่ 2 เกี่ยวกับการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนในการเชื่อมโยงแนวคิดจากภาพมาเป็นแนวคิดเชิงนามธรรม และเมื่อทำใบงานกิจกรรมการเรียนรู้เสร็จแล้ว ผู้วิจัยให้นักเรียนจับคู่กับเพื่อนหาความสูงของแท็งก์น้ำจากเงื่อนไขที่กำหนดให้โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับพหุนามที่เป็นผลต่างของกำลังสอง

ขั้นสังเกต (Observe)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยได้สังเกตการเปลี่ยนแปลงต่างๆ ที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra โดยผู้วิจัยและผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ช่วยกันสังเกตและจดบันทึกลงในแบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยผู้วิจัยได้ผลดังต่อไปนี้

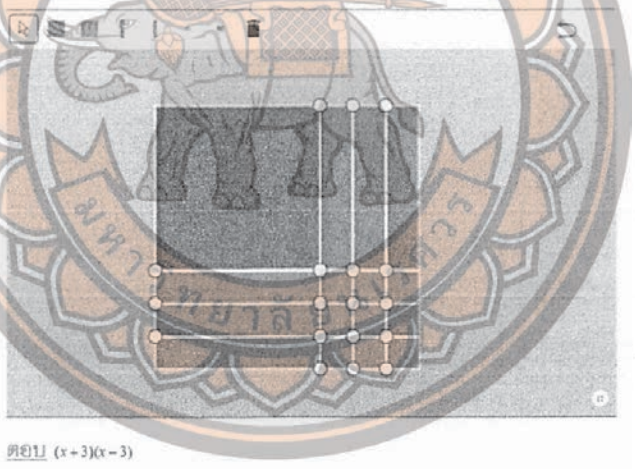
1) Guided Explication (การแนะนำ ชี้แจง)

ผู้วิจัยกล่าวถึงสถานการณ์ภัยแล้งที่กำลังจะเกิดขึ้น และถามนักเรียนว่า "น้ำในหมู่บ้านของนักเรียนเพียงพอหรือไม่ ในครัวเรือนของนักเรียนทำอย่างไรหากไม่ไหล และวิธีประหยัดน้ำทำได้อย่างไร" นักเรียนส่วนใหญ่จะร่วมกันแสดงความคิดเห็นและตอบคำถามในชั้นเรียนอย่างสนุกสนาน และมีความมั่นใจที่จะเสนอแนะข้อคิดเห็นเกี่ยวกับวิธีปฏิบัติหากน้ำไม่ไหล และวิธีประหยัดน้ำ เนื่องจากสถานการณ์ดังกล่าวเป็นสถานการณ์ที่นักเรียนทุกคนพบเจอทุกปี ส่งผลต่อความมั่นใจในการแสดงความคิดมากยิ่งขึ้น จากนั้นผู้วิจัยเชื่อมโยงประเด็นของการเก็บพักน้ำในแท็งก์น้ำว่า "หากในครัวเรือนของนักเรียนมีแท็งก์น้ำ นักเรียนสามารถคำนวณปริมาตรน้ำให้เพียงพอใช้ในฤดูแล้งได้หรือไม่" และ "หากเราจะคำนวณปริมาตรน้ำในแท็งก์จะต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์เรื่องใดบ้าง" จากการสังเกตการตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนตอบคำถามว่าสามารถคำนวณโดยใช้ความรู้ในเรื่องการหาปริมาตรของทรงกระบอก ความสูงของทรงกระบอก คำตอบของนักเรียนแสดงให้เห็นว่านักเรียนได้ตระหนักถึงความเกี่ยวข้องกันกับคณิตศาสตร์ในบริบทของตนเอง จากนั้นผู้วิจัยทบทวนความรู้ที่ได้เรียนไปในชั่วโมงที่แล้วในเรื่องของการแยกตัว

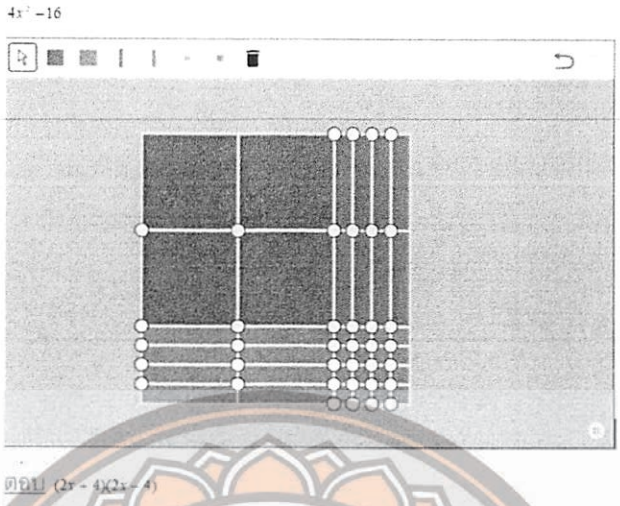
ประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ โดยการถามตอบนักเรียนรายบุคคล เพื่อให้นักเรียนแต่ละคนได้แสดงแนวคิดของตนเอง พบว่านักเรียนส่วนใหญ่สามารถตอบคำถามผู้วิจัยได้ จากนั้นผู้วิจัยแนะนำ อธิบายเกี่ยวกับขั้นตอนการแยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นผลต่างของกำลังสองโดยการใช้โปรแกรม GeoGebra จากการสังเกตพบว่า นักเรียนเข้าใช้งานได้อย่างคล่องแคล่วและรวดเร็วแสดงให้เห็นถึงความคุ้นเคยและความเข้าใจในขั้นตอนเป็นอย่างดี

2) Exploratory Familiarization (**การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra**)

ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนจับคู่กับเพื่อน ทำการสำรวจพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากด้วยโปรแกรม GeoGebra โดยการลองใช้งานโปรแกรม จากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนจับคู่กับเพื่อนฝึกแยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นผลต่างของกำลังสองด้วยโปรแกรม GeoGebra พบว่า สามารถการแยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นผลต่างของกำลังสองได้ถูกต้อง สังเกตได้จากการสร้างชิ้นงาน ซึ่งนักเรียนไม่ซักถามผู้วิจัยใดๆ เลย ดังภาพ 29 และ 30



ภาพ 29 แสดงการฝึกปฏิบัติการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสองด้วยโปรแกรม GeoGebra ของนักเรียน



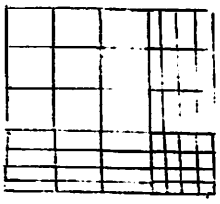
ภาพ 30 แสดงการฝึกปฏิบัติการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสองด้วยโปรแกรม GeoGebra ของนักเรียน

จากการสังเกตพฤติกรรมในการทำงานพบว่านักเรียนสามารถทำได้อย่างคล่องแคล่วและรวดเร็ว หลังจากทำกิจกรรมผู้วิจัยถามคำถามกระตุ้นให้นักเรียนเกิดการคิดในประเด็นของการแยกตัวประกอบพหุนามว่า ความสัมพันธ์ที่นักเรียนพบขณะการแยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นผลต่างของกำลังสองเป็นอย่างไร ซึ่งนักเรียนส่วนใหญ่สังเกตเห็นความสัมพันธ์ที่ได้และสามารถอธิบายเพื่อแสดงแนวคิดของตนเองได้ เมื่อผู้วิจัยถามย้อนกลับเพื่อสอบถามความเข้าใจของนักเรียนพบว่ามีนักเรียนบางคนสามารถอธิบายความสัมพันธ์ที่พบได้แต่ยังไม่สมบูรณ์ ผู้วิจัยจึงถามชี้นำเพื่อให้นักเรียนเติมเต็มคำถามให้สมบูรณ์และถามนักเรียนโดยรวมเพื่อให้เพื่อนช่วยกันเสริมแนวคิดนั้นให้สมบูรณ์

3) Knowledge classification (การจำแนกความรู้)

ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 4.1 ตอนที่ 1 เกี่ยวกับการเขียนภาพของการแยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นผลต่างของกำลังสอง เพื่อให้นักเรียนได้เชื่อมโยงแนวคิดจากสิ่งที่เป็นรูปธรรมมาเป็นภาพ พบว่า นักเรียนแต่ละกลุ่มสามารถเขียนภาพของการแยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นผลต่างของกำลังสองได้ถูกต้อง ดังภาพ 31 โดยในกลุ่มนักเรียนได้ปรึกษากันและเสนอแนวคิดของตนเอง นักเรียนมีความตั้งใจในการทำงานอย่างมาก ในขั้นนี้ผู้วิจัยไม่ต้องแนะนำหรืออธิบายใดๆ เลย นักเรียนแต่ละกลุ่มมีความคุ้นเคยในการเขียนภาพและสามารถทำได้ด้วยตนเองอย่างถูกต้อง

3. $9x^2 - 16$



$(3X+4)(3X-4)$

ภาพ 31 แสดงการเขียนภาพของการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสองด้วยโปรแกรม GeoGebra ของนักเรียน

4) Concept Reification (การปรับแนวคิด)

ผู้วิจัยได้สอบถามนักเรียนทั้งชั้นเพื่อให้นักเรียนช่วยกันเสนอแนวคิดและอภิปรายกันในชั้นเรียนถึงความสัมพันธ์ของการแยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นผลต่างของกำลังสองที่พบขณะสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra พบว่านักเรียนสามารถตอบความสัมพันธ์ที่พบได้แต่ยังไม่สมบูรณ์ ผู้วิจัยได้แนะนำ และอธิบายย้ำอย่างชัดเจนเพื่อเสริมแนวคิดของนักเรียนให้สมบูรณ์ จากนั้นผู้วิจัยได้ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 4.1 ตอนที่ 2 เกี่ยวกับการแยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นผลต่างของกำลังสอง เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนในการเชื่อมโยงแนวคิดจากภาพมาเป็นแนวคิดเชิงนามธรรม พบว่านักเรียนการแยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นผลต่างของกำลังสองได้อย่างถูกต้อง ในขั้นนี้นักเรียนสามารถนำความรู้ในเรื่องเลขยกกำลังมาใช้ในการแยกตัวประกอบได้อย่างถูกต้อง แสดงให้เห็นว่านักเรียนเกิดการเชื่อมโยงแนวคิดของตนเองในเรื่องดังกล่าวได้ แม้โจทย์จะมีความซับซ้อนนักเรียนก็สามารถแต่ทำอย่างถูกต้อง ดังภาพ 32 และ 33

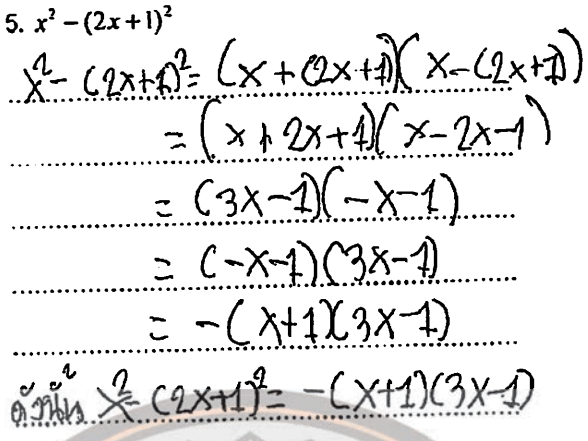
3. $81x^2 - 400$

$81x^2 - 400 = (9x)^2 - 20^2$

$= (9x+20)(9x-20)$

ดังนั้น $81x^2 - 400 = (9x+20)(9x-20)$

ภาพ 32 แสดงการแยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นผลต่างของกำลังสองของนักเรียนที่สามารถเชื่อมโยงแนวคิดเชิงนามธรรมได้



ภาพ 33 แสดงการแยกตัวประกอบพหุนามที่เป็นผลต่างของกำลังสอง ของนักเรียนที่สามารถเชื่อมโยงแนวคิดเชิงนามธรรมได้

แต่มีนักเรียนบางคนที่ยังสับสนบ้างเล็กน้อย ผู้วิจัยได้เดินเข้าไปหานักเรียนรายบุคคลและให้คำแนะนำ อธิบายย้ำจนนักเรียนเข้าใจ สังเกตได้จากการตอบคำถามของนักเรียนและจากใบกิจกรรม จากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนจับคู่กับเพื่อนหาความสูงของแท็งก์น้ำจากเงื่อนไขที่กำหนดให้โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับพหุนามที่เป็นผลต่างของกำลังสอง สังเกตได้ว่านักเรียนปรึกษาคู่ของตนเองและถามผู้วิจัยเพื่อต้องการความมั่นใจในคำตอบของตนเองโดยถามว่า "แบบนี้ใช่ไหมคะ" (นักเรียน, 3 มีนาคม 2563) นักเรียนช่วยกันทำงานเป็นอย่างดี แต่นักเรียนบางคู่ยังต้องใช้เวลาในการเรียนรู้จึงจะสามารถหาคำตอบของวิธีการดังกล่าวได้

ขั้นสะท้อนผล (Reflect)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยได้นำข้อมูลระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ผู้วิจัยได้ใช้แบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เป็นเครื่องมือในการเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ ซึ่งบันทึกข้อมูลโดยผู้วิจัยและผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ หลังจากนั้นนำข้อมูลมาทำการวิเคราะห์เพื่อหาแนวทางในการพัฒนาวิธีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น ซึ่งสามารถนำผลจากการวิเคราะห์มาสะท้อนปัญหาและแนวทางการแก้ไขที่เกิดขึ้นในแต่ละขั้นตอนของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มีรายละเอียดดังนี้

1) Guided Explication (การแนะนำ ชี้แจง)

ในขั้นตอนนี้ผู้วิจัยมีความคิดเห็นว่า การนำเข้าสู่กิจกรรมการเรียนรู้โดยการนำนักเรียนสนทนาถึงสถานการณ์ภัยแล้งและการเก็บพักน้ำไว้ใช้งาน สร้างความน่าสนใจให้นักเรียน เพราะเป็นสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับบริบทชีวิตจริง นักเรียนพบเจอสถานการณ์นี้ทุกปี ทำให้นักเรียนมีความมั่นใจในการตอบคำถาม และอยากรู้ว่าในสถานการณ์ดังกล่าวมีความเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์อย่างไร คำถามที่ผู้วิจัยใช้ควรจะส่งเสริมกระบวนการคิดและเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็นอย่างหลากหลาย และการทบทวนความรู้เดิมเรื่องการแยกพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสมบูรณ์ ทำให้นักเรียนสามารถเชื่อมโยงความรู้ไปในเรื่องต่อไปได้ ซึ่งสอดคล้องกับผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่มีความคิดเห็นว่า สถานการณ์น่าสนใจและมีความใกล้ตัวนักเรียน นักเรียนสามารถนำสถานการณ์ดังกล่าวไปใช้ต่อไปในบริบทชีวิตจริงของนักเรียนได้ (ผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้, 2 มีนาคม 2563)

2) Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra)

