การจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ปิยะวัฒน์ ศรีสังวาลย์

การค้นคว้าอิสระ เสนอเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
หลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา
พฤษภาคม 2563
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยนเรศวร

อาจารย์ที่ปรึกษาและหน้าภาควิชาการศึกษา ได้พิจารณาการค้นคว้าอิสระ เรื่อง "การจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4" เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา ของมหาวิทยาลัยนเรศวร

.....

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิเชียร ธำรงโสตถิสกุล)

อาจารย์ที่ปรึกษา

.....

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อังคณา อ่อนธานี)

หัวหน้าภาควิชาการศึกษา

พฤษภาคม 2563

ประกาศคุณูปการ

การวิจัยฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ดีด้วยความอนุเคราะห์อย่างดียิ่งจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิเชียร ธำรงโสตถิสกุล และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วนินทร พูนไพบูลย์พิพัฒน์ ที่ได้เสียสละเวลาเพื่อให้คำปรึกษา คำแนะนำ และแก้ไขปรับปรุงงานวิจัยเล่มนี้ด้วยความเอาใจใส่อย่างดียิ่ง คอยเติมเต็มพลังกาย พลังใจ และ พลังสติปัญญาในการเรียนและการทำงานวิจัย รวมทั้งเป็นแบบอย่างที่ดีให้กับผู้วิจัยเสมอมา ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบคุณผู้เชี่ยวชาญทั้ง 3 ท่าน ได้แก่ รองศาสตราจารย์ ดร.จักรกฤษ กลิ่นเอี่ยม ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วนินทร พูนไพบูลย์พิพัฒน์ และคุณครูนันชลี ทรัพย์ประเสริฐ ตำแหน่งครูชำนาญการพิเศษ โรงเรียนวัชรวิทยา จังหวัดกำแพงเพชร ที่ได้กรุณาตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย โดยให้ข้อเสนอแนะต่าง ๆ เป็นอย่างดี และขอขอบคุณนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/1 ปีการศึกษา 2562 โรงเรียนวังแขมวิทยาคม ทุกคนที่ได้ให้ความร่วมมือในการเรียนรู้ร่วมกันอย่างเป็นระบบในครั้งนี้ ช่วยให้การวิจัยนี้สำเร็จลุล่วงได้

ขอขอบคุณตัวข้าพเจ้าเอง ที่มีความมุ่งมานะอดทด ก้าวข้ามความท้อแท้และความหลง ขอบคุณมโนวิญญาณที่นำพากายหยาบจนมาถึงวันที่ได้เขียนประกาศคุณูปการนี้ ได้สำเร็จ

ขอขอบคุณเพื่อน พี่ น้อง ที่เป็นกัลยาณมิตร ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา รุ่นที่ 2 ของคณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร ทุกท่านที่คอยให้กำลังใจและช่วยเติมเต็มความไม่รู้ รวมทั้งความไม่สุขทางกายและใจให้แก่กัน ตลอดในช่วงเวลาที่ได้ศึกษาเล่าเรียนในสถาบันแห่งนี้

ขอขอบคุณ คณาจารย์ในสาขาวิชาวิทยาศาสตร์ศึกษาและคณิตศาสตร์ศึกษาทุกท่าน ที่ได้มอบความเป็นไทจากอวิชา มอบสติปัญญาอันมีค่าแก่ผู้วิจัย จนก่อให้เกิดเป็นงานวิจัยฉบับนี้ รวมทั้งเป็นแบบอย่างที่ดีให้กับผู้วิจัยเสมอมา

เหนือสิ่งอื่นใดขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ และครอบครัว ที่มอบกายหยาบที่ดี ให้กำลังใจและให้การสนับสนุนทุกอย่างในชีวิตการศึกษาและการทำงานมาตลอด ขอบคุณคุณครู-นักแปล ที่คอยเป็นกำลังใจและอำนวยความสะดวกต่าง ๆ ทุกคนมีส่วนช่วยให้งานวิจัยฉบับนี้สำเร็จลุล่วง คุณประโยชน์ทั้งหลายอันเกิดจากการทาวิจัยนี้ ขอมอบเป็นเครื่องบูชาพระคุณของบิดา มารดา ครูบาอาจารย์ และขอมอบเป็นเครื่องบูชาแทนพระคุณของแผ่นดิน สืบไป

ปิยะวัฒน์ ศรีสังวาลย์

ชื่อเรื่อง	การจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
ผู้วิจัย	ปิยะวัฒน์ ศรีสังวาลย์
ประธานที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิเชียร ธำรงโสตถิสกุล
ประเภทสารนิพนธ์	การค้นคว้าอิสระ กศ.ม. สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา, มหาวิทยาลัยนเรศวร, 2562
คำสำคัญ	การปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ การอภิปรายทางคณิตศาสตร์ การคิดเชิงคณิตศาสตร์ งานทางคณิตศาสตร์

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้ มีจุดประสงค์เพื่อศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ และเพื่อศึกษาผลการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ผู้เข้าร่วมวิจัย คือ นักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 25 คน ของโรงเรียนมัธยมศึกษาแห่งหนึ่งในเขตภาคเหนือตอนล่าง ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562 ใช้รูปแบบการวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียนจำนวน 3 วงจรปฏิบัติการ โดยใช้ระยะเวลาทั้งหมด 15 ชั่วโมง เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้ แก่ แผนการจัดการเรียนรู้ จำนวน 3 แผนการจัดการเรียนรู้ ใบกิจกรรม แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ และแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ วิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้การวิเคราะห์เชิงเนื้อหาและตรวจสอบข้อมูลแบบสามเส้าด้านแหล่งข้อมูล ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน การทดสอบกับสถิติทีแบบกลุ่มเดียว และการวิเคราะห์ข้อมูลด้วยเกณฑ์การให้คะแนนแบบแยกประเด็น

ผลการวิจัยพบว่า

1. แนวทางการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้น ของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ได้แก่ การคาดการณ์แนวคิด การคอยกำกับติดตามแนวคิด การเลือกแนวคิด การเรียงลำดับแนวคิด และการเชื่อมโยงแนวคิด มีประเด็นที่ควรเน้น ได้แก่ การออกแบบหรือคัดเลือกงานทางคณิตศาสตร์ที่ท้าทายความสามารถของผู้เรียน จัดเตรียมอุปกรณ์ในห้องเรียนให้พร้อมสำหรับการอภิปราย กระตุ้นความรู้เดิมและการตรวจสอบความเข้าใจที่

คลาดเคลื่อน การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์โดยใช้รูปแบบที่เหมาะสมกับผู้เรียน การใช้คำถามเพื่อสนับสนุนช่วยเหลือการทำงานของผู้เรียน การสรุปบทเรียนโดยการอำนวยการอภิปรายของครู

2. นักเรียนมีคะแนนการคิดเชิงคณิตศาสตร์หลังการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้น ของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ70 ของคะแนนเต็ม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

3. นักเรียนมีพัฒนาการของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ทุกองค์ประกอบที่ดีขึ้นตามลำดับ และผลการวิจัยจากใบกิจกรรมที่ 3 รายกลุ่ม ซึ่งเป็นใบกิจกรรมสุดท้าย นักเรียนส่วนใหญ่มีระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ สูงกว่าผลจากแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นรายบุคคล

Title	LEARNING IMPLEMANTATION BASED ON FIVE PRACTICES MODEL OF STEIN FOR ORCHESTRATING PRODUCTIVE MATHEMATICS DISCUSSIONS TO PROMOTE MATHEMATICAL THINKING ON ANALYTIC GEOMETRY TOPIC OF 10^{TH} GRADE STUDENTS IN SCIENCE PROGRAM
Author	Piyawat Srisangwan
Advisor	Assistant Professor Wichian Thamrongsotthisakul, Ed.D.
Academic Paper	2019
Keywords	Five Practices of Stein, Mathematical Discussion, Mathematical Thinking, Mathematical Tasks

ABSTRACT

The purposes of this research were to study the guidelines for learning implementation based on five practices model of Stein for orchestrating productive mathematics discussion to promote mathematical thinking and to study the effects of learning implementation based on five practices model of Stein for orchestrating productive mathematics discussion on mathematical thinking on analytic geometry topic of 10^{th} grade students in Science program .The research participants were 25 students in 10^{th} grade of high school in Kamphaeng Phet Province in the second semester of 2019 academic year. The research methodology was the action research of 3 cycles and took totally 15 hours for learning implementation. The instruments used in the research were three lesson plans, activity sheets, reflective learning journals, and mathematical thinking test. Data were analyzed by content analysis, data creditability by triangulation method, mean, standard deviation, t – test one sample and analytic scoring.

The results found that:

1. The guidelines for learning management of five practices model of Stein for orchestrating productive mathematics on analytic geometry topic are included five practices: 1) Anticipating 2) Launching 3) Monitoring 4) Selecting and Sequencing, and 5) connecting. The teacher should : 1) designs or chooses mathematical task which challenges students' ability 2) arranges the classroom equipment for the discussion 3)

recall students' background knowledge and check for their misconception 4) launch the appropriate mathematical task 5) apply support questions for students in doing task and 6) facilitate students to summarize the lesson.

2. The students' mathematical thinking ability after learning was higher than 70 percentages of total scores with the significance level of .05.

3. The students improve their mathematical thinking ability in all aspects. The level of Mathematical thinking ability showed in the workgroup activity sheets 3, was higher than the result of an individual mathematical thinking test.

สารบัญ

บทที่		หน้า
1	**บทนำ**	1
	ความเป็นมาของปัญหา	1
	จุดมุ่งหมายของการวิจัย	10
	ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	10
	ขอบเขตของงานวิจัย	10
	ข้อตกลงเบื้องต้น	11
	นิยามศัพท์เฉพาะ	11
2	**เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง**	14
	หลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของโรงเรียน (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้น พื้นฐานพุทธศักราช 2551	14
	การจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์	20
	การคิดเชิงคณิตศาสตร์	30
	งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	47
	กรอบแนวคิดในการวิจัย	52
3	**วิธีดำเนินการวิจัย**	54
	รูปแบบการวิจัย	54
	ผู้เข้าร่วมวิจัย	56
	เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	57
	การเก็บรวบรวมข้อมูล	69
	การวิเคราะห์ข้อมูล	71

สารบัญ (ต่อ)

บทที่		หน้า
4	**ผลการวิจัย**	77
	ตอนที่ 1 บทบาทของครูในแต่ละขั้นการปฏิบัติในการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	77
	ตอนที่ 2 ผลการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	113
5	**บทสรุป**	125
	สรุปผลการวิจัย	125
	อภิปรายผลการวิจัย	127
	ข้อเสนอแนะ	134
บรรณานุกรม		137
ภาคผนวก		146
ประวัติผู้วิจัย		249

สารบัญตาราง

ตาราง หน้า

1 ผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม..... 18
2 แสดงรายละเอียดของระดับงานทางคณิตศาสตร์พร้อมตัวอย่าง..... 24
3 แสดงความสอดคล้องระหว่างขั้นการปฏิบัติและระยะการจัดกิจกรรม..... 26
4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างการจัดการเรียนรู้ด้วยแนวการปฏิบัติ 5 ของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ กับ การคิดเชิงคณิตศาสตร์..... 53
5 แสดงจุดประสงค์ของการวิจัยและเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย..... 56
6 แสดงลำดับวงจรปฏิบัติการ แผนการจัดการเรียนรู้ เนื้อหา ชื่อแผนการจัดการเรียนรู้ และเวลาที่ใช้ในการจัดกิจกรรม..... 58
7 แสดงข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแผนการจัดการเรียนรู้..... 60
8 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการแก้ปัญหา..... 63
9 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการให้เหตุผล..... 65
10 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการนำเสนอตัวแทนความคิด..... 66
11 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนแบบแยกประเด็นตามระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการแก้ปัญหา..... 72
12 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนแบบแยกประเด็นตามระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการให้เหตุผล..... 73
13 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนแบบแยกประเด็นตามระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการนำเสนอตัวแทนความคิด..... 73
14 สรุปปัญหาที่พบในชั้นเรียนและแนวทางการปรับปรุงในแต่ละขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ของวงจรปฏิบัติการที่ 1..... 84
15 สรุปปัญหาที่พบในชั้นเรียนและแนวทางการปรับปรุงในแต่ละขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ของวงจรปฏิบัติการที่ 2..... 96
16 สรุปปัญหาที่พบในชั้นเรียนและแนวทางการปรับปรุงในแต่ละขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ของวงจรปฏิบัติการที่ 3..... 104