ในขั้นตอนนี้ผู้วิจัยมีความคิดเห็นว่า ในการทำกิจกรรมด้วยโปรแกรม GeoGebra เป็นกิจกรรมที่ให้นักเรียนสามารถลงมือปฏิบัติกิจกรรมได้ด้วยตนเอง จากในเรื่องที่ผ่านมาที่นักเรียนได้ฝึกการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองด้วยโปรแกรม GeoGebra ทำให้ในเรื่องต่อไปนักเรียนสามารถปฏิบัติได้อย่างคล่องแคล่วและถูกต้อง นักเรียนเกิดเป็นความรู้ที่คงทน และการปรึกษาเพื่อนยิ่งเพิ่มความมั่นใจในการทำงานมากขึ้น ผู้วิจัยจะต้องถามกระตุ้นพร้อมทั้งให้คำแนะนำเป็นการเสริมแรงทางบวกให้นักเรียนมั่นใจในการคิดหาคำตอบ และเมื่อนักเรียนสังเกตเห็นความสัมพันธ์ของการแยกตัวประกอบพหุนามแล้ว ผู้วิจัยจะต้องถามและอธิบายย้ำให้นักเรียนเข้าใจตรงกัน เพื่อให้แนวคิดนั้นมีความสมบูรณ์ ซึ่งสอดคล้องกับผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มีความคิดเห็นว่า นักเรียนมีความกระตือรือร้นเป็นอย่างมากเมื่อได้เรียนคณิตศาสตร์ด้วยโปรแกรม GeoGebra นักเรียนมองการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองเป็นเรื่องที่ง่าย และนักเรียนได้เกิดแนวคิดเป็นของตนเอง สังเกตได้จากการที่นักเรียนไม่ซักถามผู้วิจัยแต่สามารถทำงานได้อย่างถูกต้อง และเมื่อผู้วิจัยถามย้อนกลับนักเรียนสามารถตอบได้อย่างถูกต้อง อาจจะเนื่องมาจากนักเรียนมีความคุ้นเคยและเข้าใจในการทำกิจกรรม (ผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้, 2 มีนาคม 2563)

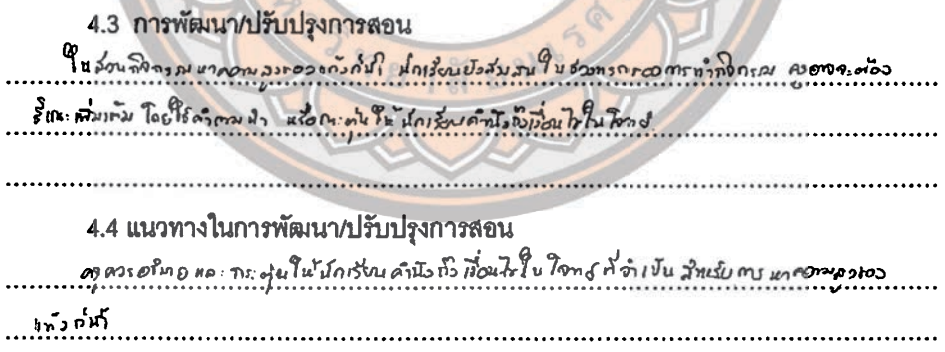
3) Knowledge classification (การจำแนกความรู้)

ในขั้นนี้ผู้วิจัยมีความคิดเห็นว่า ผู้เรียนสามารถเขียนภาพของการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสองได้ สังเกตได้จากการทำใบกิจกรรมที่ 4.1 ตอนที่ 1 นักเรียนแต่ละกลุ่มมีความคุ้นเคยในการเขียนภาพและสามารถทำได้ด้วยตนเองอย่างถูกต้อง ผู้วิจัยคิดว่า

นักเรียนได้เชื่อมโยงแนวคิดจากสิ่งที่เป็นรูปธรรมมาเป็นภาพได้ และมีความเข้าใจถึงภาพที่แต่กลุ่มได้เขียนตอบ สอดคล้องกับผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มีความคิดเห็นและไปในทิศทางเดียวกับผู้วิจัยว่า นักเรียนมีความคล่องแคล่วและสามารถเขียนภาพได้อย่างถูกต้อง อาจเนื่องจากนักเรียนมีความคุ้นเคยในการเขียนภาพและมีความเข้าใจในความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก (ผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้, 3 มีนาคม 2563)

4) Concept Reification (การปรับแนวคิด)

ในขั้นตอนนี้ผู้วิจัยและผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มีความคิดเห็นไปในแนวทางเดียวกันว่า นักเรียนส่วนใหญ่สามารถแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสองได้อย่างถูกต้องแม้โจทย์จะมีความซับซ้อนนักเรียนก็สามารถแต่ทำอย่างถูกต้อง ส่วนนักเรียนบางคนที่ยังสับสนบ้างเล็กน้อย ผู้วิจัยได้เดินเข้าไปหานักเรียนรายบุคคลและให้คำแนะนำอธิบายย้ำจนนักเรียนเข้าใจ สังเกตได้จากการตอบคำถามของนักเรียนและจากใบกิจกรรม ส่วนในการทำกิจกรรมนาบ่อยะ ค้อแคมา มู ซึ่งหาความสูงของแท็งก์น้ำจากเงื่อนไขที่กำหนดให้โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับพหุนามที่เป็นผลต่างของกำลังสอง เป็นกิจกรรมที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ปรึกษากับเพื่อน ได้ทำงานร่วมกัน และแสดงแนวคิดของตนเองออกมา ถึงแม้ว่านักเรียนบางคู่ใช้เวลาในการเรียนรู้นานจึงจะสามารถหาคำตอบของวิธีการดังกล่าวได้ ดังภาพ 34



ภาพ 34 แสดงการสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ขั้น Concept Reification (การปรับแนวคิด) ในวงจรปฏิบัติการที่ 4 โดยผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้

จากการวิเคราะห์แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัยร่วมกับแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้โดยผู้ร่วมสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ ในวงจรปฏิบัติการที่ 4 สามารถสรุปได้ดังตาราง 10

ตาราง 10 ปัญหาและแนวทางในการแก้ไขปรับปรุงในวงจรปฏิบัติการที่ 4

ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้	ปัญหา	แนวทางในการแก้ไขปรับปรุง
1. Guided Explication (การแนะนำ ชี้แจง)	-	ในขั้นตอนนี้ไม่พบปัญหาที่ควรแก้ไขปรับปรุง
2. Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra)	นักเรียนบางคนสามารถอธิบายความสัมพันธ์ของการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสองได้แต่ยังไม่ค่อยสมบูรณ์	ผู้วิจัยถามกระตุ้นนักเรียน และอาจชี้แนะแนวทางถึงความเชื่อมโยงของความสัมพันธ์นั้นเพื่อเติมเติมแนวคิด และถามนักเรียนโดยรวม เพื่อให้เพื่อนช่วยกันเสริมแนวคิดนั้นให้สมบูรณ์
3. Knowledge classification (การจำแนกความรู้)	-	ในขั้นตอนนี้ไม่พบปัญหาที่ควรแก้ไขปรับปรุง
4. Concept Reification (การปรับแนวคิด)	นักเรียนบางส่วนยังไม่ค่อยเข้าใจในการหาความสูงของแท็งก์น้ำ ไม่รู้ว่าจะเริ่มต้นการเขียนในลักษณะอย่างไร	ผู้วิจัยอธิบายแนวทางในการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา โดยเริ่มจากการพิจารณาเงื่อนไขในโจทย์ร่วมกันทั้งชั้นเรียน เพื่อที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้คิดและสร้างแนวทางการแก้ปัญหาได้ด้วยตนเอง ผู้วิจัยคอยแนะนำและซักถามแนวการคิดของนักเรียนแล้วให้นักเรียนถาม-ตอบ กับผู้วิจัยรายบุคคล เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน

ตอนที่ 2 มโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่าง เมื่อจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra

ผู้วิจัยทำการศึกษาผลการจัดการเรียนรู้ และเก็บรวบรวมข้อมูลตามแนวแบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ โดยผู้วิจัยได้แบ่งรูปแบบการรายงานผลการวิจัยเป็น 5 ส่วน ดังนี้

1. มโนมติทางคณิตศาสตร์ระหว่างได้รับการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล พบว่า นักเรียนสามารถพัฒนามโนมติ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ในระหว่างได้รับการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ได้ โดยในวงจรปฏิบัติการที่ 1 และ 2 พบว่า นักเรียนยังมีมโนมติทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อน (MU) แต่เมื่อจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการที่ 3 และ 4 พบว่านักเรียนสามารถปรับเปลี่ยนมโนมติจากเดิมที่มีมโนมติทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อน (MU) ไปสู่มโนมติทางคณิตศาสตร์ (SU) ดังตาราง 11

ตาราง 11 แสดงมโนมติทางคณิตศาสตร์ระหว่างที่ได้รับการจัดการเรียนรู้

วงจรปฏิบัติการ	ร้อยละของจำนวนนักเรียน ระดับมโนมติ				
	SU	PU	PU&MU	MU	NU
วงจรปฏิบัติการที่ 1 (การแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติของการแจกแจง)	78.58	10.20	6.12	5.10	0.00
วงจรปฏิบัติการที่ 2 (การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว)	75.52	12.24	8.16	4.08	0.00
วงจรปฏิบัติการที่ 3 (การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์)	87.76	5.10	7.14	0.00	0.00
วงจรปฏิบัติการที่ 4 (การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง)	90.82	6.12	3.06	0.00	0.00

***หมายเหตุ**

SU หมายถึง มโนมติทางคณิตศาสตร์

PU หมายถึง มโนมติทางคณิตศาสตร์แบบไม่สมบูรณ์

PU&MU หมายถึง มโนมติทางคณิตศาสตร์บางส่วนและมโนมติคลาดเคลื่อนบางส่วน

MU หมายถึง มโนมติทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อน

NU หมายถึง ไม่เข้าใจมโนมติทางคณิตศาสตร์

จากตาราง 11 พบว่า มโนมติระหว่างการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ในระหว่างวงจรปฏิบัติการที่ 1 และ 2 พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีมโนมติอยู่ในระดับ SU แต่ยังมีนักเรียนบางส่วนมีมโนมติอยู่ในระดับ MU และเมื่อจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการที่ 3 และ 4 พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีมโนมติอยู่ในระดับ SU และไม่พบนักเรียนอยู่ในระดับ NU

2. มโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติของการแจกแจงทั้งก่อน และหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล พบว่า นักเรียนสามารถพัฒนามโนมติ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติของการแจกแจงได้ โดยส่วนใหญ่สามารถปรับเปลี่ยนมโนมติจากเดิมที่มีมโนมติทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อน (MU) ไปสู่มโนมติทางคณิตศาสตร์แบบสมบูรณ์ (SU) มากขึ้น ดังตาราง 12

ตาราง 12 แสดงมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติของการแจกแจง ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้

เรื่อง	ร้อยละของจำนวนนักเรียน									
	ระดับมโนมติ									
	SU		PU		PU&MU		MU		NU	
	ก่อน	หลัง	ก่อน	หลัง	ก่อน	หลัง	ก่อน	หลัง	ก่อน	หลัง
การแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติของการแจกแจง	0.00	42.86	23.81	28.57	28.57	19.05	33.33	9.52	14.29	0.00

***หมายเหตุ**

SU หมายถึง มโนมติทางคณิตศาสตร์

PU หมายถึง มโนมติทางคณิตศาสตร์แบบไม่สมบูรณ์

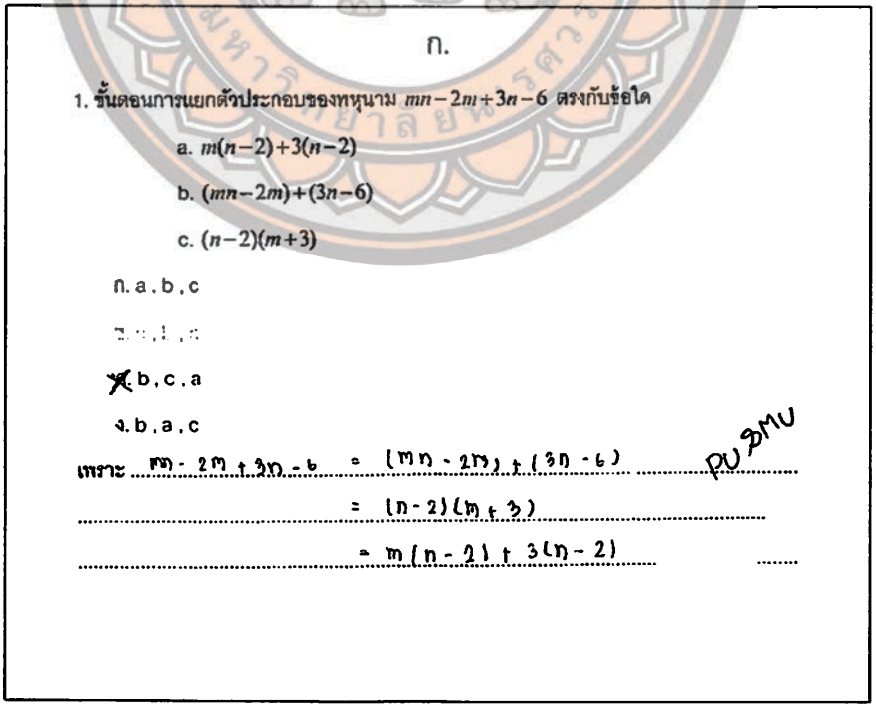
PU&MU หมายถึง มโนมติทางคณิตศาสตร์บางส่วนและมโนมติคลาดเคลื่อนบางส่วน

MU หมายถึง มโนมติทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อน

NU หมายถึง ไม่เข้าใจมโนมติทางคณิตศาสตร์

จากตาราง 12 พบว่า มโนมติก่อนการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติของการแจกแจง นักเรียนส่วนใหญ่มีมโนมติอยู่ในระดับ MU คิดเป็นร้อยละ 33.33 รองลงมา คือ PU&MU คิดเป็นร้อยละ 28.57 และไม่พบนักเรียนอยู่ในระดับ SU ส่วนมโนมติหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีการปรับเปลี่ยนมโนมติทางคณิตศาสตร์ไปสู่ระดับที่สูงขึ้น โดยพบว่านักเรียนส่วนใหญ่อยู่ในระดับ SU คิดเป็นร้อยละ 42.86 และไม่พบนักเรียนอยู่ในระดับ NU

ตัวอย่างการปรับเปลี่ยนมโนมติของนักเรียนเลขที่ 4 ซึ่งจากเดิมมีความเข้าใจในมโนมติทางคณิตศาสตร์บางส่วนและมโนมติคลาดเคลื่อนบางส่วน (PU&MU) ปรับเปลี่ยนไปสู่มโนมติทางคณิตศาสตร์แบบสมบูรณ์ (SU) แสดงไว้ดังภาพ 35



ก.