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตาราง หน้า

17 สรุปแนวทางการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ จำแนกตามบทบาทของครูและนักเรียนในแต่ละแนวปฏิบัติ..... 108

18 แสดงค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (x) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (sd.) และค่าการทดสอบที (t – test) ของคะแนนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังการจัดการเรียนรู้เทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 70..... 112

19 แสดงจำนวนกลุ่มนักเรียนตามระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์จาก ใบกิจกรรมของวงจรปฏิบัติการที่ 1..... 113

20 แสดงจำนวนกลุ่มนักเรียนตามระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์จาก ใบกิจกรรมของวงจรปฏิบัติการที่ 2..... 116

21 แสดงจำนวนกลุ่มนักเรียนตามระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์จาก ใบกิจกรรมของวงจรปฏิบัติการที่ 3..... 118

22 แสดงจำนวนนักเรียนตามระดับของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ (รายด้าน) จากทั้ง 3 ใบกิจกรรม..... 121

23 ระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการแก้ปัญหาของนักเรียนในวงจรปฏิบัติการที่ 3 และแบบทดสอบ..... 123

สารบัญภาพ

ภาพ		หน้า
1	แผนภาพแสดงเนื้อหา เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ (Analytic Geometry)	19
2	กระบวนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของเมสันและคณะ.....	37
3	กระบวนการศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์.....	42
4	แสดงหลักการสร้างแบบวัดความสามารถทางการคิด.....	44
5	แสดงขั้นตอนการวิจัยเชิงปฏิบัติการ.....	69
6	แสดงการใช้กระดานไวท์บอร์ดในการอภิปรายและการแสดงแนวคิด ในห้องเรียน...	79
7	แสดงการศึกษาสถานการณ์ปัญหาของกลุ่มนักเรียน.....	81
8	แสดงการนำการนำเสนอตัวแทนความคิดในการทำความเข้าใจปัญหา.....	82
9	แสดงการนำการนำเสนอตัวแทนความคิดในการทำความเข้าใจปัญหา.....	82
10	แสดงการอภิปรายเหตุผลในการกำหนดนิยามของวงรี จากการพับกระดาษ.....	88
11	ตัวอย่างงานทางคณิตศาสตร์ เรื่อง วงรี.....	89
12	ตัวอย่างงานทางคณิตศาสตร์ เรื่อง วงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h,k) ใด ๆ.....	91
13	การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน.....	93
14	การระดมความคิดของนักเรียนแต่ละกลุ่ม.....	93
15	ตัวอย่างผลงานที่แสดงแนวคิดที่แตกต่างกันของนักเรียน.....	95
16	นักเรียนเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ได้ด้วยตนเอง ผ่านการอภิปรายในกลุ่มย่อย.....	101
17	นักเรียนใช้การนำเสนอตัวแทนความคิดในการทำความเข้าใจปัญหา และ ดำเนินการแก้ปัญหา.....	102
18	ตัวอย่างผลงานในใบกิจกรรมที่แสดงการอธิบายเหตุผลของการ ดำเนินการแก้ปัญหา และ และการนำเสนอตัวแทนความคิดในการ ดำเนินการแก้ปัญหา.....	114
19	ตัวอย่างผลงานในใบกิจกรรมที่แสดงการสรุปคำตอบของปัญหาและ การอธิบาย ความสมเหตุสมผลของคำตอบของปัญหา	115
20	แสดงความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทน ความมคิด.....	117

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพ		หน้า
21	แสดงความสามารถในการแก้ปัญหา และการนำเสนอตัวแทนความคิด	119
22	แสดงความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความมคิด.....	
23	แสดงความสามารถในการดำเนินการแก้ปัญหา.....	

บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาของปัญหา

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อความสำเร็จในการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 เนื่องจากคณิตศาสตร์ช่วยให้มนุษย์มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างรอบคอบและถี่ถ้วน ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสม และสามารถนำไปใช้ในชีวิตจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่น ๆ อันเป็นรากฐานในการพัฒนาทรัพยากรบุคคลของชาติให้มีคุณภาพและพัฒนาเศรษฐกิจของประเทศให้ทัดเทียมกับนานาชาติ การศึกษาคณิตศาสตร์จึงจำเป็นต้องมีการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง เพื่อให้ทันสมัยและสอดคล้องกับสภาพเศรษฐกิจ สังคม และความรู้ทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีที่เจริญก้าวหน้าอย่างรวดเร็วในยุคโลกาภิวัตน์ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2560) ซึ่งสอดคล้องกับ อัมพร ม้าคนอง (2557) ที่กล่าวว่า คณิตศาสตร์ยิ่งมีความสำคัญมากขึ้น ในมุมมองของการเป็นศาสตร์แห่งการพัฒนาการคิดของมนุษย์ กระบวนการเรียนรู้คณิตศาสตร์ทำให้มนุษย์ต้องใช้การคิดที่หลากหลาย เช่น การคิดวิเคราะห์ การคิดสังเคราะห์ การคิดอย่างมีวิจารณญาณ การคิดวางแผนอย่างรอบคอบ การคิดเชิงระบบ ตลอดจนช่วยพัฒนาความสามารถในการทำงานอย่างเป็นระบบ มีการวางแผนและการดำเนินงานเป็นขั้นตอน รวมทั้งมีการตรวจสอบความถูกต้องหรือประสิทธิภาพของการทำงานอย่างสมเหตุสมผล ซึ่งกระบวนการทำงานทางคณิตศาสตร์ที่มีขั้นตอนชัดเจน เช่น กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ช่วยพัฒนาประสบการณ์การทำงานที่มีระเบียบแบบแผนให้กับผู้เรียน ทั้งนี้วาทกรรมอันโด่งดังของ อัลเบิร์ต ไอน์สไตน์ นักวิทยาศาสตร์ที่ยิ่งใหญ่ที่สุดในคริสต์ศตวรรษที่ 20 ได้กล่าวยกย่องให้คณิตศาสตร์เป็นราชินีของวิทยาศาสตร์ เพราะคณิตศาสตร์มีบทบาทอันสำคัญยิ่งต่อศาสตร์อื่นมาตั้งแต่สมัยโบราณ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในทางวิทยาศาสตร์ ซึ่งวิทยาศาสตร์จะเจริญรุ่งเรืองได้นั้น จำเป็นต้องอาศัยองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐาน (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2555)

สถานการณ์การจัดการศึกษาของประเทศไทยในปัจจุบันยังอยู่ในวิกฤติ เมื่อพิจารณาจากผลของการเข้าร่วมโครงการประเมินผลนักเรียนนานาชาติ (Program for International Student Assessment) หรือ PISA พบว่า นักเรียนไทยมีผลการประเมินลดลงในช่วงปี 2000 – 2006 แต่ในปี

2009 กลับเพิ่มสูงขึ้นทั้งด้านการอ่านและวิทยาศาสตร์ ยกเว้นคณิตศาสตร์ที่เปลี่ยนแปลงน้อยมาก จากผลการทดสอบครั้งล่าสุด (PISA 2012) แม้จะพบว่านักเรียนไทยมีผลการสอบสูงขึ้นจาก PISA 2009 ในทุกด้าน แต่ยังต่ำกว่าค่าเฉลี่ยของ OECD (2014) จากผลการประเมินดังกล่าว สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี หรือ สสวท. (2556ก) ชี้ว่าคุณภาพการศึกษาของไทยยังห่างไกลความเป็นเลิศ ความพยายามที่จะยกระดับการศึกษายังคงเป็นภารกิจสำคัญที่ต้องดำเนินต่อไป โดยเสนอว่า การพัฒนาคุณภาพ การศึกษาเพื่อให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ดีขึ้นไม่จำเป็นต้องเปลี่ยนหลักสูตรใหม่ทั้งระบบ เพียงแต่มีมาตรการที่ดีในการยกระดับคุณภาพของการเรียนการสอน โดยสำนักงานส่งเสริมสังคมแห่งการเรียนรู้และคุณภาพเยาวชน หรือ สสค. (2557) เสนอให้มีการพัฒนาคุณภาพการจัดการศึกษาด้วยการสนับสนุนและพัฒนากระบวนการเรียนรู้ร่วมคิดค้นนวัตกรรมทางการศึกษา สนับสนุนนโยบายปฏิรูปหลักสูตรของกระทรวงศึกษาธิการที่เน้น "ทักษะชีวิตและโลกของงาน" พร้อมทั้งพัฒนาทักษะการใช้เทคโนโลยีสารสนเทศแก่ครู เพื่อให้สอดคล้องกับกระแสการปฏิรูปการศึกษาของโลก ซึ่งภาคีเพื่อทักษะแห่งศตวรรษที่ 21 เสนอไว้ (เคนเคย์, 2554) โดยกรอบความคิดเพื่อการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 ระบุทักษะที่สำคัญ 3 ด้านคือ 1) ทักษะการเรียนรู้และนวัตกรรม 2) ทักษะด้านสารสนเทศ สื่อและเทคโนโลยี และ 3) ทักษะชีวิตและการทำงาน ซึ่งเมื่อพิจารณาแล้วเราจะพบว่าทักษะต่าง ๆ ดังกล่าวมีทักษะการคิดเป็นรากฐานสำคัญ ดังนั้น กระแสทางการศึกษาแบบใหม่จึงจำเป็นที่จะต้องปรับปัจจัยในการสร้างพลังแห่งความคิด นับตั้งแต่หลักสูตร ทัศนคติ วิธีสอน วิธีวัดผล การจัดสภาพแวดล้อมและการทำความเข้าใจในข้อจำกัด จุดเด่น จุดด้อยของเด็กแต่ละคน เพื่อผลผลิตทางความคิดที่ดีในอนาคต (อุษณีย์ อนุรุทธ์วงศ์, 2545)

ในยุคโลกาภิวัตน์ เป็นยุคแห่งความเจริญก้าวหน้าทางวิชาการ เทคโนโลยีวิทยาศาสตร์สมัยใหม่ และสังคมที่กำลังเปลี่ยนแปลงจากยุคอุตสาหกรรมเข้าสู่ยุคข่าวสารข้อมูลและความเจริญก้าวหน้าทางเทคโนโลยี (Information and technology society) กระแสโลกาภิวัตน์ (Globalization) หรือกระแสการทำประเทศให้เป็นสากล ทำให้คนต้องรู้จักคิด เพื่อให้สามารถเลือกรับข่าวสารข้อมูลและเลือกใช้เทคโนโลยีได้อย่างเหมาะสม ต้องแข่งขันกับคนในสังคมโลกและพึ่งตนเองมากขึ้น ซึ่งต้องเป็นคนที่คิดเป็น ทำเป็น แก้ปัญหาเป็น แต่การพัฒนาประเทศ โดยมุ่งความเจริญทางเศรษฐกิจและความเจริญก้าวหน้าทางเทคโนโลยี การพัฒนานั้นมิได้เป็นไปอย่างยั่งยืน ขาดการสมดุลกับการพัฒนาทางด้านจิตใจ เป็นที่มาของปัญหาสังคม มีผลกระทบต่อวิถีการดำรงชีวิตของผู้คนอิทธิพลทางวัฒนธรรมจากต่างชาติเข้ามาสู่ประเทศไทย ผ่านสื่อและเทคโนโลยีสารสนเทศ เด็กและเยาวชนขาดทักษะด้านการคิดวิเคราะห์อย่างเป็นระบบ ไม่สามารถคัดกรอง

และเลือกรับวัฒนธรรมที่เหมาะสม ทำให้เกิดค่านิยมและพฤติกรรมที่เน้นวัตถุนิยม และบริโภคนิยมมากขึ้น ขาดจิตสำนึกสาธารณะ คุณธรรมและจริยธรรมลดลง นำไปสู่ปัญหาต่าง ๆ เช่น ปัญหาเด็กและเยาวชน ปัญหาการขาดสัมพันธภาพในครอบครัว รวมทั้งปัญหายาเสพติดและปัญหาอาชญากรรมอื่น ๆ (สำนักงานคณะกรรมการการพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ, 2549) ความสามารถในการคิดช่วยทำให้มนุษย์สามารถสร้างองค์ความรู้หรือสารสนเทศเพื่อการตัดสินใจเกี่ยวกับตนเองและสังคมได้อย่างเหมาะสม การจัดการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลางหรือการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนสำคัญที่สุด ทำให้นักเรียนต้องใช้ความสามารถในการคิด การวิเคราะห์ การคิดเป็น และการสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง แต่ในสภาพปัจจุบันเด็กยังขาดทักษะในการคิด จากการสำรวจนักเรียนโรงเรียนในระดับมัธยมศึกษามีปัญหาเกี่ยวกับการคิดเพิ่มขึ้น ซึ่งสาเหตุที่สำคัญ คือ ขาดการพัฒนากระบวนการคิดเนื่องมาจากสภาพทางสังคมที่เปลี่ยนแปลงไปอย่างรวดเร็ว (นิยม กิมานุวัฒน์ วิชิต สุรัตน์เรืองชัย และ สุนทร บำเรอราช, 2559)

ปัจจุบัน"การคิด" และ "การสอนคิด" เป็นเรื่องสำคัญในการจัดการศึกษา ซึ่งประเทศต่างๆ ทั่วโลกหันมาสนใจ (ทิศนา แขมมณี, 2534) ดังปรากฏชัดเจนในแผนพัฒนาการศึกษาของกระทรวงศึกษาธิการ ฉบับที่ 12 ที่ได้กำหนดแนวทางการดำเนินงานที่สำคัญในการขับเคลื่อนยุทธศาสตร์การพัฒนาหลักสูตร กระบวนการเรียนการสอน การวัดและประเมินผล โดยปรับเปลี่ยนวิธีการเรียนการสอนจากการบอกเล่าโดยครู มาเป็นกระบวนการออกแบบวิธีการเรียนรู้ที่หลากหลาย เหมาะสมกับศักยภาพผู้เรียน เพื่อให้เกิดกระบวนการ คิดเป็น ทำเป็น แก้ปัญหาเป็น วิพากษ์วิจารณ์เป็นอย่างสร้างสรรค์ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2559) นอกจากนี้แนวทางจัดการศึกษาที่กำหนดไว้ในพระราชบัญญัติการศึกษา พ.ศ. 2542 มาตรา 24 (2) ยังได้ระบุให้สถานศึกษาจัดกระบวนการเรียนรู้โดยการฝึกทักษะ กระบวนการคิด การจัดการ การเผชิญสถานการณ์และ การประยุกต์ความรู้มาใช้ป้องกันและแก้ปัญหา จึงกล่าวได้ว่า กระบวนการคิดเป็นศักยภาพในการเรียนรู้ และเป็นจุดเน้นในการจัดการศึกษาในศตวรรษที่ 21 (Tucker, 1988 อ้างอิงใน เบญจมาศ ฉิมมาลี, 2550) ดังนั้น การเรียนการสอนที่เปิดโอกาสให้นักเรียนใช้การคิด ก็ย่อมมีส่วนช่วยเสริมสร้างทักษะการคิดให้กับผู้เรียน โดยเฉพาะกิจกรรมที่ส่งเสริมการคิดที่หลากหลายจากกลุ่มนักเรียนที่มีอิสระต่อการแสดงความคิดเห็นภายใต้การจัดกระทำที่ออกแบบบูรณาการเนื้อหาไว้แล้วย่อมมีผลต่อการได้มาซึ่งทักษะการคิดควบคู่ไปกับการบรรลุเนื้อหาที่สอนไปด้วย (ผลาดร สุวรรณ-โพธิ์, 2560) การที่คนใดคนหนึ่งจะมีความสามารถในการคิดเชิงระบบ การคิดวิจารณญาณ การคิดเชิงวิเคราะห์ การคิดเชิงเหตุผล การคิดในการแก้ปัญหาและการตัดสินใจ ล้วนมีพื้นฐานสำคัญ

มาจากการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ผู้เรียนจึงต้องเรียนรู้และนำความรู้ตลอดจนทักษะจากการเรียนคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริง และเป็นพื้นฐานการเรียนรู้ระดับที่สูงขึ้นไป (รุ่งทิวา นาบำรุง, 2550)

จากสภาพปัญหานักเรียนขาดทักษะการคิด ที่สะท้อนผ่านผลการประเมินผลนักเรียนนานาชาติ (Program for International Student Assessment) หรือ PISA ที่กล่าวมาข้างต้น สาเหตุหนึ่งอาจเนื่องมาจากการจัดการเรียนการสอนของครู ไม่สามารถหาแนวทางในการกระตุ้นให้ผู้เรียนฝึกทักษะการคิด หรือผู้เรียนขาดทักษะการคิดแล้วจะทำอย่างไรเพื่อที่จะกระตุ้นให้ผู้เรียนได้ฝึกทักษะการคิดได้ (ศรินธร วิทยะสิรินันท์, 2544) และสภาพการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาโดยทั่วไปยังมีจุดเน้นที่การหาคำตอบที่ถูกต้อง ครูมักจะเน้นการจดจำทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และขั้นตอนการหาคำตอบที่ถูกต้อง โดยสอนให้นักเรียนแก้โจทย์ปัญหาด้วยวิธีการใดวิธีการหนึ่งเท่านั้น อีกทั้งในการแก้โจทย์ปัญหาก็มีลักษณะเป็นการฝึกใช้สูตรและทำตามขั้นตอนที่ครูสอนไว้มากกว่าการฝึกกระบวนการคิดและแก้ปัญหา (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2557ข, กิตติ พัฒนตระกูลสุข, 2546) และการจัดกิจกรรมในชั้นเรียนมีลักษณะเป็นการฝึกใช้สูตรและการฝึกทำตามขั้นตอนที่ครูสอนมากกว่า การฝึกกระบวนการคิดและการแก้ปัญหาด้วยตัวนักเรียนเอง (จรรยา ภูอุดม, 2543) จึงส่งผลให้นักเรียนไม่ได้รับการส่งเสริมด้านการใช้การคิดเชิงคณิตศาสตร์ในการเรียนรู้ ซึ่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เป็นลักษณะหนึ่งของการคิดโดยทั่วไป (Rickart, 1996) เป็นการคิดในเชิงการคำนวณ การคิดแก้ปัญหา การให้เหตุผล ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ สามารถสื่อสารสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ให้บุคคลอื่นรับรู้ได้ รวมทั้งสามารถเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์เข้าด้วยกัน และสามารถเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ นอกจากนี้ยังรู้จักตรวจสอบหรือควบคุมการรู้คิดของตนเอง (Metacognition) ได้ (Hyde and Hyde, 1991, Reys: et al., 2004) รวมทั้งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ยังเป็นการใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์ ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์อย่างใดอย่างหนึ่งที่แสดงออกมาอย่างชัดจน หรือแสดงออกมาอย่างชัดเจน หรือแสดงออกมาเป็นนัยในการหาคำตอบของปัญหา (Henderson et al., 2002) สอดคล้องกับ O'Daffer and Thornquist (1993) ได้ให้ความหมายเกี่ยวกับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ว่าหมายถึงการใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่หลากหลายในการทำความเข้าใจแนวคิด ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิด สร้างข้อสรุปหรือสนับสนุนข้อสรุปเกี่ยวกับแนวคิดและความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิดและแก้ปัญหาเกี่ยวกับแนวคิดนั้น

เมื่อพิจารณาถึงการประเมินการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในระดับนานาชาติ สามารถพิจารณาได้จากผลการประเมินผลนักเรียนนานาชาติ (Program for International Student Assessment)

หรือ PISA ที่ใช้โจทย์ปัญหาที่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหาในปัจจุบันและการนำความรู้คณิตศาสตร์ที่เรียนมา ไปใช้แก้ปัญหา โดยการนำความรู้คณิตศาสตร์ แนวคิดคณิตศาสตร์ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ไม่ว่าจะเป็นการให้เหตุผล การคิดวิเคราะห์ การสื่อสาร สื่อความหมาย การแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ การติดตามและประเมินผลข้อโต้แย้ง การนำเสนอข้อมูลมาใช้ในสถานการณ์ต่างๆ ในชีวิตจริง ครอบคลุมองค์ประกอบ 3 ด้าน ได้แก่ 1) สถานการณ์หรือบริบท (contexts) ที่ปัญหานั้นตั้งอยู่ 2) เนื้อหาคณิตศาสตร์ (content) ที่ต้องนำมาใช้ในการแก้ปัญหา และ 3) กระบวนการทางคณิตศาสตร์ (process) ที่อธิบายสิ่งที่แต่ละคนทำเพื่อเชื่อมโยงบริบทของปัญหากับคณิตศาสตร์แล้วนำไปสู่การแก้ปัญหา ซึ่งความสามารถพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มีทั้งหมด 7 ข้อ ซึ่งพบว่ามี 3 ข้อที่เกี่ยวข้องกับทักษะการคิดเชิงคณิตศาสตร์และการใช้การคิดเชิงคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา ได้แก่ 1) การสร้างกลยุทธ์เพื่อแก้ปัญหา (Devising strategies for solving problems) 2) การให้เหตุผลและการสร้างข้อโต้แย้ง (Reasoning and argument) และ 3) การแสดงแทน (Representation) (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2560ค) ด้วยเหตุนี้ ผลการประเมิน PISA ดังกล่าว จึงมีความเชื่อมโยงกับปัญหาการขาดความสามารถในการใช้การคิดเชิงคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาของนักเรียน

ความสามารถในการคิดเชิงคณิตศาสตร์และการใช้การคิดเชิงคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้น เป็นเป้าหมายที่สำคัญของการศึกษา ดังนั้น สถานศึกษาและครูผู้สอนจึงจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องตระหนักถึงความสำคัญในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เน้นกระบวนการคิดเพื่อส่งเสริมและพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนไปพร้อม ๆ กับความรู้ตามเนื้อหา โดยเปิดโอกาสให้นักเรียนได้มีปฏิสัมพันธ์โต้ตอบทางความคิดทั้งระหว่างนักเรียนกับนักเรียนและนักเรียนกับครู และส่งเสริมให้นักเรียนได้สื่อสาร นำเสนอความคิด วิเคราะห์และตัดสินปัญหา ได้อย่างรอบคอบและถูกต้อง (แพรไหม สามารถ, 2555) แต่เมื่อผู้วิจัยสังเกตการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในห้องเรียนที่ทำการวิจัย พบว่า นักเรียนไม่สามารถวิเคราะห์ปัญหา เลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา และแปลงสถานการณ์หรือปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ เนื่องจากไม่สามารถสร้างตัวแทนความคิดเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Representations) อันเป็นการนำข้อความ สถานการณ์ บริบท หรือเงื่อนไข ที่โจทย์กำหนดนั้นมาสร้างสมการหรือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และยังแสดงให้เห็นว่านักเรียนขาดการให้เหตุผล อันเป็นทักษะสำคัญในการนำสูตร ทฤษฎีบท หรือหลักการทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่าง สมเหตุสมผล เพราะ แนวทางการสอนที่ครูเป็นผู้ชี้นำความรู้และนำเสนอแนวคิดในการแก้ปัญหา ลักษณะการทำ