1. ขั้นตอนการแยกตัวประกอบของพหุนาม $mn-2m+3n-6$ ตรงกับข้อใด

a. $m(n-2)+3(n-2)$

b. $(mn-2m)+(3n-6)$

c. $(n-2)(m+3)$

ก. a, b, c

ข. [illegible]

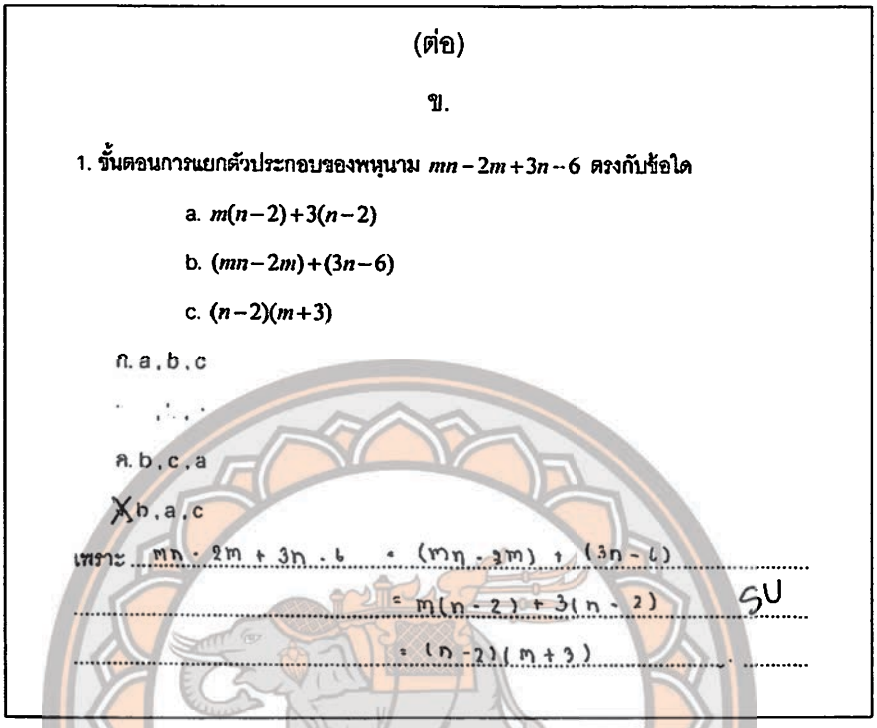
ค. b, c, a

ง. b, a, c

เพราะ $mn-2m+3n-6 = (mn-2m)+(3n-6)$ PU&MU

$= (n-2)(m+3)$

$= m(n-2)+3(n-2)$



(ต่อ)

ข.

1. ขั้นตอนการแยกตัวประกอบของพหุนาม $mn-2m+3n-6$ ตรงกับข้อใด

a. $m(n-2)+3(n-2)$

b. $(mn-2m)+(3n-6)$

c. $(n-2)(m+3)$

ก. a , b , c

ข. b , c , a

X b , a , c

เพราะ mn - 2m + 3n - 6 = (mn - 2m) + (3n - 6)

= m(n - 2) + 3(n - 2) SU

= (n - 2)(m + 3)

ภาพ 35 แสดงตัวอย่างการปรับเปลี่ยนมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติของการแจกแจง

3. มโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวทั้งก่อน และหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล พบว่า นักเรียนสามารถพัฒนามโนมติ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวได้ โดยส่วนใหญ่สามารถปรับเปลี่ยนมโนมติจากเดิมที่มีมโนมติทางคณิตศาสตร์แบบไม่สมบูรณ์ (PU) ไปสู่มโนมติทางคณิตศาสตร์แบบสมบูรณ์ (SU) มากขึ้น ดังตาราง 13

ตาราง 13 แสดงมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ตัวแปรเดียว ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้

เรื่อง	ร้อยละของจำนวนนักเรียน ระดับมโนมติ									
	SU		PU		PU&MU		MU		NU	
	ก่อน	หลัง	ก่อน	หลัง	ก่อน	หลัง	ก่อน	หลัง	ก่อน	หลัง
การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว	0.00	52.38	19.05	28.57	28.57	14.29	33.33	4.76	19.05	0.00

*หมายเหตุ

SU หมายถึง มโนมติทางคณิตศาสตร์

PU หมายถึง มโนมติทางคณิตศาสตร์แบบไม่สมบูรณ์

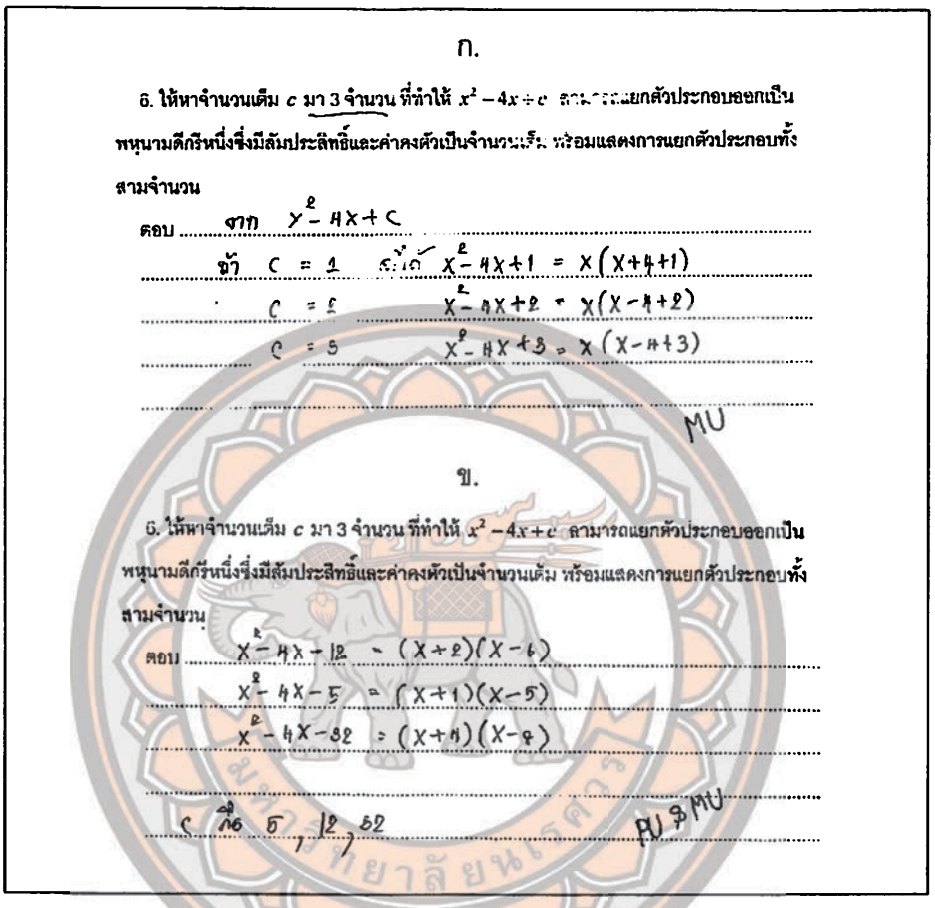
PU&MU หมายถึง มโนมติทางคณิตศาสตร์บางส่วนและมโนมติคลาดเคลื่อนบางส่วน

MU หมายถึง มโนมติทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อน

NU หมายถึง ไม่เข้าใจมโนมติทางคณิตศาสตร์

จากตาราง 13 พบว่า มโนมติก่อนการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว นักเรียนส่วนใหญ่มีมโนมติอยู่ในระดับ MU คิดเป็นร้อยละ 33.33 รองลงมา คือ PU&MU คิดเป็นร้อยละ 28.57 และไม่พบนักเรียนอยู่ในระดับ SU ส่วนมโนมติหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีการปรับเปลี่ยนมโนมติทางคณิตศาสตร์ไปสู่ระดับที่สูงขึ้น โดยพบว่านักเรียนส่วนใหญ่อยู่ในระดับ SU คิดเป็นร้อยละ 52.38 และไม่พบนักเรียนอยู่ในระดับ NU

ตัวอย่างการปรับเปลี่ยนมโนมติของนักเรียนเลขที่ 6 ซึ่งจากเดิมมีความเข้าใจในมโนมติทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อน (MU) ปรับเปลี่ยนไปสู่มโนมติทางคณิตศาสตร์บางส่วนและมโนมติคลาดเคลื่อนบางส่วน (PU&MU) แสดงไว้ดังภาพ 36



ก.

6. ให้หาจำนวนเต็ม c มา 3 จำนวน ที่ทำให้ x^2-4x+c สามารถแยกตัวประกอบออกเป็นพหุนามดีกรีหนึ่งซึ่งมีสัมประสิทธิ์และค่าคงตัวเป็นจำนวนเต็ม พร้อมแสดงการแยกตัวประกอบทั้งสามจำนวน

ตอบ จาก x^2-4x+c

ข้า $c=1$ จะได้ $x^2-4x+1 = x(x+4+1)$

$c=2$ $x^2-4x+2 = x(x-4+2)$

$c=3$ $x^2-4x+3 = x(x-4+3)$

MU

ข.

6. ให้หาจำนวนเต็ม c มา 3 จำนวน ที่ทำให้ x^2-4x+c สามารถแยกตัวประกอบออกเป็นพหุนามดีกรีหนึ่งซึ่งมีสัมประสิทธิ์และค่าคงตัวเป็นจำนวนเต็ม พร้อมแสดงการแยกตัวประกอบทั้งสามจำนวน

ตอบ $x^2-4x-12 = (x+2)(x-6)$

$x^2-4x-5 = (x+1)(x-5)$

$x^2-4x-32 = (x+4)(x-8)$

c คือ $5, 12, 32$ ครับ

AU & MU

ภาพ 36 แสดงตัวอย่างการปรับเปลี่ยนมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว

4. มโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ทั้งก่อน และหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล พบว่า นักเรียนสามารถพัฒนามโนมติ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้ โดยส่วนใหญ่สามารถปรับเปลี่ยนมโนมติจากเดิมที่มีมโนมติทางคณิตศาสตร์แบบไม่สมบูรณ์ (PU) ไปสู่มโนมติทางคณิตศาสตร์ (SU) มากขึ้น ดังตาราง

ตาราง 14 แสดงมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้

เรื่อง	ร้อยละของจำนวนนักเรียน ระดับมโนมติ									
	SU		PU		PU&MU		MU		NU	
	ก่อน	หลัง	ก่อน	หลัง	ก่อน	หลัง	ก่อน	หลัง	ก่อน	หลัง
การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์	0. 00	61.90	9.52	23.81	9.52	14.29	47.62	0.00	33.33	0.00

*หมายเหตุ

SU หมายถึง มโนมติทางคณิตศาสตร์

PU หมายถึง มโนมติทางคณิตศาสตร์แบบไม่สมบูรณ์

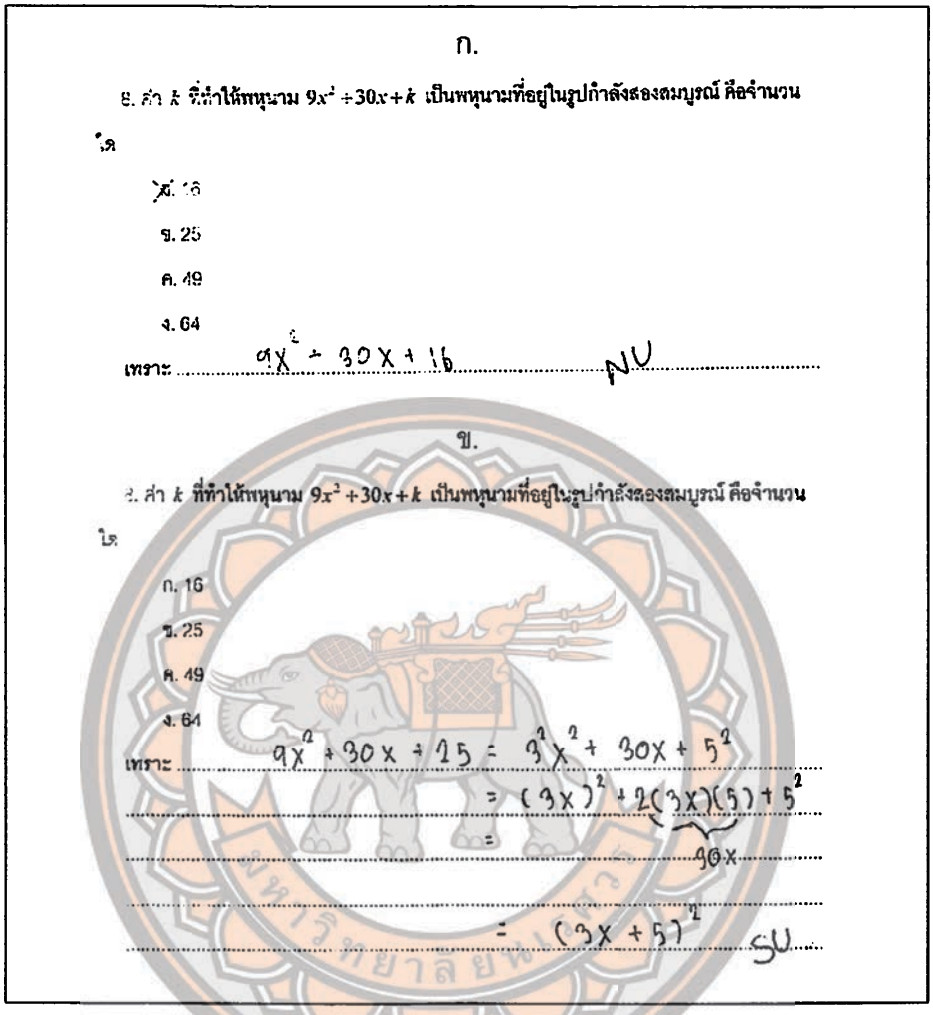
PU&MU หมายถึง มโนมติทางคณิตศาสตร์บางส่วนและมโนมติคลาดเคลื่อนบางส่วน

MU หมายถึง มโนมติทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อน

NU หมายถึง ไม่เข้าใจมโนมติทางคณิตศาสตร์

จากตาราง 14 พบว่า มโนมติก่อนการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ นักเรียนส่วนใหญ่มีมโนมติอยู่ในระดับ MU คิดเป็นร้อยละ 47.62 รองลงมา คือ NU คิดเป็นร้อยละ 33.33 และไม่พบนักเรียนอยู่ในระดับ SU ส่วนมโนมติหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีการปรับเปลี่ยนมโนมติทางคณิตศาสตร์ไปสู่ระดับที่สูงขึ้น โดยพบว่านักเรียนส่วนใหญ่อยู่ในระดับ SU คิดเป็นร้อยละ 61.90 และไม่พบนักเรียนอยู่ในระดับ MU และ NU

ตัวอย่างการปรับเปลี่ยนมโนมติของนักเรียนเลขที่ 4 ซึ่งจากเดิมไม่เข้าใจในมโนมติทางคณิตศาสตร์ (NU) ปรับเปลี่ยนไปสู่มโนมติทางคณิตศาสตร์แบบสมบูรณ์ (SU) แสดงไว้ดังภาพ 37


ก.

ค่า k ที่ทำให้พหุนาม $9x^2+30x+k$ เป็นพหุนามที่อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ คือจำนวน

ใด

ก. 16

ข. 25

ค. 49

ง. 64

เพราะ $9x^2+30x+16$ ..... MU

ข.