กิจกรรมอยู่ในลักษณะถามตอบ ซึ่งครูเป็นผู้ถามคำถามที่มีคำตอบตายตัว นักเรียนเพียงตอบครูว่าใช่หรือไม่ใช่ ถูกต้องหรือไม่ถูกต้องเท่านั้น จะเห็นว่านักเรียนไม่มีโอกาสในการแสดงออกทางความคิดอย่างอิสระและไม่มีหลักฐานยืนยันได้อย่างแน่ชัดว่าการที่นักเรียนตอบได้นั้นเกิดจากความเข้าใจของนักเรียนเองหรือเกิดจากการชี้นำคำตอบของครู (ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, 2546) สิ่งสำคัญอยู่ที่การสร้างบริบทให้เหมาะสมแก่การเรียนรู้ เปลี่ยนมุมมองของวิธีการสอนโดยไม่ได้เน้นเพียงแค่ผลลัพธ์ แต่เน้นกระบวนการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ เปลี่ยนเนื้อหาสาระที่มีอยู่เดิมนั้นให้เป็นสถานการณ์ปัญหาปลายเปิดให้นักเรียนได้เผชิญปัญหาและทำการแก้ปัญหาด้วยตนเอง โดยมีงานทางคณิตศาสตร์เป็นสื่อกลางที่สำคัญของการอภิปรายโต้แย้งในชั้นเรียนระหว่างครูกับนักเรียนและระหว่างนักเรียนกับนักเรียน (NCTM, 1991) แต่เนื่องจากอุปสรรคหลักสองประการสำหรับการพัฒนาการอภิปรายโต้แย้งของนักเรียนคือ การขาดโอกาสในการอภิปรายโต้แย้งในห้องเรียน และการแสดงความเคารพต่อความคิดของเด็กแต่ละคนไม่ว่าจะผิดหรือไม่ก็ตามเป็นสิ่งสำคัญมาก (Driver, 2000) ดังนั้น ผู้วิจัยจึงมุ่งพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Thinking) ผ่านการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้น สำหรับการเตรียมการสร้างการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ให้เกิดขึ้นในชั้นเรียน

แผนการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2560 – 2579 มุ่งพัฒนาผู้เรียนทุกคนให้มีคุณลักษณะและทักษะการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 ซึ่งการอภิปรายโต้แย้งเป็นหนึ่งในกระบวนการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญในการพัฒนาความสามารถทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน (Langrall and Rumsey, 2016) สอดคล้องกับ Strigler and Hiebert (1999) ที่ว่าการพิสูจน์ด้วยการอภิปรายโต้แย้งจะช่วยให้นักเรียนได้แสดงแนวคิด อธิบายเหตุผลในการพิสูจน์ข้อโต้แย้งกับข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์กับเพื่อนแต่ละคนในระหว่างการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดได้ชัดเจนยิ่งขึ้น ช่วยให้นักเรียนพัฒนาความเข้าใจในวิชาคณิตศาสตร์ของตนเองและเพิ่มทักษะด้านการคิดทางคณิตศาสตร์ (Lam, 2012) เนื่องจากมีความสำคัญต่อการเข้าถึงกระบวนการทางความรู้ ความเข้าใจของกันและกันทั้งระหว่างนักเรียนกับนักเรียน และระหว่างนักเรียนกับครู เพื่อพัฒนาความสามารถในการสื่อสารและเพื่อสนับสนุนการพัฒนาเหตุผล (Aleixandre and Erduran, 2007) การอภิปรายโต้แย้งจึงสอดคล้องโดยตรงกับกระบวนการให้เหตุผล และกระบวนการสื่อสารและสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นหนึ่งในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน (2560) กล่าวถึงเนื่องจากทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เหล่านี้จะช่วยให้ผู้เรียนสามารถถ่ายทอดความรู้ความเข้าใจ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ หรือกระบวนการคิดของตนให้ผู้อื่นรับรู้ได้อย่างถูกต้องชัดเจน

และมีประสิทธิภาพ ผ่านการคิดวิเคราะห์ในการรวบรวมข้อเท็จจริง ข้อความ แนวคิด สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ เพื่อให้เกิดข้อเท็จจริงหรือสถานการณ์ใหม่ การที่ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการอภิปรายหรือการเขียนเพื่อแลกเปลี่ยนความรู้และความคิดเห็นถ่ายทอดประสบการณ์ซึ่งกันและกัน ยอมรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่นจะช่วยให้ผู้เรียนเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้อย่างมีความหมายเข้าใจได้อย่างกว้างขวางลึกซึ้งและจดจำได้นานมากขึ้นสอดคล้องกับ ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์ (2557) ที่ว่าการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 นั้นต้องเปิดโอกาสให้นักเรียนได้เรียนรู้ด้วยตัวนักเรียนเองและการจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ต้องเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้อธิบายให้เหตุผล อภิปรายโต้แย้งหาข้อสรุปหรือมีโอกาสที่จะสงสัย

ขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้น (5 Practices) ถูกคิดค้นขึ้นโดย Stein Smith Engle และ Hughes (2008) โดยเป็นวิธีการปฏิบัติที่ช่วยอำนวยความสะดวกแก่ครูในการจัดการอภิปรายในชั้นเรียนเพื่อช่วยให้นักเรียนได้เป็นผู้สร้างความรู้และนำความรู้ไปใช้งานได้ด้วยตนเอง โดยมีฐานแนวคิดมาจากการจัดการเรียนรู้แบบสืบสอบ (inquiry – based) ซึ่งเป็นวิธีการที่เน้นการพัฒนาความสามารถในการคิดและแก้ปัญหา โดยให้นักเรียนใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการแสวงหาความรู้และค้นหาความรู้ด้วยตนเอง และ ต่อมา Larsson (2015) ได้นำ 5 การปฏิบัติที่คิดค้นขึ้นโดยสไตน์และคณะข้างต้นมาปรับให้เป็นขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นการอภิปรายอย่างมีประสิทธิภาพร่วมกับรูปแบบการจัดการเรียนการสอนแบบ LEDS เพื่อเอื้อให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในงานทางคณิตศาสตร์ ให้นักเรียนได้ร่วมคิด ร่วมแสดงความคิดเห็นและเหตุผล ร่วมค้นคว้า และสรุปความรู้ด้วยตนเองจากการใช้คำถามหรือการชี้แนะจากครู ประกอบด้วย 5 การปฏิบัติ ได้แก่ ขั้นการปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์การเรียนรู้และการทำงานทางคณิตศาสตร์ (Anticipating) ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ (Launching) ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน (Monitoring) ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน (Selecting and Sequencing) และขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่ (Connecting) (ทรรศมน วินัยโกศล, 2562)

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่า ขั้นการปฏิบัติทั้ง 5 ขั้น เป็นแนวทางการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มุ่งเน้นให้นักเรียนได้คิดเอง ได้สื่อสารความคิดนั้นออกมา ได้พูดคุยแสดงความคิดเห็น วิเคราะห์ วิจารณ์เกี่ยวกับความรู้และแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ที่แตกต่างจากของตัวเองและได้ถกเถียงแนวคิดทางคณิตศาสตร์กัน โดยใช้ความรู้คณิตศาสตร์และแนวคิดคณิตศาสตร์ ในการแก้ปัญหา ทำให้นักเรียนพัฒนากระบวนการคิดเชิงคณิตศาสตร์และความเข้าใจในเนื้อหา

คณิตศาสตร์ได้ดีขึ้น อีกทั้งยังเปิดโอกาสให้ครูได้เรียนรู้เกี่ยวกับความเข้าใจเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนด้วย

เรขาคณิตวิเคราะห์ เป็นเรื่องสำคัญเรื่องหนึ่งในการเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เพราะเป็นบทเรียนที่เชื่อมโยงความรู้พีชคณิตและเรขาคณิตเข้าด้วยกัน โดยเรขาคณิตวิเคราะห์ คือวิชาที่ใช้พีชคณิตมาช่วยศึกษาเรขาคณิต มีเป้าหมายเพื่อให้นักเรียนนำความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ไปใช้ในการแก้ปัญหา โดยแบ่งเป็นสองหัวข้อใหญ่ คือ ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ และภาคตัดกรวย โดยกล่าวถึงลักษณะและสมการของเส้นโค้งอันเกิดจากการตัดกรวยด้วยระนาบในลักษณะที่แตกต่างกัน ทำให้ได้เส้นโค้ง 4 ลักษณะ คือ วงกลม (Circle) พาราโบลา (Parabola) วงรี (Ellipse) และไฮเพอร์โบลา (Hyperbola) ในบทเรียนนี้นักเรียนจะได้เรียนรู้เกี่ยวกับการนำคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตจริง โดยเน้นการนำความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหา (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2553) แม้จะเป็นเรื่องที่มีการประยุกต์ใช้ในสิ่งประดิษฐ์ต่าง ๆ มากมายบนโลกใบนี้ แต่ในการศึกษาคณิตศาสตร์เรื่องนี้มีเนื้อหาเกี่ยวกับสมการและกราฟที่ทำความเข้าใจได้ยาก โดยเฉพาะอย่างยิ่ง จากประสบการณ์สอนของผู้วิจัยในการสอนและวัดผลการเรียนรู้ของผู้เรียนทั้งในระหว่างเรียนและหลังเรียน เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ พบว่า นักเรียนไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ เพราะไม่ทราบว่าจะต้องเริ่มต้นอย่างไร หรือรู้ว่าจะต้องเริ่มด้วยการวิเคราะห์ปัญหา แต่นักเรียนก็ไม่สามารถที่จะสร้างสมการหรือประยุกต์ใช้นิยามของวงกลม วงรี และพาลาโบลา ในสถานการณ์ปัญหาได้ เนื่องจากไม่รู้ว่าจะต้องกำหนดตัวแปรอย่างไร และไม่เข้าใจว่าสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ส่งผลให้ไม่สามารถใช้ตัวแทนความคิดเพื่อแสดงกระบวนการแก้ปัญหาดังกล่าวได้ และมีการเรียนรู้ในลักษณะการจดจำสูตรในการคำนวณและมุ่งเน้นการคำนวณตามขั้นตอนทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Algorithm) เป็นหลัก โดยลักษณะของผู้เรียนที่กล่าวมานี้สะท้อนผ่านการทำแบบฝึกหัด เช่น นักเรียนสามารถเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีได้ แต่ไม่สอดคล้องกับข้อมูลในโจทย์ปัญหาที่กำหนด หรือสามารถเขียนสูตรในการคำนวณได้ถูกต้องแต่ดำเนินการต่อไม่ได้ และจากการสังเกตนักเรียนกลุ่มนี้ ผู้วิจัยยังพบว่านักเรียนส่วนใหญ่ไม่สามารถทำงานให้สำเร็จตามเป้าหมายด้วยตนเองหากไม่ได้รับการแนะนำแนวทางจากครู ทั้งนี้เพราะว่า นักเรียนยังขาดทักษะการแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิด หรือ ขาดทักษะการคิดเชิงคณิตศาสตร์นั่นเอง

ดังนั้น จึงเป็นเรื่องยากสำหรับนักเรียนที่จะต้องมีความรู้จริงในเรื่องที่เรียน และต้องใช้วิธีการคิดที่หลากหลายและเหมาะสมมาใช้ในการแก้ปัญหาที่ครูกำหนดให้ การคิดเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Thinking) จึงเป็นส่วนสำคัญที่จะช่วยให้นักเรียนสามารถทำความเข้าใจปัญหา

คณิตศาสตร์ได้ดีขึ้น อีกทั้งยังเปิดโอกาสให้ครูได้เรียนรู้เกี่ยวกับความเข้าใจเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนด้วย