ค่า k ที่ทำให้พหุนาม $9x^2+30x+k$ เป็นพหุนามที่อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ คือจำนวน

ใด

ก. 16

ข. 25

ค. 49

ง. 64

เพราะ $9x^2+30x+25 = 3^2x^2+30x+5^2$

$= (3x)^2+2(3x)(5)+5^2$

$= 30x$

$= (3x+5)^2$ SU

ภาพ 37 แสดงตัวอย่างการปรับเปลี่ยนมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์

5. มโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสองทั้งก่อน และหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract **ร่วมกับการใช้โปรแกรม** GeoGebra

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล พบว่า นักเรียนสามารถพัฒนามโนมติ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสองได้ โดยส่วนใหญ่สามารถปรับเปลี่ยนมโนมติจากเดิมที่มีมโนมติทางคณิตศาสตร์แบบคลาดเคลื่อน (MU) ไปสู่มโนมติทางคณิตศาสตร์ (SU) มากขึ้น ดังตาราง 15

ตาราง 15 แสดงมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้

เรื่อง	ร้อยละของจำนวนนักเรียน									
	ระดับมโนมติ									
	SU		PU		PU&MU		MU		NU	
	ก่อน	หลัง	ก่อน	หลัง	ก่อน	หลัง	ก่อน	หลัง	ก่อน	หลัง
การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง	0.00	66.67	14.28	23.81	14.29	9.52	38.10	0.00	33.33	0.00

***หมายเหตุ**

SU หมายถึง มโนมติทางคณิตศาสตร์

PU หมายถึง มโนมติทางคณิตศาสตร์แบบไม่สมบูรณ์

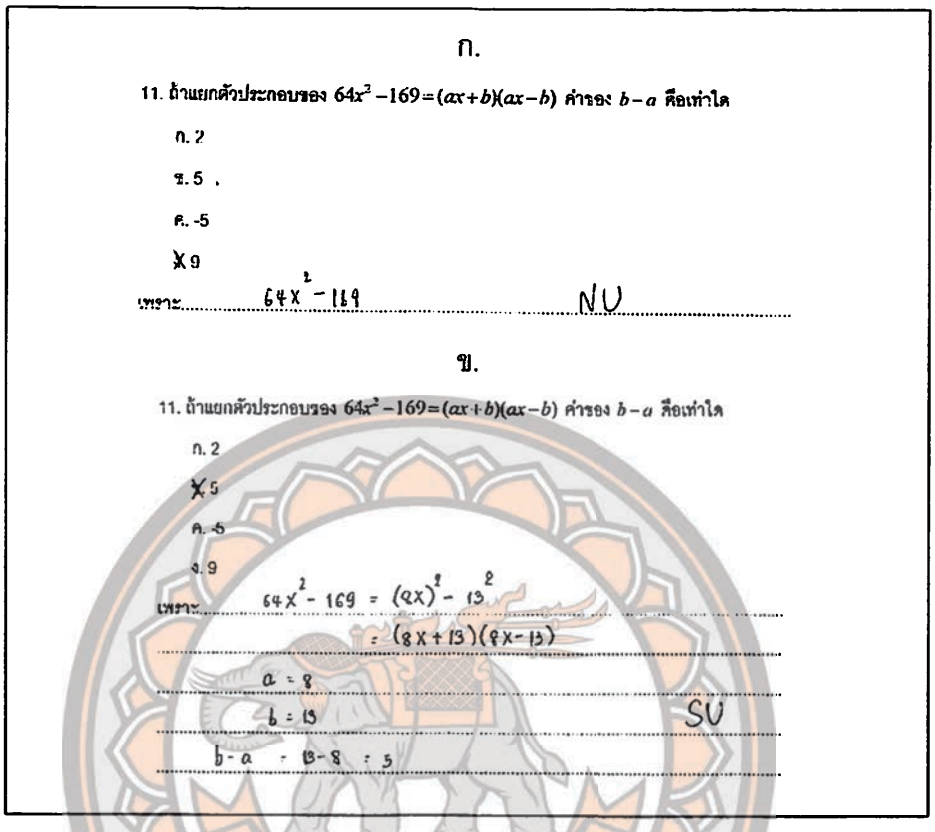
PU&MU หมายถึง มโนมติทางคณิตศาสตร์บางส่วนและมโนมติคลาดเคลื่อนบางส่วน

MU หมายถึง มโนมติทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อน

NU หมายถึง ไม่เข้าใจมโนมติทางคณิตศาสตร์

จากตาราง 15 พบว่า มโนมติก่อนการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง นักเรียนส่วนใหญ่มีมโนมติอยู่ในระดับ MU คิดเป็นร้อยละ 38.10 รองลงมาคือ NU คิดเป็นร้อยละ 33.33 และไม่พบนักเรียนอยู่ในระดับ SU ส่วนมโนมติหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีการปรับเปลี่ยนมโนมติทางคณิตศาสตร์ไปสู่ระดับที่สูงขึ้น โดยพบว่านักเรียนส่วนใหญ่อยู่ในระดับ SU คิดเป็นร้อยละ 66.67 และไม่พบนักเรียนอยู่ในระดับ MU และ NU

ตัวอย่างการปรับเปลี่ยนมโนมติของนักเรียนเลขที่ 2 ซึ่งจากเดิมไม่เข้าใจในมโนมติทางคณิตศาสตร์ (NU) ปรับเปลี่ยนไปสู่มโนมติทางคณิตศาสตร์ (SU) แสดงไว้ดังภาพ 38



ก.

11. ถ้าแยกตัวประกอบของ $64x^2-169=(ax+b)(ax-b)$ ค่าของ $b-a$ คือเท่าใด

ก. 2

ข. 5

ค. -5

ง. 9

เพราะ $64x^2-169$ NU

ข.

11. ถ้าแยกตัวประกอบของ $64x^2-169=(ax+b)(ax-b)$ ค่าของ $b-a$ คือเท่าใด

ก. 2

ข. 5

ค. -5

ง. 9

เพราะ $64x^2-169=(8x)^2-13^2$

$=(8x+13)(8x-13)$

$a=8$

$b=13$ SU

$b-a=13-8=5$

ภาพ 38 แสดงตัวอย่างการปรับเปลี่ยนมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง

บทที่ 5

บทสรุป

การวิจัยปฏิบัติการเพื่อพัฒนามโนมติทางคณิตศาสตร์ด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาแนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ และเพื่อพัฒนามโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยผู้วิจัยขอนำเสนอผลการวิจัยดังนี้

1. สรุปผลการวิจัย
2. อภิปรายผลการวิจัย
3. ข้อเสนอแนะ

1. สรุปผลการวิจัย

1.1 แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์และเพื่อพัฒนามโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ทั้ง 4 วงจร ทำให้ได้ประเด็นการพัฒนาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ซึ่งสามารถสรุปเป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองสำหรับนักเรียนชนเผ่าลาหู่ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 Guided Explication (การแนะนำ ชี้แจง) ในวงจรปฏิบัติการที่ 1 ผู้วิจัยนำเสนอสถานการณ์ "พลุ มู คีสือง" เนื่องจากเป็นประเพณีวันปีใหม่ที่นักเรียนคุ้นเคย นักเรียนจึงสนใจและร่วมกันแสดงความคิดเห็นในการหาความสูงของพลุในวันปีใหม่ ในวงจรปฏิบัติการที่ 2 ผู้วิจัยนำเสนอสถานการณ์ "วะคู คอกหมู" ซึ่งสอดคล้องกับวิถีชีวิตของนักเรียน นักเรียนเกิดความสนใจและร่วมกันแสดงความคิดเห็นในการหาความยาวรอบคอกหมู ในวงจรปฏิบัติการที่ 3 ผู้วิจัย

นำเสนอสถานการณ์ "ทีวี แตตู" นักเรียนบางส่วนยังไม่ค่อยให้ความสนใจและไม่ค่อยแสดงความคิดเห็น ผู้วิจัยจึงถามนักเรียนเป็นรายบุคคลในการเลือกซื้อชั้นวางโทรทัศน์ตามเงื่อนไขที่กำหนด และในวงจรปฏิบัติการที่ 4 ผู้วิจัยนำเสนอสถานการณ์ "นาบ่อแยะ ค้อแคมา มู" เป็นการหาความสูงแท็งก์น้ำของบ้านนักเรียน นักเรียนให้ความสนใจและต้องการรู้ว่าจะหาความสูงของแท็งก์น้ำได้อย่างไร หลังจากการนำเสนอสถานการณ์ในแต่ละวงจรปฏิบัติการ ผู้วิจัยทบทวนความรู้เดิมของนักเรียน โดยถามกระตุ้นพร้อมยกตัวอย่างประกอบ แล้วจึงแนะนำ อธิบายการใช้งานโปรแกรม GeoGebra ที่เกี่ยวกับการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองในแต่ละมโนมติ นักเรียนรู้สึกตื่นเต้นและกระตือรือร้นในการตอบคำถามและซักถามทันทีเมื่อเกิดความสงสัย ดังนั้น ในขั้นนี้การเริ่มต้นด้วยสถานการณ์ในบริบทชีวิตของนักเรียนที่นักเรียนคุ้นเคย ทำให้กิจกรรมมีความน่าสนใจและสร้างความมั่นใจในการตอบคำถาม ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็นอย่างหลากหลาย หากพบนักเรียนไม่ให้ความร่วมมือ ครูจะต้องใช้คำถามกระตุ้นอยู่เสมอเพื่อให้นักเรียนได้มีส่วนร่วม แล้วจึงทบทวนความรู้เดิม หลังจากนั้นผู้วิจัยจึงแนะนำ อธิบายการใช้งานโปรแกรม GeoGebra ที่เกี่ยวข้องกับการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง เป็นโปรแกรมที่นักเรียนให้ความสนใจ กระตือรือร้นในการซักถามข้อสงสัยต่างๆ ซึ่งนักเรียนสามารถเข้าใช้งานโปรแกรมได้อย่างคล่องแคล่วและเป็นส่วนหนึ่งที่ทำให้นักเรียนอยากรู้ว่าจะแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองด้วยโปรแกรม GeoGebra ได้อย่างไร

ขั้นตอนที่ 2 Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra) ในวงจรปฏิบัติการที่ 1 พบว่านักเรียนเกิดความสนใจและกระตือรือร้นในการปฏิบัติกิจกรรมด้วยโปรแกรม GeoGebra เป็นอย่างมาก แต่ยังมีนักเรียนบางส่วนเกิดความสับสนเกี่ยวกับการเขียนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่สัมพันธ์กับการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง และบางส่วนไม่สามารถสร้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้ และพบว่าเมื่อนักเรียนพูดคุยและปรึกษากันเป็นใช้ภาษาถิ่นทำให้ผู้วิจัยไม่เข้าใจการสื่อสาร ในวงจรปฏิบัติการที่ 2 ผู้วิจัยจึงอธิบายพร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบถึงการนำพื้นที่มารวมกันและถามย้อนกลับเพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน และสร้างข้อตกลงกับนักเรียนในระหว่างการจัดกิจกรรมให้สื่อสารเป็นภาษาไทย เพื่อป้องกันการเกิดมโนมติที่คลาดเคลื่อน และในวงจรปฏิบัติการที่ 2 พบว่านักเรียนบางส่วนยังมีความสับสนเล็กน้อยในการสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากด้วยโปรแกรม GeoGebra และไม่มั่นใจในคำตอบของตัวเอง ผู้วิจัยจึงใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนได้อภิปรายแนวคิดของตนเองและคอยชี้แนะอยู่เสมอ ในวงจรปฏิบัติการที่ 3 และ 4 พบว่า นักเรียนสามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่สัมพันธ์กับการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองได้อย่างคล่องแคล่ว มีความมั่นใจในการตอบคำถามและแสดงความคิดเห็นอย่างหลากหลาย มีนักเรียนบางส่วนสามารถอธิบายความสัมพันธ์ได้แต่ยังไม่สมบูรณ์

ผู้วิจัยจึงถามกระตุ้นและถามชี้แนะแนวทางและถามนักเรียนทั้งขั้นเพื่อเสริมแนวคิดให้สมบูรณ์ ดังนั้น ในขั้นนี้การให้นักเรียนสำรวจและฝึกแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองด้วยโปรแกรม GeoGebra นักเรียนจะรู้สึกตื่นเต้น มีความกระตือรือร้นอย่างมาก และเป็นกิจกรรมที่กระตุ้นการเรียนรู้ของนักเรียน ซึ่งก่อนการทำกิจกรรมครูต้องแนะนำและอธิบายให้นักเรียนได้เข้าใจตรงกัน และครูควรนำนักเรียนสรุปกิจกรรมว่า นักเรียนได้สังเกตเห็นความสัมพันธ์อะไรบ้าง และความสัมพันธ์นั้นเป็นอย่างไร

ขั้นตอนที่ 3 Knowledge classification (**การจำแนกความรู้**) ในวงจรปฏิบัติการที่ 1 พบว่า นักเรียนบางส่วนยังไม่มั่นใจในการวาดภาพ และไม่กล้าเขียนคำตอบเพราะกลัวผิด ในวงจรปฏิบัติการที่ 2 ผู้วิจัยจึงใช้คำถามกระตุ้นและถามตอบกับนักเรียนเพื่อเสริมความมั่นใจในการคิดกระตุ้นให้นักเรียนในกลุ่มแสดงความคิดเห็นร่วมกัน และในวงจรปฏิบัติการที่ 2 พบว่า นักเรียนบางกลุ่มใช้ในการวาดภาพเกินกว่าที่กำหนด ดังนั้นในวงจรปฏิบัติการที่ 3 และ 4 ผู้วิจัยจึงคอยกระตุ้นให้นักเรียนช่วยกันทำงาน แบ่งหน้าที่ให้ชัดเจน จะเห็นว่าในขั้นนี้ส่งเสริมให้นักเรียนกลุ่มเกี่ยวกับการเขียนภาพของแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง เพื่อให้นักเรียนได้เชื่อมโยงแนวคิดจากสิ่งที่เป็นรูปธรรมมาเป็นภาพ ให้นักเรียนได้วิเคราะห์ความสัมพันธ์ที่พบก่อนหน้า และสังเคราะห์เป็นองค์ความรู้ของตนเอง ส่งเสริมให้นักเรียนมีปฏิสัมพันธ์ที่ดีต่อกันภายในกลุ่ม เป็นการแลกเปลี่ยนเรียนรู้กันภายในกลุ่ม ครูควรแนะนำให้นักเรียนแบ่งหน้าที่ในการทำงานให้ชัดเจน เพื่อไม่ให้เกิดความซ้ำซ้อนในการทำงาน และเพื่อให้นักเรียนตระหนักถึงบทบาทหน้าที่ของตนเอง ครูจะต้องควบคุมดูแลนักเรียนอย่างใกล้ชิด และคอยให้คำแนะนำทันทีที่นักเรียนแต่ละกลุ่มพบข้อสงสัยหรือต้องการความช่วยเหลือ

ขั้นตอนที่ 4 Concept Reification (**การปรับแนวคิด**) ในวงจรปฏิบัติการที่ 1 นักเรียนบางส่วนเกิดความผิดพลาดในการแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจง อันเนื่องจากความผิดพลาดของการคูณจำนวนเต็ม ในวงจรปฏิบัติการที่ 2 ผู้วิจัยจึงตรวจสอบและทบทวนความรู้ที่จำเป็น โดยการอธิบาย ยกตัวอย่างประกอบ และเน้นย้ำกับนักเรียนหลายๆรอบ เพื่อให้เกิดความเข้าใจที่ตรงกัน นอกจากนี้ในวงจรปฏิบัติการที่ 2 พบว่านักเรียนบางส่วนเกิดความสับสนว่าจะแสดงการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวได้อย่างไร ในวงจรปฏิบัติการที่ 3 ผู้วิจัยจึงใช้การพูดคุยให้นักเรียนได้อธิบายสิ่งที่นักเรียนเข้าใจและวิธีการที่จะดำเนินการเพื่อสรุปเป็นประเด็นในการเขียนตอบ และในวงจรปฏิบัติการที่ 3 พบว่า นักเรียนเกิดความสับสนเมื่อโจทย์มีความซับซ้อนมากขึ้น ดังนั้นในวงจรปฏิบัติการที่ 4 ผู้วิจัยจึงอธิบายย้ำและยกตัวอย่างที่หลากหลายมีความแตกต่างกัน แล้วให้นักเรียนอธิบายสิ่งที่นักเรียนเข้าใจและวิธีดำเนินการ เพื่อเป็นแนวทางใน

การเขียนได้ และหลังการจัดกิจกรรมในแต่ละวงจรแล้ว ผู้วิจัยจะต้องนำสรุปความรู้ในแต่ละมโนมติโดยถามผู้เรียนรายบุคคลเพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน จะเห็นว่าในขั้นนี้ ครูควรนำนักเรียนสรุปความสัมพันธ์ที่ได้จากการทำกิจกรรมก่อนหน้า โดยเป็นการทบทวนความเข้าใจว่าเมื่อนักเรียนผ่านกิจกรรมการเรียนรู้ขั้นต่างๆ มาแล้ว นักเรียนมีความเข้าใจในเรื่องนั้นๆ มากน้อยเพียงใด เพื่อเชื่อมโยงแนวคิดจากภาพมาเป็นแนวคิดเชิงนามธรรม ครูต้องใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนทั้งชั้นช่วยกันตอบคำถามเพื่อสร้างความเข้าใจที่ตรงกัน ครูควรให้ความสนใจกับนักเรียนมากเป็นพิเศษเนื่องด้วยถ้านักเรียนเกิดข้อสงสัยครูต้องคอยซักถาม เพื่อสร้างให้นักเรียนเห็นแนวทางที่จะนำไปซึ่งคำตอบด้วยตนเอง ครูอาจจะแนะนำนักเรียนบ้างแต่ควรหลีกเลี่ยงการบอกแนวโดยตรง ซึ่งจะเป็นการปิดกั้นโอกาสทางความคิดของนักเรียน

1.2 **มโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่าง เมื่อจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ** Concrete Pictorial Abstract **ร่วมกับการใช้โปรแกรม** GeoGebra

มโนมติที่ 1 เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติของการแจกแจง ในการจัดการกิจกรรมเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ซึ่งวัดตามแบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ จำนวน 3 ข้อ จากการวิเคราะห์แบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ก่อนและหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ พบว่า จากเดิมที่ไม่มีนักเรียนคนใดที่มีมโนมติทางคณิตศาสตร์ (SU) แต่หลังจัดกิจกรรมการเรียนรู้พบว่ามีนักเรียนร้อยละ 42.86 มีมโนมติทางคณิตศาสตร์สมบูรณ์ (SU) และนักเรียนกลุ่มที่ไม่เข้าใจในมโนมติทางคณิตศาสตร์ (NU) ลดลง จากเดิมร้อยละ 14.29 ลดลงเหลือร้อยละ 0.00

มโนมติที่ 2 เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว ในการจัดการกิจกรรมเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ซึ่งวัดตามแบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ จำนวน 3 ข้อ จากการวิเคราะห์แบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ก่อนและหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ พบว่า จากเดิมที่ไม่มีนักเรียนคนใดที่มีมโนมติทางคณิตศาสตร์ (SU) แต่หลังจัดกิจกรรมการเรียนรู้พบว่ามีนักเรียนร้อยละ 52.38 มีมโนมติทางคณิตศาสตร์ (SU) นักเรียนกลุ่มที่มีมโนมติทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อน (MU) ลดลง จากเดิมร้อยละ 33.33 ลดลงเหลือร้อยละ 4.76 และนักเรียนกลุ่มที่ไม่เข้าใจในมโนมติทางคณิตศาสตร์ (NU) ลดลง จากเดิมร้อยละ 19.05 ลดลงเหลือร้อยละ 0.00

มโนมติที่ 3 เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ในการจัดการกิจกรรมเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ซึ่งวัดตามแบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ จำนวน 3 ข้อ จากการวิเคราะห์แบบ

สำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ก่อนและหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ พบว่า จากเดิมที่ไม่มีนักเรียนคนใดที่มีมโนมติทางคณิตศาสตร์ (SU) แต่หลังจัดกิจกรรมการเรียนรู้พบว่ามีนักเรียนร้อยละ 61.90 มีมโนมติทางคณิตศาสตร์ (SU) นักเรียนกลุ่มที่มีมโนมติทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อน (MU) ลดลง จากเดิมร้อยละ 42.67 ลดลงเหลือร้อยละ 0.00 และนักเรียนกลุ่มที่ไม่เข้าใจในมโนมติทางคณิตศาสตร์ (NU) ลดลง จากเดิมร้อยละ 33.33 ลดลงเหลือร้อยละ 0.00

มโนมติที่ 4 เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง ในการจัดการกิจกรรมเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ซึ่งวัดตามแบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ จำนวน 3 ข้อ จากการวิเคราะห์แบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ก่อนและหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ พบว่า จากเดิมที่ไม่มีนักเรียนคนใดที่มีมโนมติทางคณิตศาสตร์ (SU) แต่หลังจัดกิจกรรมการเรียนรู้พบว่ามีนักเรียนร้อยละ 66.67 มีมโนมติทางคณิตศาสตร์ (SU) นักเรียนกลุ่มที่มีมโนมติทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อน (MU) ลดลง จากเดิมร้อยละ 38.10 ลดลงเหลือร้อยละ 0.00 และนักเรียนกลุ่มที่ไม่เข้าใจในมโนมติทางคณิตศาสตร์ (NU) ลดลง จากเดิมร้อยละ 33.33 ลดลงเหลือร้อยละ 0.00

2. อภิปรายผลการวิจัย

2.1 แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่าง

แนวทางการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ สามารถอภิปรายได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 Guided Explication (การแนะนำ ชี้แจง) การใช้สถานการณ์ที่อยู่ในบริบทชีวิตจริงของนักเรียนเพื่อเพิ่มความน่าสนใจในการทำกิจกรรม สามารถสร้างให้นักเรียนเกิดความตระหนักถึงคุณค่าของการนำคณิตศาสตร์ไปใช้กับสถานการณ์จริง เป็นส่วนที่ทำให้นักเรียนอยากรู้ว่าในสถานการณ์ดังกล่าวมีความเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์อย่างไร ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ พรนิภา ยอดวัน (2014 อ้างถึงใน รหัท ติ๊บแปง, 2562) ที่กล่าวว่า การที่นักเรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับบริบทใกล้ตัวของนักเรียน ซึ่งนักเรียนแต่ละคนมีความรู้เดิมในเรื่องเหล่านี้อยู่แล้ว ส่งผลให้นักเรียนเกิดความตื่นตัวในการเรียนรู้ สนใจในการเข้าร่วมกิจกรรมมากยิ่งขึ้นและได้เรียนรู้จากของจริง ลงมือปฏิบัติจริง ทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้และจดจำกิจกรรมเหล่านี้ไปใช้จริงในชีวิตประจำวันของตน นักเรียนจะมีความมั่นใจในคำตอบของตนเองมากยิ่งขึ้น ก่อนเริ่มต้นการเรียนรู้การทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนเป็นสิ่งที่จำเป็น สอดคล้องกับแนวคิดของ Hewson

(1988, อ้างถึงใน ยาเซร์ หะสาเมาะ, 2562) ที่กล่าวว่า ก่อนการเรียนรู้นั้นนักเรียนแต่ละคนไม่ได้มีความว่างเปล่าในสมองแต่จะมีมโนมติเดิมอยู่ก่อนแล้ว เป็นเครื่องชี้นำกำหนดสิ่งที่จะรับรู้ใหม่ ซึ่งนักเรียนจะเป็นผู้สร้างความรู้ใหม่ด้วยตนเอง โดยอาศัยความรู้เดิมที่มีอยู่ก่อนแล้วในการแปลความหมาย สารสนเทศใหม่จนกระทั่งเกิดเป็นสิ่งที่มีความหมายต่อตนเอง

ขั้นตอนที่ 2 Exploratory Familiarization **(การสำรวจด้วยโปรแกรม** GeoGebra**)** ควรให้นักเรียนสำรวจและฝึกแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองด้วยโปรแกรม GeoGebra ด้วยตนเอง ซึ่งสามารถสร้างความสนใจและกระตือรือร้นในการทำกิจกรรม เป็นสร้างความรู้ความเข้าใจสามารถมองเห็นความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกับการตัวประกอบพหุนามดีกรีสองได้แต่มีนักเรียนบางส่วนอธิบายความสัมพันธ์ที่พบได้แต่ยังไม่สมบูรณ์ ผู้วิจัยจึงมีคำถามที่คอยกระตุ้นความคิดเพื่อให้นักเรียนได้อธิบายความสัมพันธ์ให้สมบูรณ์ และใช้คำถามที่ทำให้นักเรียนเห็นเป็นรูปธรรม อย่างไรก็ดี Putri (2015) ได้นำเสนอไว้ว่า รูปแบบการสอนแบบ CPA นั้น ผู้สอนควรอย่างยิ่งที่จะเลือกใช้สิ่งที่เป็นรูปธรรม ทั้งนี้เพื่อสร้างความเคยชินอันจะนำไปสู่ความคล้อยตามในบริบทของคณิตศาสตร์ที่เป็นเชิงสัญลักษณ์ต่างๆ โดยประเด็นส่วนนี้จะสามารถนำนักเรียนไปสู่ความสามารถในการแก้ปัญหาตามบริบทจริง จากการศึกษาของ วุฒิชัย ภูดี (2559) ได้อธิบายว่าโปรแกรม GeoGebra เป็นสื่อเทคโนโลยีที่ช่วยให้การสอนคณิตศาสตร์เป็นรูปธรรม ช่วยให้ผู้เรียนสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง และเป็นการเรียนโดยเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ พัฒนาทักษะของการนึกภาพหรือภาพเคลื่อนไหว กระบวนการแก้ปัญหา และเกิดกระบวนการคิดและสามารถเป็นตัวอธิบายเพื่อสร้างความเข้าใจที่กระจ่างชัดเพราะนักเรียนสามารถเห็นได้อย่างเป็นรูปธรรม สอดคล้องกับ ภานุมาศ วรสันต์ (2561) ที่กล่าวว่า การเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โปรแกรมจีโอจีบราเป็นกิจกรรมที่ให้ผู้เรียนเป็นผู้ลงมือปฏิบัติโดยครูเป็นผู้คอยชี้แนะ ผ่านกระบวนการสร้างอย่างเป็นระบบและมีวิธีการที่เหมาะสม มีความเป็นรูปธรรม มีความรู้กับเรื่องที่เรียนดีขึ้นและสามารถคิดแก้ปัญหาได้ ในส่วนประเด็นของการสื่อสารภาษาถิ่นของนักเรียนนั้น เนื่องด้วยบริบทของนักเรียนเป็นชนเผ่าลาหู่ พื้นฐานครอบครัวไม่ได้ใช้ภาษาไทยในการสื่อสาร การสร้างข้อตกลงร่วมกันในชั้นเรียนในการสื่อสารเป็นภาษาไทย ทำให้สามารถป้องกันการสื่อสารที่ผิดพลาดหรือการเกิดมโนมติที่คลาดเคลื่อนได้

ขั้นตอนที่ 3 Knowledge classification **(การจำแนกความรู้)** ควรจัดการเรียนรู้ผ่านกระบวนการกลุ่มเพื่อเป็นให้นักเรียนได้ทำงานร่วมกัน เปิดโอกาสให้นักเรียนได้วิเคราะห์ความสัมพันธ์แล้วนำมาแลกเปลี่ยนเรียนรู้กัน ทำให้นักเรียนสามารถมองเห็นแนวคิดที่แตกต่างและหลากหลายเพื่อค้นพบข้อสรุป สอดคล้องกับงานวิจัยของ ภานุมาศ วรสันต์ (2561) กล่าวว่า การใช้กิจกรรมกลุ่มในการจัดการเรียนการสอน นักเรียนจะมีการแลกเปลี่ยนความรู้ แสดงความคิดเห็น

ตลอดจนการซักถามข้อสงสัยกันภายในกลุ่มได้เป็นอย่างดี และเกิดความสามัคคีกันภายในกลุ่มจนทำให้การทำงานสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ในประเด็นของการวาดภาพเพื่อเชื่อมโยงแนวคิดจากสิ่งที่เป็นรูปธรรมมาเป็นภาพนั้น ได้มีการอธิบายไว้ในการศึกษาของ Hui et al. (2017) ได้อธิบายว่าการสอนแบบ CPA ไม่ใช่เพียงแต่ว่านำเสนอสื่อ หรือกิจกรรมให้นักเรียนแล้วจะเพียงพอสำหรับการสร้างมโนมติทางคณิตศาสตร์ได้ด้วยตนเอง อย่างไรก็ดีความจำเป็นอย่างยิ่งคือ ครูจะต้องให้นักเรียนฝึกการเชื่อมโยงแนวคิดจากสิ่งที่เป็นรูปธรรมมาเป็นภาพ

ขั้นตอนที่ 4 Concept Reification (**การปรับแนวคิด**) ครูควรนำนักเรียนสรุปความสัมพันธ์ที่ได้จากการทำกิจกรรมก่อนหน้า โดยใช้การตั้งคำถามเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนสามารถสรุปความเข้าใจในแต่ละมโนมติทางคณิตศาสตร์ และให้นักเรียนอธิบายแนวคิดในมโนมตินั้นๆ สอดคล้องกับแนวคิดของ อัมพร ม้าคนอง (2553) กล่าวว่า การใช้คำถามของครูมีความสำคัญเป็นอย่างมากต่อการคิดและการมีส่วนร่วมของนักเรียนในชั้นเรียน และยังเป็นเครื่องมือในการประเมินความเข้าใจของนักเรียนระหว่างการเรียนการสอน บางครั้งเมื่อนักเรียนตอบคำถามหรือคิดไม่ได้ แต่ครูช่วยเหลือด้วยการชี้แนะ หรือตั้งคำถามใหม่ที่ง่ายกว่า นักเรียนจะค่อยๆตอบได้ และอาจนำไปสู่การแก้ปัญหาที่ต้องการได้ ผู้วิจัยยังพบว่า นักเรียนบางส่วนยังสับสนในการเขียนแสดงแนวคิดของตนเอง ผู้วิจัยจึงกระตุ้นให้นักเรียนเขียนแนวคิดของตัวเองตามที่ตัวเองเข้าใจก่อน ไม่จำเป็นต้องเริ่มเขียนตามหนังสือ ถือเป็นอีกหนึ่งประเด็นสำคัญที่นักเรียนหลายคนให้ความกังวลเรื่องถูก ผิด จะต้องเหมือนที่ครูสอนทุกคำหรือไม่ ตามที่ Purwadi et al. (2019) ได้กล่าวถึงการเรียนการสอนด้วยวิธีการ CPA ว่าสามารถส่งเสริมให้นักเรียนมีความมั่นใจที่จะนำเสนอความเข้าใจออกมาเป็นภาษาของนักเรียนเอง ซึ่งถือว่าเป็นการพัฒนาที่ดีขึ้น อย่างไรก็ดีโดยภาพรวมในขั้นที่ 4 พบว่า นักเรียนบางคนเมื่อเห็นโจทย์แล้วสามารถแสดงการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองเป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้เลย ในขณะที่บางคนเลือกที่จะวาดภาพก่อนแล้วจึงค่อยดำเนินการ และเช่นเดียวกันบางคนใช้โปรแกรม GeoGebra เพื่อหาคำตอบ ประเด็นนี้สะท้อนให้เห็นถึงวิธีในการแก้ปัญหาผ่านขั้นตอนวิธีการสอนแบบ CPA ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ทั้งนี้เป็นไปในทิศทางเดียวกับการศึกษาของ Strickland et al. (2016) ที่สรุปไว้ว่า CPA นั้นเป็นกระบวนการที่ช่วยส่งเสริมกระบวนการคิดของนักเรียน ตลอดจนนักเรียนที่มีความบกพร่องทางการเรียนรู้คณิตศาสตร์สามารถพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้ รวมไปถึงขั้นตอนกระบวนการที่นำไปสู่การสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์