เรขาคณิตวิเคราะห์ เป็นเรื่องสำคัญเรื่องหนึ่งในการเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เพราะเป็นบทเรียนที่เชื่อมโยงความรู้พีชคณิตและเรขาคณิตเข้าด้วยกัน โดยเรขาคณิตวิเคราะห์ คือวิชาที่ใช้พีชคณิตมาช่วยศึกษาเรขาคณิต มีเป้าหมายเพื่อให้นักเรียนนำความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ไปใช้ในการแก้ปัญหา โดยแบ่งเป็นสองหัวข้อใหญ่ คือ ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ และภาคตัดกรวย โดยกล่าวถึงลักษณะและสมการของเส้นโค้งอันเกิดจากการตัดกรวยด้วยระนาบในลักษณะที่แตกต่างกัน ทำให้ได้เส้นโค้ง 4 ลักษณะ คือ วงกลม (Circle) พาราโบลา (Parabola) วงรี (Ellipse) และไฮเพอร์โบลา (Hyperbola) ในบทเรียนนี้นักเรียนจะได้เรียนรู้เกี่ยวกับการนำคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตจริง โดยเน้นการนำความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหา (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2553) แม้จะเป็นเรื่องที่มีการประยุกต์ใช้ในสิ่งประดิษฐ์ต่าง ๆ มากมายบนโลกใบนี้ แต่ในการศึกษาคณิตศาสตร์เรื่องนี้มีเนื้อหาเกี่ยวกับสมการและกราฟที่ทำความเข้าใจได้ยาก โดยเฉพาะอย่างยิ่ง จากประสบการณ์สอนของผู้วิจัยในการสอนและวัดผลการเรียนรู้ของผู้เรียนทั้งในระหว่างเรียนและหลังเรียน เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ พบว่า นักเรียนไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ เพราะไม่ทราบว่าจะต้องเริ่มต้นอย่างไร หรือรู้ว่าจะต้องเริ่มด้วยการวิเคราะห์ปัญหา แต่นักเรียนก็ไม่สามารถที่จะสร้างสมการหรือประยุกต์ใช้นิยามของวงกลม วงรี และพาลาโบลา ในสถานการณ์ปัญหาได้ เนื่องจากไม่รู้ว่าจะต้องกำหนดตัวแปรอย่างไร และไม่เข้าใจว่าสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ส่งผลให้ไม่สามารถใช้ตัวแทนความคิดเพื่อแสดงกระบวนการแก้ปัญหาดังกล่าวได้ และมีการเรียนรู้ในลักษณะการจดจำสูตรในการคำนวณและมุ่งเน้นการคำนวณตามขั้นตอนทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Algorithm) เป็นหลัก โดยลักษณะของผู้เรียนที่กล่าวมานี้สะท้อนผ่านการทำแบบฝึกหัด เช่น นักเรียนสามารถเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีได้ แต่ไม่สอดคล้องกับข้อมูลในโจทย์ปัญหาที่กำหนด หรือสามารถเขียนสูตรในการคำนวณได้ถูกต้องแต่ดำเนินการต่อไม่ได้ และจากการสังเกตนักเรียนกลุ่มนี้ ผู้วิจัยยังพบว่านักเรียนส่วนใหญ่ไม่สามารถทำงานให้สำเร็จตามเป้าหมายด้วยตนเองหากไม่ได้รับการแนะนำแนวทางจากครู ทั้งนี้เพราะว่า นักเรียนยังขาดทักษะการแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิด หรือ ขาดทักษะการคิดเชิงคณิตศาสตร์นั่นเอง

ดังนั้น จึงเป็นเรื่องยากสำหรับนักเรียนที่จะต้องมีความรู้จริงในเรื่องที่เรียน และต้องใช้วิธีการคิดที่หลากหลายและเหมาะสมมาใช้ในการแก้ปัญหาที่ครูกำหนดให้ การคิดเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Thinking) จึงเป็นส่วนสำคัญที่จะช่วยให้นักเรียนสามารถทำความเข้าใจปัญหา

และนำความรู้ที่เรียนมาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบ อีกทั้งการนำ 5 ขั้นการปฏิบัติของสไตน์ (5 Practice Model of Stein) มาใช้กับการจัดการเรียนรู้ เป็นการมุ่งเน้นให้นักเรียนได้แสดงวิธีคิดที่หลากหลายในการแก้ปัญหา มีโอกาสเรียนรู้และทำความเข้าใจปัญหา ระดมสมองหาแนวคิดและอภิปรายความคิดภายในกลุ่มและการอภิปรายทั้งชั้นเรียน โดยเชื่อมโยงแนวคิดของนักเรียนกับแนวคิดหลักทางคณิตศาสตร์ที่เป็นเป้าหมายของบทเรียนซึ่งจะนำไปไปสู่การพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนทางหนึ่งอีกด้วย นอกจากนี้หากเน้นให้นักเรียนได้อภิปรายแลกเปลี่ยนร่วมกันทั้งชั้นเรียนโดยใช้ความคิดและเหตุผลเพื่อหาข้อสรุป และเชื่อมโยงข้อสรุปที่หลากหลายเหล่านั้นมาสู่ความรู้ใหม่ด้วยตนเองอย่างเป็นขั้นเป็นตอน ทำให้นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลที่ดีขึ้น โดยการฝึกให้นักเรียนใช้การสังเกตและเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของข้อมูล ใช้ความรู้ความเข้าใจของตนเองในการให้เหตุผลเพื่อสนับสนุนหรือโต้แย้งความคิดของตนเองและเพื่อน ได้ฝึกการใช้เหตุผลในการอธิบายหรือสะท้อนความคิดของตนเอง ทำให้นักเรียนมีความเข้าใจในแนวคิดหรือวิธีการของตนเองดีขึ้น (ทรรศมน วินัยโกศล, 2562)

จากเหตุผลที่กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยจึงเห็นความสำคัญของปัญหาและมีความสนใจที่จะนำแนวคิดการจัดการเรียนรู้ด้วย 5 ขั้นการปฏิบัติของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ มาประยุกต์ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ทั้งนี้ผู้วิจัยใช้รูปแบบการวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียนซึ่งเป็นงานวิจัยเชิงคุณภาพและดำเนินการเป็นวงจรปฏิบัติการ PAOR มีลักษณะเป็นวงจรที่ต่อเนื่องกันทั้งหมด 3 วงจรปฏิบัติการเนื่องจากการวิจัยในชั้นเรียนเป็นการสืบเสาะหาความรู้อย่างมีระเบียบแบบแผนเพื่อแก้ปัญหาการเรียนรู้ของนักเรียนและการสอนของครู (ชาตรี ฝ่ายคำตา, ชลิตตา เจริญสุข, ดวงพร ศรีครินทร์, และ ภาวินี บริบูรณ์, 2559)

คำถามการวิจัย

1. บทบาทของครูในแต่ละขั้นการปฏิบัติ ในการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ควรมีลักษณะเป็นอย่างไร

2. การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ จะช่วยพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ได้หรือไม่ อย่างไร

จุดมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

2. เพื่อศึกษาผลการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์

2.1. เปรียบเทียบคะแนนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ใน กับเกณฑ์ร้อยละ 70 ของคะแนนเต็ม

2.2. ศึกษาพัฒนาการของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ระหว่างวงจรปฏิบัติการทั้ง 3 วงจร

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้ทราบแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และนำไปประยุกต์ใช้ในการจัดการเรียนรู้เรื่องอื่นที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ หรือวิชาอื่นต่อไป

2. ได้ทราบแนวทางในการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนวิทยาศาสตร์

ขอบเขตของงานวิจัย

1. ผู้เข้าร่วมวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนที่เน้นวิทยาศาสตร์ (ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551) ของโรงเรียนมัธยมศึกษาขนาดกลางแห่งหนึ่งในเขตภาคเหนือตอนล่าง ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562 ที่เรียนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 จำนวน 25 คน

2. เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้นำเนื้อหาในรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 ค31202 (สำหรับผู้เรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์) เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2

ปีการศึกษา 2562 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) โดยแบ่งเนื้อหาออกเป็น 3 เรื่อง ดังนี้

เรื่องที่ 1 วงกลม

เรื่องที่ 2 วงรี

เรื่องที่ 3 พาราโบลา

3. **ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย**

การวิจัยครั้งนี้ใช้ระยะเวลาทั้งหมด 3 สัปดาห์ เพื่อจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้เวลาจัดกิจกรรมการเรียนรู้ สัปดาห์ละ 5 ชั่วโมง รวมทั้งหมด 15 ชั่วโมง ดำเนินการทำวิจัยในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562

ข้อตกลงเบื้องต้น

ผลที่จะได้จากการวิจัยในครั้งนี้เป็นผลเฉพาะกลุ่มเท่านั้น การอ้างอิงผลการวิจัยไปใช้กับนักเรียนกลุ่มอื่น ยังมีข้อจำกัดอยู่มาก เนื่องจากผู้เข้าร่วมวิจัยเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนที่เน้นวิทยาศาสตร์ จึงเป็นกลุ่มนักเรียนที่มีความสามารถในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์สูง ดังนั้นการนำผลการวิจัยไปใช้อ้างอิงกับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนอื่น เช่น แผนการเรียนทวิศึกษา แผนการเรียนศิลป์-ภาษา นั้นยังมีข้อจำกัดอยู่มาก

นิยามศัพท์เฉพาะ

ในงานวิจัยครั้งนี้มีนิยามศัพท์เฉพาะ ดังต่อไปนี้

1. **การจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์** หมายถึง แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพื่อให้นักเรียนเกิดความรู้ใหม่ โดยใช้งานทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Task) ที่ต้องอาศัยความรู้ความเข้าใจและทักษะทางคณิตศาสตร์ในการทำงาน นักเรียนเรียนรู้แบบสืบสอบผ่านกระบวนการทำงานทางคณิตศาสตร์ การอภิปราย และสรุปเป็นความรู้ใหม่ด้วยตนเอง และครูใช้ขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้น (5 Practices) ในการวางแผนและดำเนินการให้นักเรียนอภิปรายในชั้นเรียนเกี่ยวกับแนวคิดหรือวิธีการของตนเองทั้งที่ถูกต้องและมีข้อผิดพลาดเพื่อให้สรุปเป็นความรู้ใหม่ด้วยตนเองอย่างมีประสิทธิภาพ ซึ่งมีขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับ 5 ขั้นการปฏิบัติ ดังนี้

ขั้นการปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์การเรียนรู้และการทำงานทางคณิตศาสตร์ (Anticipating) ครูออกแบบหรือคัดเลือกงานทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ ที่ต้องอาศัยความรู้ความเข้าใจและทักษะทางคณิตศาสตร์ในการทำงาน และคาดการณ์พฤติกรรมการเรียนรู้และการตอบสนองของนักเรียนต่องานทางคณิตศาสตร์ รวมถึงคาดการณ์วิธีคิดและข้อผิดพลาดของนักเรียนที่เกิดจากการทำงานทางคณิตศาสตร์

ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ (Launching) ครูนำเสนองานทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับวงกลม วงรี และพาราโบลา ด้วยวิธีการที่น่าสนใจและท้าทายให้นักเรียนมีส่วนร่วมกับกิจกรรม และกระตุ้นให้นักเรียนทำความเข้าใจเงื่อนไขสำคัญต่าง ๆ และปัญหาของงานทางคณิตศาสตร์ นั้น

ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน (Monitoring) นักเรียนใช้ความรู้เดิมทางคณิตศาสตร์ในการสำรวจและค้นหาแนวคิดหรือวิธีการเพื่อหาคำตอบหรือข้อสรุปจากงานทางคณิตศาสตร์ที่กำหนด ครูกำกับและติดตามแนวคิดหรือวิธีการรวมถึงพฤติกรรมการเรียนรู้ต่าง ๆ ขณะที่นักเรียนลงมือทำงานทางคณิตศาสตร์ โดยครูเน้นใน 3 เรื่อง ได้แก่ (1) ความรู้เดิมทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ถูกต้องหรือไม่ หากพบว่าไม่ถูกต้องครูดำเนินการแก้ไข (2) แนวคิดหรือวิธีการที่นำมาใช้เหมาะสมหรือไม่ และ (3) พฤติกรรมการเรียนรู้ที่นักเรียนแสดงออกต่องานทางคณิตศาสตร์ รวมถึงครูจดบันทึกแนวคิดหรือวิธีการต่าง ๆ ที่น่าสนใจทั้งที่ถูกต้องและมีข้อผิดพลาดของนักเรียนเพื่อนำไปคัดเลือกและกำหนดเป็นประเด็นการอภิปราย

ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน (Selecting and Sequencing) ครูคัดเลือกแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน เพื่อกำหนดเป็นประเด็นการอภิปรายโดยเลือกให้ครอบคลุมทั้งแนวคิดหรือวิธีการทั้งที่ถูกต้องและมีข้อผิดพลาด รวมถึงแนวคิดหรือวิธีการที่หลากหลาย ซึ่งเพียงพอในการสรุปเป็นความรู้ใหม่ และจัดลำดับการอภิปรายของแนวคิดหรือวิธีการที่คัดเลือกดังกล่าวตามความเหมาะสม รวมถึงแจ้งลำดับการนำเสนอให้กับนักเรียนที่เป็นเจ้าของแนวคิดหรือวิธีการซึ่งถูกคัดเลือกได้ทราบเพื่อเตรียมความพร้อมก่อนนำเสนอหน้าชั้นเรียน

ขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่ (Connecting) นักเรียนนำเสนอและอธิบายแนวคิดหรือวิธีการของตนเองหรือกลุ่มตามลำดับที่ครูกำหนดไว้ นักเรียนได้อภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียนเพื่อแลกเปลี่ยนความรู้ แนวคิดหรือวิธีการและเหตุผลเพื่อหาข้อสรุปในแต่ละประเด็น ครูให้นักเรียนพิจารณาเปรียบเทียบแนวคิดหรือวิธีการจากข้อสรุปต่าง ๆ และเชื่อมโยงไปสู่การสรุปเป็นความรู้ใหม่

2. **การคิดเชิงคณิตศาสตร์** หมายถึง กระบวนการทางสมองของนักเรียนที่เชื่อมโยงข้อมูลทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการคิด เพื่อทำความเข้าใจหรือหาคำตอบของปัญหาเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ ได้อย่างสมเหตุสมผล โดยมีการให้เหตุผลเกี่ยวกับกลยุทธ์ที่เลือกใช้นำเสนอตัวแทนความคิดในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เพื่อสื่อสารความหมายทางคณิตศาสตร์ให้บุคคลอื่นเข้าใจ ซึ่งวัดได้จากใบกิจกรรมและแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ตามองค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ดังนี้

2.1 **การแก้ปัญหา** เป็นความสามารถในการวิเคราะห์ปัญหา โดยสามารถระบุได้ว่าสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบคืออะไร สิ่งที่ปัญหากำหนดให้คืออะไร สามารถเลือกใช้กลยุทธ์ใน การแก้ปัญหา เช่น ใช้กฎ สูตร นิยาม หรือการวาดภาพที่เกี่ยวกับจุดและเส้นตรงบนระนาบ รวมทั้งสรุปคำตอบได้สอดคล้องกับปัญหา

2.2 **การให้เหตุผล** เป็นความสามารถในการใช้ความรู้และข้อมูลเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ ในการวิเคราะห์สถานการณ์ โดยสามารถอธิบายเหตุผลของการเลือกใช้กลยุทธ์หรือตัวแทนความคิดในวิธีการแก้ปัญหา และอธิบายความสมเหตุสมผลของคำตอบ

2.3 **การนำเสนอตัวแทนความคิด** เป็นความสามารถในการใช้ตัวแทนความคิดเพื่อทำความเข้าใจปัญหา สามารถใช้ตัวแทนความคิดเพื่อแสดงกระบวนการแก้ปัญหา และสามารถใช้ตัวแทนความคิดเพื่อแสดงการสรุปคำตอบของปัญหา โดยใช้การเขียนข้อความ วาดภาพ หรือสัญลักษณ์ ใช้การขีดเขียนหรือวงกลมข้อความในโจทย์ กำหนดตัวแปรเขียนแผนภาพ ตาราง กราฟ หรือตัวแบบทางเรขาคณิต

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงปฏิบัติการเพื่อพัฒนาการจัดการเรียนรู้ด้วย 5 ขั้นการปฏิบัติของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ผู้วิจัยได้ศึกษาเกี่ยวกับการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของผู้เรียนจากเอกสาร ตำรา และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เพื่อเป็นข้อมูลกำหนดกำหนดกรอบแนวคิดของการวิจัยประกอบการวิเคราะห์ และอภิปรายผลการวิจัย โดยแบ่งผลการศึกษาค้นคว้าออกเป็น 5 ตอน ดังต่อไปนี้

1. หลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของโรงเรียน (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551

1.1 สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม สำหรับผู้เรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนวิทยาศาสตร์

1.2 ผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์

1.3 คำอธิบายรายวิชา ค31202 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2

1.4 แผนภาพแสดงเนื้อหา เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ (Analytic Geometry)

1.5 บริบทของโรงเรียน

2. การจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์

2.1 ที่มาของการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์

2.2 ความหมายและลักษณะสำคัญของการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์

2.3 ขั้นตอนของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์

2.4 อุปสรรคหรือความท้าทายและข้อเสนอแนะในการนำการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ไปใช้

3. การคิดเชิงคณิตศาสตร์

3.1 ความหมายและความสำคัญของการคิดเชิงคณิตศาสตร์

3.2 องค์ประกอบการคิดเชิงคณิตศาสตร์

3.3 วิธีการศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์

3.4 แนวทางการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์

3.5 แนวทางการวัดและการประเมินผลการคิดเชิงคณิตศาสตร์

4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

4.1 งานวิจัยในประเทศไทย

4.2 งานวิจัยต่างประเทศ

5. กรอบแนวคิดในการวิจัย

หลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของโรงเรียน (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อความสำเร็จในการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 เนื่องจากช่วยให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วน ช่วยให้คาดการณ์วางแผนตัดสินใจแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม และนำไปใช้ในชีวิตจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ นอกจากนี้ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาด้านวิทยาศาสตร์ และศาสตร์อื่น ๆ อันเป็นรากฐานในการพัฒนาทรัพยากรบุคคลให้มีคุณภาพและพัฒนาเศรษฐกิจของประเทศให้ทัดเทียมกับนานาชาติ การศึกษาคณิตศาสตร์จึงจำเป็นต้องมีการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง เพื่อให้ทันสมัยและสอดคล้องกับสภาพเศรษฐกิจ สังคม และความรู้ทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีที่เจริญก้าวหน้าอย่างรวดเร็วในยุคโลกาภิวัตน์ (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ, 2560)

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาหลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของโรงเรียน (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 ประกอบด้วย 1) สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม สำหรับผู้เรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนวิทยาศาสตร์ 2) ผลการเรียนรู้ 3) คำอธิบายรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 4) เนื้อหาเรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ และ 5) บริบทของโรงเรียน เพื่อเป็นแนวทางในการกำหนดวัตถุประสงการเรียนรู้ การออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ การพัฒนาเครื่องมือหรือแนวทางการวัดและประเมินผลการเรียนรู้ ให้เหมาะสมสอดคล้องกับเป้าหมายของการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน และเหมาะสมกับสภาพจริงของนักเรียนผู้ร่วมวิจัย

1. สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่ม สำหรับผู้เรียนในระดับมัธยมศึกษาตอน – ปลาย แผนการเรียนวิทยาศาสตร์

1.1 สาระสำคัญ

คณิตศาสตร์เพิ่มเติมจัดทำขึ้นสำหรับผู้เรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ที่จำเป็นต้องเรียนเนื้อหาในสาระจำนวนและพีชคณิต การวัดและเรขาคณิต สถิติและความน่าจะเป็น รวมทั้งสาระแคลคูลัส ให้มีความลุ่มลึกขึ้น ซึ่งเป็นพื้นฐานสำคัญสำหรับการศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษาในด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์เพิ่มเติมนี้ได้จัดทำขึ้นให้มีเนื้อหาสาระที่ทัดเทียมกับนานาชาติ เน้นการคิดวิเคราะห์ การคิดอย่างมีวิจารณญาณ การแก้ปัญหา การคิดสร้างสรรค์ การใช้เทคโนโลยี การสื่อสารและการร่วมมือ รวมทั้งเชื่อมโยงความรู้สู่การนำไปใช้ในชีวิตจริง (กระทรวงศึกษาธิการ, 2560) ผู้เรียนจะได้เรียนรู้สาระสำคัญ ดังนี้

1.1.1 **สาระจำนวนและพีชคณิต** เรียนรู้เกี่ยวกับ เซต ตรรกศาสตร์ จำนวนจริงและพหุนาม จำนวนเชิงซ้อน ฟังก์ชัน ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ลำดับและอนุกรม เมทริกซ์ และการนำความรู้เกี่ยวกับจำนวนและพีชคณิตไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ

1.1.2 **สาระการวัดและเรขาคณิต** เรียนรู้เกี่ยวกับ เรขาคณิตวิเคราะห์ เวกเตอร์ในสามมิติ และการนำความรู้เกี่ยวกับการวัดและเรขาคณิตไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ

1.1.3 **สาระสถิติและความน่าจะเป็น** เรียนรู้เกี่ยวกับ หลักการนับเบื้องต้น ความน่าจะเป็น การแจกแจงความน่าจะเป็นเบื้องต้น และใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นในการอธิบายเหตุการณ์ต่าง ๆ และช่วยในการตัดสินใจ

1.1.4 **สาระแคลคูลัส** เรียนรู้เกี่ยวกับ ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต ปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต และการนำความรู้เกี่ยวกับแคลคูลัสไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ

1.2 สาระคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

เป้าหมายของการพัฒนาผู้เรียนในคณิตศาสตร์เพิ่มเติม มี 2 ลักษณะ คือ เชื่อมโยงกับมาตรฐานการเรียนรู้ในคณิตศาสตร์พื้นฐาน เพื่อให้เกิดการต่อยอดองค์ความรู้และเรียนรู้สาระนั้นอย่างลึกซึ้ง ได้แก่ สาระจำนวนและพีชคณิตและสาระสถิติและความน่าจะเป็น และไม่ได้เชื่อมโยงกับมาตรฐานการเรียนรู้ในคณิตศาสตร์พื้นฐาน ได้แก่ สาระการวัดและเรขาคณิต และสาระแคลคูลัส (กระทรวงศึกษาธิการ, 2560)

1.2.1 สาระจำนวนและพีชคณิต

1) เข้าใจความหลากหลายของการแสดงจำนวน ระบบจำนวน การดำเนินการของจำนวน ผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการ สมบัติของการดำเนินการ และนำไปใช้

2) เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน ลำดับและอนุกรม และนำไปใช้

3) ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ และเมทริกซ์ อธิบายความสัมพันธ์ หรือช่วยแก้ปัญหาที่กำหนดให้

1.2.2 สาระการวัดและเรขาคณิต

1) เข้าใจเรขาคณิตวิเคราะห์ และนำไปใช้

2) เข้าใจเวกเตอร์ การดำเนินการของเวกเตอร์ และนำไปใช้

1.2.3 สาระสถิติและความน่าจะเป็น

1) เข้าใจกระบวนการทางสถิติ และใช้ความรู้ทางสถิติในการแก้ปัญหา

2) เข้าใจหลักการนับเบื้องต้น ความน่าจะเป็น และนำไปใช้

1.2.4 สาระแคลคูลัส

1) เข้าใจลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และปริพันธ์ของฟังก์ชันและนำไปใช้

2. ผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ ได้จัดทำหนังสือเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ซึ่งประกอบด้วยผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม ดังตารางต่อไปนี้