2.2 มโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่าง เมื่อจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra

หลังจากการจัดการเรียนรู้ครบทั้ง 4 วงจรปฏิบัติการแล้วพบว่า นักเรียนมีการพัฒนามโนมติทางคณิตศาสตร์มากที่สุด ได้แก่ การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง รองลองมาคือ การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว และการแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติของการแจกแจง ตามลำดับ เนื่องจากในวงจรปฏิบัติที่ 1 นักเรียนยังไม่คุ้นเคยกับการใช้งานโปรแกรม GeoGebra จึงทำให้นักเรียนเกิดความสับสนและไม่รู้ว่าจะสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้อย่างไร และนักเรียนไม่คุ้นเคยกับการเชื่อมโยงแนวคิดตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ทำให้การมองความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์เป็นไปได้ยาก และในวงจรปฏิบัติที่ 2, 3 และ 4 นักเรียนมีความคุ้นเคยกับการใช้งานโปรแกรม สามารถใช้งานได้อย่างคล่องแคล่ว เนื่องจากผู้วิจัยปรับเวลาในขั้นที่ 2 ให้มากขึ้นทำให้นักเรียนได้ฝึกปฏิบัติ สร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง นอกจากนี้ผู้วิจัยได้ถามกระตุ้น ชี้แนะแนวทาง เปิดโอกาสให้นักเรียนได้อธิบาย พูดคุย และแสดงความคิดเห็น ทำให้นักเรียนสามารถสังเกต วิเคราะห์และสรุปความสัมพันธ์ที่พบ และเขียนแสดงแนวคิดของตนเองได้ สอดคล้องการศึกษาของ Putri et al. (2018) ที่อธิบายว่า การสอนโดยเริ่มด้วยวัสดุที่เป็นรูปธรรมจะช่วยให้นักเรียนเพิ่มพูนความสามารถในการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับโลกแห่งความเป็นจริง และการสร้างองค์ความรู้ที่เป็นนามธรรมนั้นจะเกิดขึ้นไม่ได้เลย หากปราศจากการเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของสิ่งที่เป็นรูปธรรม หรือมองเห็นที่เป็นนามธรรมออกมาเป็นภาพในใจของเรา และจากการศึกษาของ Antohe (2009 อ้างถึงใน อธิภูมิ พาสงค์, 2016) พบว่า โปรแกรม GeoGebra เป็นเครื่องมือที่ทำให้นักเรียนได้เกิดการสำรวจทำความเข้าใจในเนื้อหาคณิตศาสตร์ได้ง่ายขึ้นกว่าการเรียนแบบเดิม โปรแกรม GeoGebra เป็นเครื่องมือที่ช่วยกระตุ้นให้เกิดการค้นพบ โดยนักเรียนจะได้เห็นภาพในตอนแรกแล้วทำการวิเคราะห์ปัญหา ช่วยพัฒนาพื้นฐานของตนเองในเชิงรูปธรรมก่อน แล้วค่อยๆ พัฒนาการเรียนรู้ไปสู่ระดับที่สูงขึ้น

3. ข้อเสนอแนะ

ผู้วิจัยสรุปแนวคิดและข้อเสนอแนะจากการวิจัยเพื่อพัฒนามโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra สำหรับนักเรียนชนเผ่าลาหู่ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ดังนี้

3.1 ข้อเสนอแนะในการนำไปใช้

3.1.1 ครูควรอธิบายการใช้งานโปรแกรม GeoGebra อย่างละเอียดและชัดเจน เพื่อสร้างความเข้าใจร่วมกันก่อน และในขั้นตอนการสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra ครูควรให้เวลานักเรียนได้ฝึกปฏิบัติ เพราะขั้นตอนนี้เป็นการสร้างความเข้าใจ และสร้างความคุ้นเคยกับแนวคิดทางคณิตศาสตร์จะทำให้นักเรียนสามารถสร้างองค์ความรู้ได้ด้วยตนเอง

3.1.2 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ การใช้คำถามของครูมีความสำคัญอย่างมาก ที่จะช่วยให้นักเรียนสามารถเชื่อมโยงแนวคิดจากสิ่งที่เป็นรูปธรรมไปสู่ภาพและนามธรรม ครูจะต้องใช้คำถามกระตุ้น ถามย้อนกลับ แนะนำแนวทาง เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนเชื่อมโยงความรู้และเกิดการเรียนรู้ได้ด้วยตนเอง

3.1.3 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra เป็นการนำโปรแกรม GeoGebra มาใช้เป็นสื่อการสอนที่เป็นรูปธรรม (Concrete) และเชื่อมโยงสิ่งที่เป็นรูปธรรมนั้นมาเป็นภาพ (Pictorial) แล้วจึงเรียนรู้ผ่านสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ (Abstract) ซึ่งการจะก้าวมาถึง Abstract ได้นั้น จะต้องอาศัย Concrete และ Pictorial ในการปูพื้นฐานให้นักเรียนก่อน จนท้ายที่สุดแล้วนักเรียนจะสามารถเรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างเป็นนามธรรมได้ด้วยตนเอง จะเห็นว่าการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หากครูใช้สื่อที่มีเป็นรูปธรรมมากเท่าไหร่ นักเรียนก็จะสามารถพัฒนามโนมติได้ดียิ่งขึ้นและสามารถเชื่อมโยงความรู้นั้นไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้

3.2 ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

ควรศึกษาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมหรือพัฒนาความสามารถในด้านต่างๆ เช่น ความสามารถในการแก้ปัญหา ความสามารถในการเชื่อมโยง และความสามารถในการใช้เทคโนโลยี ในขั้นตอนการสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra การจำแนกความรู้ และการปรับแนวคิด

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

กระทรวงศึกษาธิการ. (2560). **ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560)**. กรุงเทพฯ: ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.

กัณทิมา ตราบุรี. (2556). **การศึกษาการเปลี่ยนแปลงมโนมติทางคณิตศาสตร์เรื่อง วงกลม โดยการจัดกิจกรรมซ่อมเสริม ที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3**. วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยขอนแก่น, ขอนแก่น.

กุลนิดา วรสารนันท์. (2552). **ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยใช้โมเดลการอุปนัยที่มีต่อมโนทัศน์ และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3**. วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.

ไข่มุก เลื่องสุนทร. (2552). **การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับจำนวนของนักเรียนชั้นมัธยม ศึกษาปีที่ 1 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาราชบุรี เขต 1**. วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.

โครงการ TIMSS 2007. (2552). ผลการศึกษาแนวโน้มการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ระดับนานาชาติของโครงการ TIMSS 2007 ประเทศไทยอยู่ตรงไหน.**นิตยสาร สสวท.**, 37(160), 7-11.

งามพร้อม อ่อนบัวขาว. (2556). **การศึกษาการเปลี่ยนแปลงมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่องเส้นขนาน โดยการจัดกิจกรรมซ่อมเสริม สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2**. วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยขอนแก่น, ขอนแก่น.

ชัญญา อุทิศ. (2557). **ผลการจัดกิจกรรมการเรียนเรื่อง "กำหนดการเชิงเส้น" ที่ส่งเสริมกระบวนการทางคณิตศาสตร์ โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียน สมุทรสาครบูรณะ จังหวัดสมุทรสาคร**. ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต (การสอนคณิตศาสตร์), มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, กรุงเทพฯ.

ทองคำ นาสมตรึก. (2555). **การวิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1**. วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม, มหาสารคาม.

ทัศนีย์ บุญโย. (2553). **การปรับเปลี่ยนมโนมติ เรื่อง เศษส่วน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนโดยใช้โปรแกรม** The Geometer's Sketchpad. วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยขอนแก่น, ขอนแก่น.

ธัญญารัตน์ จูมแพง. (2554). **การศึกษาการเปลี่ยนแปลงมโนมติและระดับความเข้าใจทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามกรอบทฤษฎีของ** van Hiele(1954) **เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น**. วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยขอนแก่น, ขอนแก่น.

ธัศวินทร์ ยิ้มละมัย. (2557). **การวินิจฉัยมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปี ที่ 2 โรงเรียนในสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา กรุงเทพมหานคร**. วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยรามคำแหง, กรุงเทพฯ.

นัฏฐพร กมลทิพย์. (2554). **การเปลี่ยนแปลงมโนมติทางวิทยาศาสตร์ และความสัมพันธ์ระหว่างความเชื่อในแรงจูงใจกับการเปลี่ยนแปลงมโนมติ เรื่อง การสลายสารอาหารระดับเซลล์ โดยใช้ยุทธศาสตร์การสอนเพื่อเปลี่ยนแปลงมโนมติ**. วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยขอนแก่น, ขอนแก่น.

นิวัฒน์ ศรีสวัสดิ์. (2548). **การปรับเปลี่ยนมโนมติ เรื่อง แรงและกฎการเคลื่อนที่ โดยใช้การจัดการเรียนรู้บนเครือข่ายที่พัฒนาตามแนวทฤษฎีคอนสตรัคติวิซซึม**. วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยขอนแก่น, ขอนแก่น.

ปราณี พรภวิษย์กุล. (2549). **ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ โดยใช้โมเดลการสร้างมโนทัศน์ ที่มีต่อมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ และความคงทนในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 กรุงเทพมหานคร**. วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.

ปิยะวุฒิ ศรีชนะ. (2556). **ชุดการเรียนการสอนเรื่องกำหนดการเชิงเส้นโดยใช้โปรแกรม GeoGebra สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6**. วิทยานิพนธ์ปริญญา วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี, อุบลราชธานี.

ปุญยนุช กูลเพชร์. (2552). **การศึกษาความคิดรวบยอดที่ผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เลขยกกำลัง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนพระตำหนักสวนกุหลาบ**. สารนิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, นครนายก.

ผ่องฉวี ไวยาวัจมัย. (2561). **การวิเคราะห์ความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชาติพันธุ์ ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 และ 6 จังหวัดแม่ฮ่องสอน.** วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, เชียงใหม่.

พรประสิทธิ์ ศรีสุพรรณ. (2553). **การปรับเปลี่ยนมโนมติเรื่องเซลล์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้ยุทธศาสตร์การสอนเพื่อเปลี่ยนมโนมติตามแนวคิดของ Hewson and Hewson (2003).** วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยขอนแก่น, ขอนแก่น.

พร้อมพรรณ อุดมสิน. (2544). **การวัดและการประเมินผลการเรียนการสอนคณิตศาสตร์.** กรุงเทพฯ: บริษัท บพิธการพิมพ์จำกัด.

มณีรัตน์ ขยันกลาง. (2559). **การวิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางพีชคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่** 1. วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต,มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม, มหาสารคาม.

ละออง พรมราช. (2556). **การศึกษาการเปลี่ยนแปลงมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่องความน่าจะเป็น โดยการสอนซ่อมเสริมที่ใช้ตัวนำเสนอที่หลากหลายเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่** 3. วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยขอนแก่น, ขอนแก่น.

วุฒิชัย ภูดี. (2559). การวิเคราะห์ข้อมูลสถิติด้วยโปรแกรม GeoGebra. **รอบรู้คณิต.** ปีที่ 4, 23-27.

ศิริเดช สุชีวะ. (2538). **การวินิจฉัยมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน.** กรุงเทพฯ : ศูนย์ตำราและเอกสารทางวิชาการ. คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ศิลาพร อินไผ่. (2557). **การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน เรื่องความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในจังหวัดกำแพงเพชร.** วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยนเรศวร, พิษณุโลก.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2554). **ครูคณิตศาสตร์มืออาชีพเส้นทางสู่ความสำเร็จ.** กรุงเทพมหานคร : กระทรวงศึกษาธิการ.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2562). **หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่** 2. (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สมเกียรติ พาบุ. (2558). **การใช้โปรแกรม Geogebra ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ตามกระบวนการแก้ปัญหาของโพลยา เรื่อง แคลลูลัสเบื้องต้น สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6**. วิทยานิพนธ์ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยราชภัฏนครราชสีมา, นครราชสีมา.

สยุมพร สุ่มมาตย์. (2559). **การสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในจังหวัดสมุทรสาคร**. วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยบูรพา, ชลบุรี.

สิรินภา กิจเกื้อกูล. (2557). **การจัดการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ ทิศทางสาหรับครูทศวรรษที่ 21**. เพชรบูรณ์: จุลดิศการพิมพ์.

โสภาพรรณ ศิริรัตน์. (2527). **การเปรียบเทียบความเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ห้า ที่มีแบบการคิดต่างกัน**. วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.

อธิภูมิ พาสงค์. (2559). **การใช้โปรแกรม GeoGebra ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้รูปแบบ 4MAT เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6**. วิทยานิพนธ์ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยราชภัฏนครราชสีมา, นครราชสีมา.

อัมพร ม้าคนอง. (2547). "ความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ : จุดเน้นของงานสอนคณิตคณิตศาสตร์". ใน พร้อมพรรณ อุดมสิน และอัมพร ม้าคนอง (บรรณาธิการ). **ประมวลบทความหลักการและแนวทางการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์**. (หน้า 110 – 125). กรุงเทพฯ:บพิธการพิมพ์.

เอื้อมพร หลินเจริญ สิระศักดิ์ อาจวิชัย และ ภีรภา จันทร์อินทร์. (2552). **ปัจจัยเชิงสาเหตุที่ทำให้คะแนนการทดสอบ O-NET ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6**. กรุงเทพฯ: สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ (องค์การมหาชน).

Ashlock. (2006). R. B. Error Patterns in Computtation : Using Error Patterns to Improve Instruction. (9 ed.). Upper Saddle Ridge, NJ : Pearson Merrill Prentice Hall.

Bourne, L., Bruce R. & Roger, L. (1971). **The Psychology of Thingkig**. New Jersey : Prentice – Hall.

Brunsell, E. (2008). **Conceptual Change: Lecture One**. Retrieved August 25, 2009, from http:// stemnow.wikispaces.com/file/view/lecture1.pdf

Hui, C., Hoe, L., & Lee, K. (2017). Teaching and Learning with Concrete-Pictorial-Abstract Sequence – A Proposed Model. **The Mathematics Educator**. Vol.17, No.1&2, 1-28.

Chi, H. & Roscoe, R. (2002). The Process and Challenges of Conceptual Change. In M. Limon and L. Mason (Eds), **Reconsidering Conceptual Change : Issues in Theory And Practice**. Dordrecht, The Netherlands : Kluwer Academic Publishers.

Drews, D. (2005). Children's Errors in Mathematics : Understanding Common Misconception In Primary School. **"Children's Mathematical Error and Misconceptions : Perspectives on the Teacher's Role**. In A. Hansen (ed),". Great Britain : Bell and Bain.

Dykstra et al. (1992) Studying Conceptual Change in Learning Physics. **Science Education**,76(6), 615-652.

Fisher, K. (1985). A Misconception in Biology: Amino Acid and Translation. **Journal of Research in science Teaching**, 22, 53-62

Flores, M. (2010). Using the Concrete–Representational–Abstract Sequence to Teach Subtraction With Regrouping to Students at Risk for Failure. **Journal : Remedial and Special Education**. Volume 31 Number 3 May/June 2010, 195-207. [Online].Tersedia:http://resourcebinder802a.wikispaces.com/file/view/Effective+Math+Strategies+CRA.pdf.[20 Januari 2012]

Good, C. (1959). Dictionary of Education. **United States Of Ameica : McGraw-Hill Book Company**.

Haidar, A. (1997). Prospective Chemistry Teachers' Conception of the Conservation of Matter and Related Concepts. **Journal of research in science Teaching**, 34(2), 181-197.

Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology. (2012). **Mathematical skills and processes (3rd ed.)**. Bangkok: 3Q Media. (in Thai)

Sharma, J. & Connor, D. (2017). Developing a concrete-pictorial-abstract model for negative number arithmetic. **Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics**. 37(2).

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School

Mathematics. Reston, VA : NCTM.

Vlassis, J. (2008). The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: The case of the minus sign. **Philosophical Psychology**, 21(4), 555-570.

Witzel, B. (2005). Using CRA to teach algebra to students with math difficulties in inclusive settings. Learning Disabilities. **A Contemporary Journal**. 3(2), 49-60.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก รายนามผู้เชี่ยวชาญ และตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการค้นคว้า

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วนินทร พูนไพบูลย์พิพัฒน์	อาจารย์ประจำภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร
2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิเชียร ธำรงโสตถิสกุล	อาจารย์ประจำภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

บันทึกข้อความ

ส่วนราชการ บัณฑิตวิทยาลัย งานวิชาการ โทร. ๘๘๑๙

ที่ อว ๐๖๐๓.๐๒/ว ๐๐๔๙ **วันที่** ๖ มกราคม ๒๕๖๓

เรื่อง ขอความอนุเคราะห์ตรวจแก้ไขเครื่องมือที่ใช้ในการค้นคว้าอิสระ

เรียน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิเชียร อำพงไพศิลกุล

ด้วย นางสาวสุภาภรณ์ พรหมากาศ รหัสประจำตัว ๖๓๐๗๓๗๘ นิสิตปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา สังกัดบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร ได้ทำการค้นคว้าอิสระ เรื่อง **"กรณีศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่าง"** เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สิรินภา กิจเกื้อกูล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ

ในการค้นคว้าอิสระเกี่ยวกับเรื่องนี้ บัณฑิตวิทยาลัย พิจารณาแล้วเห็นว่าท่านเป็นผู้ที่มีความรู้ความเชี่ยวชาญในเรื่องนี้เป็นอย่างดียิ่ง จึงใคร่ขอเรียนเชิญท่านเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจแก้ไขเครื่องมือที่ใช้ในการค้นคว้าอิสระ ดังแบบบาพร้อมนี้ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร หวังเป็นอย่างยิ่งว่าคงจะได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี และขอขอบพระคุณอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ศิวไลย์ วนรัตน์วิจิตร)
รองคณบดีฝ่ายวิชาการ ปฏิบัติราชการแทน
คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

บันทึกข้อความ

ส่วนราชการ บัณฑิตวิทยาลัย งานวิชาการ โทร. ๘๘๓๙

ที่ อว ๐๖๐๓.๐๖/ว ๐๐๔๓ **วันที่** ๖ มกราคม ๒๕๖๓

เรื่อง ขอความอนุเคราะห์ตรวจแก้ไขเครื่องมือที่ใช้ในการค้นคว้าอิสระ

เรียน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วันทร พุนโพธิ์ลย์พิพัฒน์

ด้วย นางสาวสุกานรงค์ พรหมาภาศ รหัสประจำตัว ๖๑๐๙๑๓๘๘ นิสิตปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา สังกัดบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร ได้ทำการค้นคว้าอิสระ เรื่อง **"กรณีศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง ของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ในเขตภาคเหนือตอนล่าง"** เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สิรินภา กิจเกื้อกูล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ

ในการค้นคว้าอิสระเกี่ยวกับเรื่องนี้ บัณฑิตวิทยาลัย พิจารณาแล้วเห็นว่าท่านเป็นผู้ที่มีความรู้ความเชี่ยวชาญในเรื่องนี้เป็นอย่างดียิ่ง จึงใคร่ขอเรียนเชิญท่านเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจแก้ไขเครื่องมือที่ใช้ในการค้นคว้าอิสระ ดังแนบมาพร้อมนี้ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร หวังเป็นอย่างยิ่งว่าคงจะได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี และขอขอบคุณอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ศิริไลช์ วนรัตน์วิจิตร)
รองคณบดีฝ่ายวิชาการ ปฏิบัติราชการแทน
คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

ภาคผนวก ข แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562
หน่วยการเรียนรู้ที่ 5 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง
เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว
วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. ..... ใช้เวลา 3 ชั่วโมง/คาบ

---

1. **มาตรฐานการเรียนรู้ / ตัวชี้วัด**

มาตรฐานการเรียนรู้

สาระที่ 1 จำนวนและพีชคณิต

ค 1.2 เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน ลำดับและอนุกรม และนำไปใช้

ตัวชี้วัด

ค 1.2 ม.2/1 เข้าใจและใช้การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

2. **จุดประสงค์การเรียนรู้**

2.1 ด้านความรู้

นักเรียนสามารถแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวได้

2.2 ด้านทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์

2.2.1 นักเรียนสามารถใช้เทคโนโลยีสารสนเทศเป็นเครื่องมือในการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวได้

2.2.2 นักเรียนสามารถใช้ความรู้ในเรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวไปแก้ปัญหาจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

2.3 ด้านคุณลักษณะ (คุณธรรมจริยธรรมและค่านิยมอันพึงประสงค์)

นักเรียนมีความรับผิดชอบ

3. สาระสำคัญ

พหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว หรือ พหุนามกำลังสอง (quadratic polynomial) คือ พหุนามที่เขียนได้ในรูป ax^2+bx+c เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัวที่ $a \neq 0$ และ x เป็นตัวแปร

4. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นตอนที่ 1 Guided Explication (การแนะนำ ชี้แจง) (30 นาที)

1. ครูสนทนากับนักเรียนเกี่ยวกับการเลี้ยงสัตว์ในหมู่บ้านของนักเรียน โดยสอบถามนักเรียนถึงประเด็นการเลี้ยงสัตว์ในหมู่บ้าน เช่น หากเลี้ยงแล้วสัตว์อะไรที่ต้องมีคอก หากมีคอกแล้วคอกมีลักษณะเป็นอย่างไร เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนร่วมกันแสดงความคิดเห็น จากนั้นครูถามกระตุ้นเพื่อจุดประเด็นสงสัยว่าเราจะสามารถหาความยาวของคอกหมูโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับพหุนามได้อย่างไร เมื่อครูจุดประเด็นสงสัยให้กับนักเรียนแล้ว ครูสนทนากับนักเรียนว่า เราจะหาความยาวของคอกหมูเมื่อเรียนจบในเรื่องนี้

2. ครูทบทวนการแยกตัวประกอบพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจงที่เรียนในชั่วโมงที่แล้ว โดยการยกตัวอย่างและถาม-ตอบกับนักเรียนรายบุคคลเพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน

3. จากนั้นครูแนะนำให้นักเรียนได้รู้จักพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวหรือพหุนามกำลังสองที่อยู่ในรูป ax^2+bx+c เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ $c=0$ โดยครูได้ยกตัวอย่างพหุนามแล้วถามกระตุ้นความคิดนักเรียนว่าจะสามารถแยกตัวประกอบพหุนามได้อย่างไร นักเรียนพบข้อสังเกตอะไรบ้าง ให้นักเรียนได้พิจารณาพหุนามตัวอย่าง

4. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปราย จนได้ข้อสรุปร่วมกันว่า "ในการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวนั้น เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม และ $c=0$ สามารถใช้สมบัติการแจกแจง และมีตัวประกอบร่วมเป็นเอกนาม"

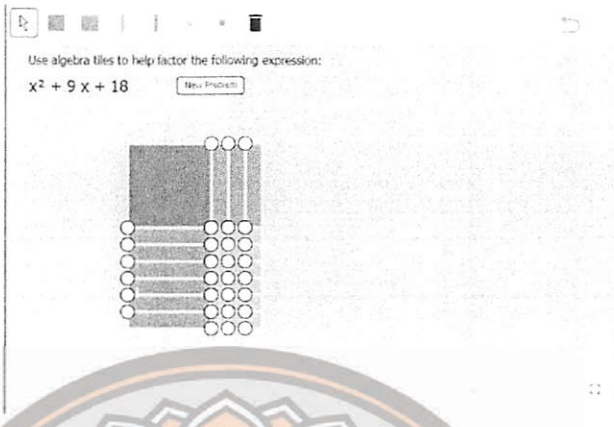
5. ครูแนะนำ อธิบายเกี่ยวกับขั้นตอนการใช้งานโปรแกรม GeoGebra ในเนื้อหาการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว พร้อมทั้งเปิดโอกาสให้นักเรียนซักถามข้อสงสัย

ขั้นตอนที่ 2 Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra) (75 นาที)

6. ให้นักเรียนจับคู่กับเพื่อน ทำการสำรวจพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากด้วยโปรแกรม GeoGebra โดยการลองใช้งานโปรแกรม

7. ให้นักเรียนแต่ละคู่ฝึกแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวโดยอาศัยความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากจากโปรแกรม GeoGebra และให้นักเรียนส่งชิ้นงานหลังจากทำกิจกรรม โดยครูอธิบายเพิ่มเติมหรือแนะนำเพิ่มเติมหากนักเรียนยังพบข้อสงสัย

ตัวอย่างการเปรียบเทียบพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากจากโปรแกรม GeoGebra

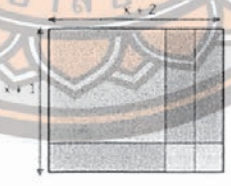


8. ให้นักเรียนร่วมกันศึกษาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากจากชิ้นงานที่นักเรียนสร้างแล้วนำมาแลกเปลี่ยนเรียนรู้กันในชั้นเรียน เพื่อให้เห็นถึงความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกับการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวมากขึ้น

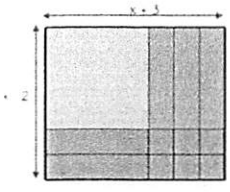
ขั้นตอนที่ 3 Knowledge classification (การจำแนกความรู้) (30 นาที)

9. จากการฝึกการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวโดยเปรียบเทียบการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมแล้ว ให้นักเรียนเขียนภาพการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวลงในใบกิจกรรมที่ 2.1 เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว ตอนที่ 1 เช่น

1. จงแยกตัวประกอบของ x^2+3x+2



2. จงแยกตัวประกอบของ x^2+x-6



9. ครูและนักเรียนพูดคุย และอภิปรายถึงการเขียนภาพของการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว โดยครูแนะนำเพิ่มเติมหากนักเรียนพบข้อสงสัย

ขั้นตอนที่ 4 Concept Reification (การปรับแนวคิด) (45 นาที)

10. ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 2.1 เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว ตอนที่ 2 เป็นรายบุคลเพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนในการเชื่อมโยงแนวคิดมาเป็นแนวคิดเชิงนามธรรม

11. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยใบกิจกรรมที่ 2.1 จากนั้นให้นักเรียนแต่ละคู่ทำกิจกรรม "วะคู คอกหมู" ในใบกิจกรรมที่ 2.2 "วะคู คอกหมู" เป็นกิจกรรมที่ให้นักเรียนหาความยาวรอบคอกหมูซึ่งเป็นสัตว์ที่หมู่บ้านของนักเรียนส่วนใหญ่เลี้ยงไว้ โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว ครูอาจช่วยนักเรียนโดยการถามคำถามกระตุ้นความคิด หากนักเรียนทำกิจกรรมเสร็จแล้ว ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยกิจกรรม

12. จากการทำกิจกรรมข้างต้น ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกับการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว และทำการสรุปเนื้อหาในเรื่องพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว ดังนี้

พหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว หรือ พหุนามกำลังสอง (quadratic polynomial) คือ พหุนามที่เขียนได้ในรูป ax^2+bx+c เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัวที่ $a \neq 0$ และ x เป็นตัวแปร ซึ่งมี 3 กรณี ได้แก่

กรณีที่ 1 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองในรูป ax^2+bx+c เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ $c=0$ พหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวในกรณีนี้จะอยู่ในรูป ax^2+bx สามารถใช้สมบัติการแจกแจงแยกตัวประกอบของพหุนามในรูปนี้ได้

กรณีที่ 2 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองในรูป ax^2+bx+c เมื่อ $a=1$, b และ c เป็นจำนวนเต็ม และ $c \neq 0$ ในกรณีทั่วไป การแยกพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว x^2+bx+c เมื่อ b และ c เป็นจำนวนเต็ม และ $c \neq 0$ สามารถหาจำนวนเต็มสองจำนวนที่คูณกันได้เท่ากับพจน์ที่เป็นค่าคงตัวคือ c และบวกกันได้เท่ากับสัมประสิทธิ์ของ x คือ b ดังนี้

ถ้าให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มสองจำนวน ซึ่ง $mn=c$ และ $m+n=b$ จะได้ว่า $x^2+bx+c=(x+m)(x+n)$

กรณีที่ 3 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองในรูป ax^2+bx+c เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม และ $a \neq 1, c \neq 0$

1. หาพหุนามดีกรีหนึ่งสองพหุนามที่คูณกันแล้วได้พจน์หน้า คือ ax^2
2. หาจำนวนเต็มสองจำนวนที่คูณกันแล้วได้พจน์หลัง คือ c
3. นำผลที่ได้ในข้อ 1 และ 2 มาหาพจน์กลางทีละกรณี จนกว่าจะได้พจน์กลางเป็น bx ตามที่ต้องการ

13. ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนซักถามข้อสงสัย

* ภาษาลาหู่ คำว่า วะคู แปลว่า ล้อมรั้ว

5. สื่อและแหล่งเรียนรู้

สื่อและแหล่งเรียนรู้

5.1 หนังสือเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน มัธยมศึกษาปีที่ 2 เล่ม 2 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560)

5.2 ใบกิจกรรมที่ 2.1 การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว

5.3 ใบกิจกรรมที่ 2.2 "วะคู คอกหมู"

5.4 โปรแกรม GeoGebra เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว

6. การวัดผลและประเมินผล

6.1 การวัดผล

1. ด้านความรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการวัด	เครื่องมือ
1. นักเรียนสามารถแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวได้	1. ตรวจชิ้นงานนักเรียน 2. ตรวจใบกิจกรรมที่ 2.1 3. ตรวจใบกิจกรรมที่ 2.2 "วะคู คอกหมู"	1. ชิ้นงานนักเรียน เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว จากโปรแกรม GeoGebra 2. ใบกิจกรรมที่ 2.1 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว 3. ใบกิจกรรมที่ 2.2 "วะคู คอกหมู"

2. ด้านทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการวัด	เครื่องมือ
1. นักเรียนสามารถใช้เทคโนโลยีสารสนเทศเป็นเครื่องมือในการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวได้ 2. นักเรียนสามารถใช้ความรู้ในเรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวไปแก้ปัญหาจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้	1. ตรวจชิ้นงานนักเรียน 2. ตรวจใบกิจกรรมที่ 2.1 3. ตรวจใบกิจกรรมที่ 2.2 "วะคู คอกหมู"	1. ชิ้นงานนักเรียน เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว จากโปรแกรม GeoGebra 2. ใบกิจกรรมที่ 2.1 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว 3. ใบกิจกรรมที่ 2.2 "วะคู คอกหมู"

3. ด้านคุณลักษณะ (คุณธรรมจริยธรรมและค่านิยมอันพึงประสงค์)

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการวัด	เครื่องมือ
1. นักเรียนมีความรับผิดชอบ	1. ตรวจชิ้นงานนักเรียน 2. ตรวจใบกิจกรรมที่ 2.1 3. ตรวจใบกิจกรรมที่ 2.2 "วะคู คอกหมู"	1. ชิ้นงานนักเรียน เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว จากโปรแกรม GeoGebra 2. ใบกิจกรรมที่ 2.1 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว 3. ใบกิจกรรมที่ 2.2 "วะคู คอกหมู"

6.2 เกณฑ์การประเมิน

- ใช้เกณฑ์การจำแนกมโนมติเป็นเกณฑ์การประเมินผลการเรียนรู้ของนักเรียน

ภาคผนวก ค แบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

แบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 2

สังเกตครั้งที่.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่..... เรื่อง..... จำนวน.....ชั่วโมง

ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562

ครูผู้สอน นางสาวสุภาภรณ์ พรหมากาศ

คำชี้แจง

1. แบบสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้นี้ เป็นแบบสังเกตการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วยขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 Guided Explication (การแนะนำ ชี้แจง)

ขั้นตอนที่ 2 Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra)

ขั้นตอนที่ 3 Knowledge classification (การจำแนกความรู้)

ขั้นตอนที่ 4 Concept Reification (การปรับแนวคิด)

2. ให้ผู้สังเกตบันทึกรายละเอียดของการสังเกต ข้อคิดเห็น และข้อเสนอแนะในแต่ละขั้นตอนของกระบวนการจัดการเรียนรู้

การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra

ขั้นตอนที่ 1 Guided Explication (การแนะนำ ชี้แจง)

1.1 นักเรียนสามารถอธิบายองค์ความรู้ที่จำเป็นต้องใช้และการใช้งานโปรแกรม GeoGebra ในการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวหรือไม่ อย่างไร

☐ ได้ ☐ ไม่ได้ ☐ ไม่แน่ใจ

.....

.....

.....

1.2 การพัฒนา/ปรับปรุงการสอน

.....

.....

.....

1.3 แนวทางในการพัฒนา/ปรับปรุงการสอน

.....

.....

.....

ขั้นตอนที่ 2 Exploratory Familiarization (การสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra)

2.1 นักเรียนสามารถแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวจากโปรแกรม GeoGebra หรือไม่ อย่างไร

☐ ได้ ☐ ไม่ได้ ☐ ไม่แน่ใจ

.....

.....

.....

2.2 การพัฒนา/ปรับปรุงการสอน

.....

.....

.....

2.3 แนวทางในการแก้ไขปรับปรุง

.....

.....

.....

ขั้นตอนที่ 3 Knowledge classification (การจำแนกความรู้)

3.1 นักเรียนสามารถเขียนภาพของการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว หรือไม่ อย่างไร

☐ ได้ ☐ ไม่ได้ ☐ ไม่แน่ใจ

.....

.....

.....

3.2 นักเรียนเชื่อมโยงความรู้ของการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวจากโปรแกรม GeoGebra มาเป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรมหรือไม่ อย่างไร

☐ ได้ ☐ ไม่ได้ ☐ ไม่แน่ใจ

.....

.....

.....

3.3 การพัฒนา/ปรับปรุงการสอน

.....

.....

.....

3.4 แนวทางในการพัฒนา/ปรับปรุงการสอน

.....

.....

.....

ขั้นตอนที่ 4 Concept Reification (การปรับแนวคิด)

4.1 นักเรียนสามารถแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวโดยใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรมหรือไม่ อย่างไร

☐ ได้ ☐ ไม่ได้ ☐ ไม่แน่ใจ

.....

.....

.....

4.2 นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวไปใช้ในการแก้ปัญหาจากสถานการณ์ที่กำหนดให้หรือไม่ อย่างไร

☐ ได้ ☐ ไม่ได้ ☐ ไม่แน่ใจ

.....

.....

.....

4.3 การพัฒนา/ปรับปรุงการสอน

.....

.....

.....

4.4 แนวทางในการพัฒนา/ปรับปรุงการสอน

.....

.....

.....

สรุปผลการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra

5.1 การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวิธีการ Concrete Pictorial Abstract ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ส่งเสริมมโนมติทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวหรือไม่ อย่างไร

☐ ได้ ☐ ไม่ได้ ☐ ไม่แน่ใจ

.....

.....

.....

5.2 การพัฒนา/ปรับปรุงการสอน

.....

.....

.....

5.3 แนวทางในการพัฒนา/ปรับปรุงการสอน

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

วันที่.....

ภาคผนวก ง ใบกิจกรรมการเรียนรู้

ใบกิจกรรมที่ 2.1 เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว

ตอนที่ 1

ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มเขียนภาพที่ได้จากการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวพร้อมทั้งเขียนคำตอบที่ได้จากการแยกตัวประกอบลงในตาราง

โจทย์	ภาพ	คำตอบที่ได้
1. x^2-8x-9		
2. $y^2+9y+14$		
3. $6x^2-x-12$		

มหาวิทยาลัยนเรศวร

ใบกิจกรรมที่ 2.1 เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว

ตอนที่ 2

ให้นักเรียนแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $2x^2 - 2x - 4$

2. $6a^2 + a - 12$

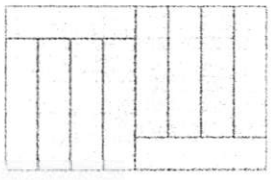
3. $9y^2 - 12y - 5$

4. $9x^2 - 6x + 1$

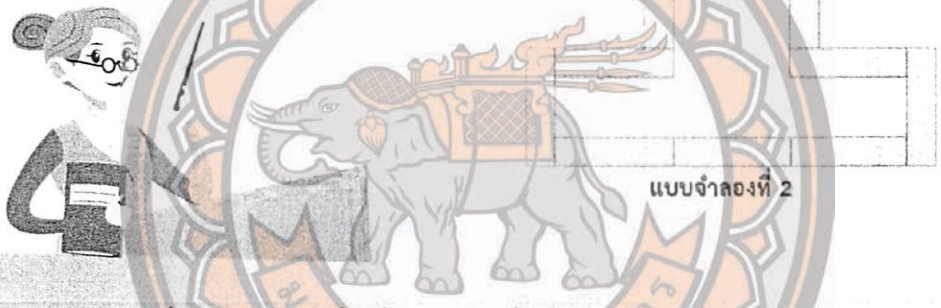
5. $-12a^2 - 20a - 7$

ใบกิจกรรม ที่ 2.2

ในการดำเนินชีวิตของชาวลาหู่ส่วนใหญ่มีการเลี้ยงสัตว์ เช่น หมู ไก่ และสุนัข ซึ่งเป็นการดำเนินชีวิตแบบเรียบง่าย พออยู่พอกิน



แบบจำลองที่ 1



แบบจำลองที่ 2

เมื่อนำแท่งไม้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีขนาดเท่ากันมาเรียงต่อกันดังแบบจำลองที่ 1 จะมีพื้นที่เป็น 640 ตารางหน่วย เมื่อนำแท่งไม้ทั้งหมดจากแบบจำลองที่ 1 มาเรียงต่อกันเป็นรูปดังแบบจำลองที่ 2 เพื่อสร้างเป็นคอกหมู จงหาว่า แบบจำลองที่ 2 นี้จะมีความยาวรอบรูปภายนอกเป็นเท่าใด

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ภาคผนวก จ แบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์

แบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์
เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง

คำชี้แจง

1. แบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ฉบับนี้เป็นข้อสอบแบบ Two Tier Test จำนวน 12 ข้อ ใช้เพื่อสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง
2. ใช้เวลาในการทำแบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ทั้งหมด 2 ชั่วโมง
3. ก่อนทำแบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ให้นักเรียนเขียนชื่อ – สกุล เลขที่ลงในกระดาษคำตอบให้ชัดเจน
4. นักเรียนสามารถทดเลขลงในแบบสำรวจมโนมติทางคณิตศาสตร์ได้
5. หากมีข้อสงสัยให้สอบถามครูผู้คุมสอบ และเมื่อหมดเวลาสอบให้ส่งแบบสำรวจกับครูผู้คุมสอบ
6. ในการทำแบบสำรวจแต่ละข้อ ให้นักเรียนเขียนบอกเหตุผลถึงการเลือกคำตอบในข้อนั้นๆให้ชัดเจน

.....

<u>มโนมติที่ 1</u> เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองโดยใช้สมบัติการแจกแจง

1. ขั้นตอนการแยกตัวประกอบของพหุนาม $mn-2m+3n-6$ ตรงกับข้อใด

a. $m(n-2)+3(n-2)$

b. $(mn-2m)+(3n-6)$

c. $(n-2)(m+3)$

ก. a , b , c

ข. c , b , a

ค. b , c , a

ง. b , a , c

เพราะ .....

.....

.....

.....

2. $(6x+3)$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $12x^2-52x-9$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

ตอบ .....

เพราะ .....

.....

.....

.....

3. พหุนาม x^3-4x^2 สามารถแยกตัวประกอบโดยใช้สมบัติการแจกแจงได้ตามข้อใด

ก. $2x(x\ -2)$

ข. $-x(x^2-4x)$

ค. $4(x^3-x^2)$

ง. $x^2(x-4)$

เพราะ .....

.....

.....

.....

.....

<u>มโนมติที่ 2</u> เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว

4. จากพหุนาม $-14y^2+28y$ ข้อความใดกล่าวถูกต้อง

1) $-7(2y-4)$

2) $-14(y^2+2)$

3) $-14y(y-2)$

ก. ข้อ 1) แยกตัวประกอบของพหุนามถูกต้องเพียงข้อเดียว

ข. ข้อ 2) แยกตัวประกอบของพหุนามถูกต้องเพียงข้อเดียว

ค. ข้อ 3) แยกตัวประกอบของพหุนามถูกต้องเพียงข้อเดียว

ง. ข้อ 1) ข้อ 2) และข้อ 3) แยกตัวประกอบของพหุนามได้ถูกต้อง

เพราะ .....

.....

.....

5. ตัวประกอบของพหุนาม $12-31x+7x^2$ คือข้อใด

ก. $(x-4)(7x-3)$

ข. $(x+4)(7x-3)$

ค. $(4-x)(7-3x)$

ง. $(4-x)(3+7x)$

เพราะ .....

.....

.....

.....

6. ให้หาจำนวนเต็ม c มา 3 จำนวน ที่ทำให้ x^2-4x+c สามารถแยกตัวประกอบออกเป็นพหุนามดีกรีหนึ่งซึ่งมีสัมประสิทธิ์และค่าคงตัวเป็นจำนวนเต็ม พร้อมแสดงการแยกตัวประกอบทั้งสามจำนวน

ตอบ .....

.....

.....

.....

.....

<u>มโนมติที่ 3</u> เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสมบูรณ์

7. พหุนามในข้อใดไม่สามารถแยกตัวประกอบเป็นพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสมบูรณ์ได้

ก. x^2+1

ข. $4x^2-9$

ค. $x^2-10x+25$

ง. $0.027-x^3$

เพราะ .....

.....

.....

.....

8. ค่า k ที่ทำให้พหุนาม $9x^2+30x+k$ เป็นพหุนามที่อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ คือจำนวนใด

ก. 16

ข. 25

ค. 49

ง. 64

เพราะ .....

.....

.....

.....

9. ข้อใดเป็นพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์

ก. $9x^2-30x+16$

ข. $16x^2+50x+25$

ค. $25x^2+80x+64$

ง. $100x^2-300x+81$

เพราะ .....

.....

.....

.....

<u>มโนมติที่ 4</u> เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างกำลังสอง

10. $(x-2)^2-1=(x-1)(x-3)$ เป็นการแยกตัวประกอบของพหุนามที่เป็นผลต่างของกำลังสองได้ถูกต้องหรือไม่ เพราะเหตุใด

ตอบ .....

เพราะ.....

.....

.....

.....

.....

.....

11. ถ้าแยกตัวประกอบของ $64x^2-169=(ax+b)(ax-b)$ ค่าของ $b-a$ คือเท่าใด

ก. 2

ข. 5

ค. -5

ง. 9

เพราะ.....

.....

.....

.....

.....

.....

12. เมฆต้องการทำบ่อน้ำพุ โดยมีสวนหินล้อมรอบ และมีสวนหญ้าล้อมรอบสวนหินอีกชั้นหนึ่ง มีลักษณะเป็นวงกลมสามวงซ้อนกัน โดยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกัน และมีรัศมีของวงกลมแต่ละวงเป็น 1, 4 และ 5 เมตร ถ้าผู้รับเหมาร้านเจริญพันธ์คิดค่าดำเนินการจัดสวนหิน ราคาตารางเมตรละ 150 บาท และสวนหญ้า ราคาตารางเมตรละ 60 บาท เมฆจะต้องจ่ายเงินในการจัดสวนหินและจัดสวนหญ้าเป็นเงินเท่าใด (กำหนด $\pi \approx 3.14$)

ก. 1,695.60

ข. 7065.75

ค. 8,760.60

ง. 9,761.35

เพราะ.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

ประวัติผู้วิจัย

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ – ชื่อสกุล	สุภาภรณ์ พรหมากาศ
วัน เดือน ปี เกิด	7 ธันวาคม 2534
ที่อยู่	60/4 หมู่ 3 ตำบลห้วยโป่ง อำเภอเมือง จังหวัดแม่ฮ่องสอน 58000
ที่อยู่ปัจจุบัน	4/4 หมู่ 8 ตำบลคลองลานพัฒนา อำเภอคลองลาน จังหวัดกำแพงเพชร 62180

ประสบการณ์การทำงาน

2558	โรงเรียนเขตพื้นที่การศึกษาอำเภอเมืองแม่ฮ่องสอน
2559	โรงเรียนบ้านแปลงสี่ อำเภอคลองลาน จังหวัดกำแพงเพชร

ประวัติการศึกษา

2558	คบ.(คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยราชภัฏลำปาง

มหาวิทยาลัยนเรศวร