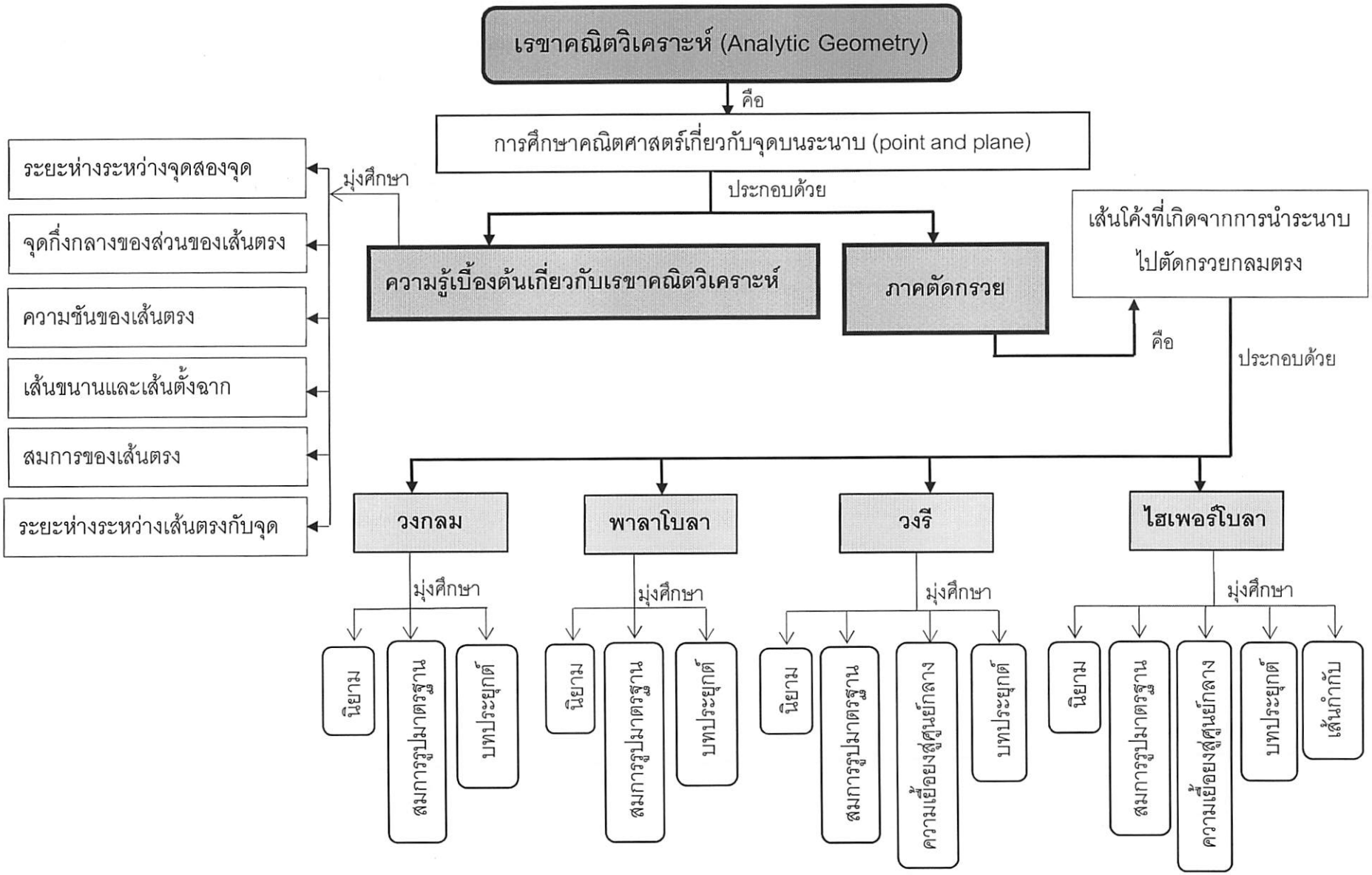
ตาราง 1 ผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

ชั้น	ผลการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม
ม.4		**เรขาคณิตวิเคราะห์**
	1. เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ ในการแก้ปัญหา	– จุดและเส้นตรง – วงกลม – พาราโบลา – วงรี – ไฮเพอร์โบลา

3. คำอธิบายรายวิชา ค31202 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2

ศึกษาสมบัติเกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ และรากที่ n ของจำนวนจริง ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม การแก้สมการและอสมการเอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม แบบจำลองคณิตศาสตร์เชิงเอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม ศึกษาเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ เส้นตรง ระยะห่างระหว่างจุดสองจุดบนระนาบ จุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุดบนระนาบ ความชันของเส้นตรง เส้นขนาน เส้นตั้งฉาก ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรง ภาคตัดกรวย (ประกอบด้วย วงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา) เพื่อพัฒนาทักษะและกระบวนการในการคิดคำนวณ การแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และนำประสบการณ์ด้านความรู้ ความคิด ทักษะกระบวนการที่ได้ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์ รวมทั้งเห็นคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานอย่างมีระบบระเบียบ มีความรอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณและมีความเชื่อมั่นในตนเอง โดยจัดประสบการณ์หรือสร้างสถานการณ์ในชีวิตประจาวันที่ใกล้ตัวให้ผู้เรียนได้ศึกษาค้นคว้าโดยการลงมือปฏิบัติจริง ทดลอง สรุปและรายงาน

4. แผนภาพแสดงเนื้อหา เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ (Analytic Geometry)



ภาพ 1 แผนภาพแสดงเนื้อหา เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ (Analytic Geometry)

5. บริบทของโรงเรียน

โรงเรียนที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลงานวิจัยครั้งนี้ คือ โรงเรียนมัธยมศึกษาขนาดกลางแห่งหนึ่งในจังหวัดกำแพงเพชร สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 41 สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ มีครูจำนวน 35 คน และมีนักเรียนจำนวน 557 คน เปิดสอนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 1–6 ซึ่งในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 1–3 มีระดับชั้นละ 3 ห้องเรียน และในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 จะแบ่งแผนการเรียนออกเป็น 3 แผนการเรียน คือ 1) แผนการเรียนวิทยาศาสตร์ 2) แผนการเรียนปกติทั่วไป และ 3) แผนการเรียนร่วมหลักสูตรอาชีวศึกษาและมัธยมศึกษาตอนปลาย (ทวิศึกษา) และโรงเรียนแห่งนี้ได้แบ่งกลุ่มสาระออกเป็น 8 กลุ่มสาระการเรียนรู้ตาม หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

บริบทห้องเรียนที่ผู้วิจัยได้ทำการศึกษา พบว่า เป็นห้องเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนโดยใช้ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 มีจำนวนนักเรียนทั้งหมด 25 คน แบ่งเป็นนักเรียนชาย 5 คน และนักเรียนหญิง 20 คน โดยสภาพห้องและบรรยากาศของห้องเรียน คือ เป็นห้องเรียนพัดลม มีหน้าต่างและประตู มีโต๊ะเรียนที่สามารถเคลื่อนย้ายให้สามารถทำกิจกรรมกลุ่มได้ง่ายและมีกระดานดำหน้าชั้นเรียน พร้อมทั้งเครื่องฉายทึบแสงและเครื่องขยายเสียง เป็นสิ่งอำนวยความสะดวกสำหรับการสอนภายในห้องเรียน มีหนังสือเรียนประกอบการเรียนและแหล่งเรียนรู้เพิ่มเติมภายในห้องเรียน อนุญาตให้นักเรียนนำอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ เช่น โทรศัพท์หรือคอมพิวเตอร์ มาใช้ในโรงเรียนเพื่อสนับสนุนการสืบค้นข้อมูลเมื่อนักเรียนต้องการ

การจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์

1. ที่มาของการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์

การปฏิรูปทางการศึกษาที่มุ่งเน้นนักเรียนเป็นศูนย์กลาง ทำให้ครูเกิดความยากลำบากเพิ่มขึ้นในการจัดการเรียนการสอนเพื่อให้นักเรียนได้เผชิญกับความท้าทาย เกิดการเรียนรู้ การคิดค้นการสร้างความรู้ด้วยตนเอง และนำความรู้ไปใช้ประโยชน์ได้ โดยสิ่งที่เป็นความกังวลหลักสำหรับครูคือการปฏิบัติที่เน้นนักเรียนเป็นสำคัญและเน้นให้นักเรียนได้ความรู้ที่จำเป็นอย่างครบถ้วน แนวทางหนึ่งที่ครูสามารถนำไปใช้ในห้องเรียนเพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว คือ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นการอภิปรายในชั้นเรียน ซึ่งแนวทางดังกล่าวเอื้อให้นักเรียนได้มีโอกาสเป็นผู้สร้างความรู้ รวมถึงเชื่อมโยงความคิดทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ ที่หลากหลายได้ด้วยตนเอง

การปฏิบัติ 5 ขั้น (5 Practices) ถูกคิดค้นขึ้นโดย แมรี เคย์ สไตน์ และคณะ (Stein et.al 2008) โดยเป็นวิธีการปฏิบัติที่ช่วยอำนวยความสะดวกแก่ครูในการจัดการอภิปรายในชั้นเรียนเพื่อช่วยให้นักเรียนได้เป็นผู้สร้างความรู้และนำความรู้ไปใช้งานได้ด้วยตนเอง โดยมีฐานแนวคิดมาจากการจัดการเรียนรู้แบบสืบสอบ (inquiry – based) ซึ่งเป็นวิธีการที่เน้นการพัฒนาความสามารถในการคิดและแก้ปัญหา การแสวงหาความรู้ โดยให้นักเรียนใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการแสวงหาความรู้และค้นหาความรู้ด้วยตนเอง

ต่อมา การปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ ได้รับพัฒนาโดย ลาร์สสัน (Larsson, 2015) เพื่อตอบสนองต่อแนวทางการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในการจัดการเรียนรู้ที่เน้นการอภิปรายในชั้นเรียน ลาร์สสันได้นำการปฏิบัติ 5 ขั้น (5 Practices) ที่คิดค้นขึ้นโดยสไตน์และคณะ มาใช้เป็นแนวทางในการนำไปจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นการอภิปรายอย่างมีประสิทธิภาพร่วมกับรูปแบบการจัดการเรียนการสอนแบบ LEDS (Launch- Explore-Discuss-Summarize) เพื่อเอื้อให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในงานทางคณิตศาสตร์ ให้นักเรียนได้ร่วมคิด ร่วมแสดงความคิดเห็นและเหตุผล ร่วมค้นคว้าและสรุปความรู้ด้วยตนเองจากการใช้คำถามหรือการชี้แนะจากครู ซึ่งนอกจากการใช้ 5 การปฏิบัตินี้แล้ว ยังขึ้นอยู่กับงานทางคณิตศาสตร์ที่ต้องมีเป้าหมายการเรียนรู้ที่ชัดเจนและต้องส่งเสริมให้นักเรียนใช้การตอบสนองได้อย่างหลากหลาย เพื่อตอบสนองต่อการปฏิรูปทางการศึกษาที่มุ่งเน้นนักเรียนเป็นศูนย์กลาง

2. ความหมายและลักษณะสำคัญของการปฏิบัติ 5 ขั้น

การปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ คือ รูปแบบการเรียนการสอนที่เน้นให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติในการสำรวจอภิปราย และสรุปเป็นความรู้ใหม่ด้วยตนเอง โดยครูใช้การปฏิบัติ 5 ขั้น (5 Practices) ซึ่งได้แก่ 1. การคาดการณ์ (Anticipating) 2. การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ (Launching) 3. การติดตาม (Monitoring) 4. การคัดเลือกและจัดลำดับ (Selecting and Sequencing) และ 5. การเชื่อมโยง (Connecting) เพื่อให้นักเรียนได้อภิปรายเกี่ยวกับผลงานหรือแนวคิดของนักเรียนเองและสรุปเป็นความรู้ใหม่อย่างมีประสิทธิภาพ

ลักษณะสำคัญของการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ นั้นเน้นให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติจริงผ่านการเรียนรู้แบบสืบสอบร่วมกับการอภิปรายทั้งชั้นเรียนโดยใช้งานทางคณิตศาสตร์ที่ส่งเสริมให้นักเรียนใช้แนวคิดหรือกลวิธีในการแก้ปัญหาได้อย่างหลากหลาย ซึ่งประกอบด้วย 3 องค์ประกอบได้แก่

2.1 การเรียนรู้แบบสืบสอบ (inquiry-based) ตามรูปแบบ LEDS (Launch- Explore-Discuss-Summarize)

การเรียนรู้แบบสืบสอบเป็นวิธีการที่เน้นการพัฒนาความสามารถในการคิดและแก้ปัญหา การแสวงหาความรู้ โดยให้นักเรียนใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการแสวงหาความรู้และค้นหาความรู้ด้วยตนเอง ซึ่งครูเป็นเพียงผู้ตั้งคำถามเป็นสื่อให้นักเรียนเกิดความคิด สืบค้น และหาคำตอบสำหรับปัญหาของตนได้ โดยมีขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามรูปแบบ LEDS ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน (Launch) เป็นขั้นที่ครูนำเสนอบริบทหรือสถานการณ์ปัญหาแล้วใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนได้วิเคราะห์เพื่อทำความเข้าใจบริบทหรือสถานการณ์ปัญหานั้นโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อระบุสิ่งที่งานต้องการทราบ ข้อมูลหรือเงื่อนไขสำคัญ รวมถึงวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของข้อมูล

ขั้นที่ 2 การสำรวจ (Explore) เป็นขั้นที่นักเรียนใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์และข้อมูลจากงานเพื่อกำหนดวิธีการ แนวทางหรือกลวิธีที่ใช้ในการหาคำตอบ โดยให้นักเรียนได้ช่วยเหลือซึ่งกันและกัน พร้อมกับครูใช้การพูดคุย ซักถาม เพื่อช่วยเหลือและชี้แนะให้นักเรียนสามารถทำงานทางคณิตศาสตร์ได้และให้นักเรียนได้อธิบายเหตุผลและตรวจสอบความถูกต้องของวิธีการ แนวทางหรือกลวิธีของตนเอง

ขั้นที่ 3 การอภิปรายและสรุปผล (Discuss and Summarize) เป็นขั้นที่ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ร่วมกันอภิปรายเพื่อแลกเปลี่ยนความรู้และเหตุผลที่หลากหลายที่ใช้ในการทำงานทางคณิตศาสตร์ พร้อมกับคอยช่วยเหลือโดยใช้คำถามให้นักเรียนสามารถนำความรู้และเหตุผลที่หลากหลายมาสรุปเป็นความรู้ใหม่ได้

2.2 การปฏิบัติ 5 ขั้น (5 Practices)

การปฏิบัติ 5 ขั้น ถูกคิดค้นขึ้นโดยสไตน์และคณะ โดยเป็นวิธีการปฏิบัติที่ช่วยอำนวยความสะดวกแก่ครูในการจัดการอภิปรายในชั้นเรียนอย่างมีประสิทธิภาพ เพื่อให้นักเรียนเกิดความคิดทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญ พัฒนาความคิด ความรู้ความเข้าใจ และเหตุผลทางคณิตศาสตร์ รวมถึงสามารถเชื่อมโยงความคิดที่หลากหลายเหล่านั้นไปสู่เป้าหมายการเรียนรู้ได้อย่างราบรื่นด้วยตนเอง ประกอบด้วย 5 การปฏิบัติ ได้แก่

การปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์ (Anticipating) เป็นการปฏิบัติของครูที่จะคาดการณ์การตอบสนองของนักเรียนที่เป็นไปได้ทั้งหมดในการทำงานทางคณิตศาสตร์ทั้งที่ถูกต้องและผิดพลาดพร้อมกับวางแผนการคัดเลือกและจัดลำดับการตอบสนองต่องานทางคณิตศาสตร์ รวมถึงเตรียมคำถามที่จะกระตุ้นให้นักเรียนได้คิด อธิบายเหตุผล และเชื่อมโยงความคิดที่หลากหลาย

การปฏิบัติที่ 2 การกำกับติดตาม (Monitoring) เป็นการปฏิบัติของครูที่จะให้นักเรียนทำงานเป็นรายบุคคลหรือกลุ่มย่อย และใช้คำถามที่ได้จากการวางแผนในการปฏิบัติที่ 1 กระตุ้นให้นักเรียนได้แสดงแนวคิดเพื่อหาคำตอบ พร้อมกับจดบันทึกแนวคิดเหล่านั้นลงในแบบบันทึก

การปฏิบัติที่ 3 การคัดเลือก (Selecting) เป็นการปฏิบัติของครูที่จะเลือกแนวคิดที่ได้จากการติดตามการตอบสนองของนักเรียนมาใช้เป็นประเด็นอภิปรายเพื่อให้เกิดการพูดคุย ถกเถียง แสดงความคิดเห็นและเหตุผลร่วมกัน

การปฏิบัติที่ 4 การจัดลำดับ (Sequencing) เป็นการปฏิบัติของครูที่จะจัดลำดับการอภิปรายจากแนวคิดที่ได้เลือกไว้ เพื่อให้การอภิปรายมีความสอดคล้องและเชื่อมโยงไปสู่ข้อสรุปหรือคำตอบได้ง่ายขึ้น โดยพิจารณาจาก 1) ข้อผิดพลาดหรือความเข้าใจผิดในการใช้แนวคิดหรือกลวิธี 2)แนวคิดหรือกลวิธีที่ถูกต้องสมบูรณ์ 3) ความหลากหลายของการใช้แนวคิดหรือกลวิธี 4) แนวคิดหรือกลวิธีที่นักเรียนส่วนใหญ่ใช้ และ 5) แนวคิดหรือกลวิธีที่ทำให้ปัญหาดูง่าย เพื่ออำนวยความสะดวกในการเชื่อมโยงการอภิปราย

การปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยง (Connecting) เป็นการปฏิบัติของครูที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้สร้างความเห็นร่วมกันและทำความเข้าใจเกี่ยวกับแนวคิดหรือกลวิธีของผู้อื่น ผ่านการโต้แย้ง แสดงความคิดเห็นและเหตุผล โดยครูใช้คำถามที่ได้จากการวางแผนในการปฏิบัติที่ 1 กระตุ้นให้นักเรียนได้เชื่อมโยงความคิดที่หลากหลายไปสู่ข้อสรุปหรือคำตอบตามเป้าหมายการเรียนรู้ที่กำหนดไว้

ต่อมาลาร์สสัน (Larsson M.) ได้นำ 5 ขั้นการปฏิบัติข้างต้นมาปรับให้เป็นขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ได้แก่ ขั้นการปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์การเรียนรู้และการทำงานทางคณิตศาสตร์ (Anticipating) ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ (Launching) ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน (Monitoring) ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน (Selecting and Sequencing) และขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่ (Connecting)

2.3 งานทางคณิตศาสตร์ (Mathematical task)

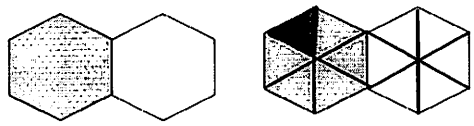
งานทางคณิตศาสตร์ (Mathematical task) เป็นงานที่ถูกออกแบบโดยครูเพื่อใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยมีลักษณะเป็นกิจกรรม ปัญหาหรือสถานการณ์ ที่สามารถกระตุ้นให้นักเรียนเกิดปัญหาหรือข้อสงสัยก่อนจะลงมือแก้ปัญหา (Henningsen and Stein, 1997) โดยงานทางคณิตศาสตร์ (Mathematical task) ที่ถูกนำมาใช้ในโมเดลของสไตน์นั้น Maria (2017) ได้กล่าวไว้ว่า โมเดลของสไตน์เน้นให้ความสำคัญกับงานทางคณิตศาสตร์ที่เลือกมาใช้ ซึ่งจะต้องเป็นงานระดับสูง (Higher-level demands) ที่ให้นักเรียนได้สำรวจ รวมถึงใช้แนวคิดหรือกลวิธีใน

การแก้ปัญหาได้อย่างหลากหลาย และช่วยให้นักเรียนสามารถบรรลุตามเป้าหมายการเรียนรู้ได้ โดย ลาร์สสันได้นำแนวคิดของสไตน์และคณะ มาใช้เป็นกรอบแนวคิดของระดับของงานทางคณิตศาสตร์ โดยสรุปได้ดังนี้

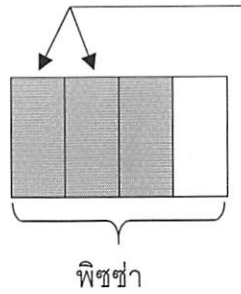
ตาราง 2 แสดงรายละเอียดของระดับงานทางคณิตศาสตร์พร้อมตัวอย่าง

ระดับ	ตัวอย่าง
Lower-level demands เป็นปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาที่ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในลักษณะการท่องจำ ในการหาคำตอบ	**โจทย์:** กฎสำหรับการคูณเศษส่วนคืออะไร? **การตอบสนองที่คาดหวังของนักเรียน:** นำตัวเศษคูณกับตัวเศษ และนำตัวส่วนคูณกับตัวส่วน หรือ คูณจำนวนสองจำนวนด้านบน และคูณจำนวนสองจำนวนด้านล่าง
Lower-level demands เป็นปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาที่ใช้ขั้นตอนโดยปราศจากความเข้าใจหรือวิธีการที่เฉพาะในการหาคำตอบ	**โจทย์** : 1) $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$ 2) $\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}$ 3) $\frac{4}{9}\times\frac{3}{5}$ **การตอบสนองที่คาดหวังของนักเรียน:** 1) $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{2\times3}{3\times4}=\frac{6}{12}$ 2) $\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}=\frac{5\times7}{6\times8}=\frac{35}{48}$ 3) $\frac{4}{9}\times\frac{3}{5}=\frac{4\times3}{9\times5}=\frac{12}{45}$

ตาราง 2 (ต่อ)

ระดับ	ตัวอย่าง
Higher-level demands เป็นปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาที่ใช้ความรู้และทักษะทางคณิตศาสตร์ในการหาคำตอบ	**โจทย์**: จงหา 1/6 ของ 1/2 โดยใช้รูปแบบบล็อกและวาดรูปเพื่อแสดงคำตอบและอธิบายวิธีการของตนเอง การตอบสนองที่คาดหวังของนักเรียน :  อันดับแรกนำบล็อกดังภาพด้านซ้ายมาแบ่งครึ่ง ซึ่งจะทำให้กลายเป็นรูปหกเหลี่ยมสองรูป แล้วฉันจะแบ่งรูปหกเหลี่ยมรูปแรกออกเป็น 6 ชิ้นเท่า ๆ กัน ซึ่งจะทำให้ได้รูปสามเหลี่ยม 6 อัน คิดเป็น 1/6 แล้วนำมาพิจารณาร่วมกับรูปสามเหลี่ยมที่แบ่งได้ในรูปที่สอง จะได้ว่า 1/6 ของ 1/2 คือ 1/12
Higher-level demands เป็นปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาที่ใช้ความรู้และทักษะทางคณิตศาสตร์ในการหาคำตอบ	**โจทย์**: สร้างสถานการณ์ในโลกแห่งความจริงสำหรับปัญหาต่อไปนี้ $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ แก้ปัญหาที่คุณสร้างโดยไม่ใช้กฎและอธิบายวิธีการของคุณ **หนึ่งในแนวคิดที่เป็นไปได้สำหรับการตอบสนองของนักเรียน** : สำหรับมื้อกลางวันแม่ให้พิซซ่าแก่ฉัน 3/4 ของพิซซ่าที่เราสั่งซื้อมา ซึ่งฉันรับประทานได้แค่ 2/3 ของพิซซ่าที่แม่ให้ ดังนั้นฉันรับประทานพิซซ่า ทั้งหมดเท่าไหร่ ?

ตาราง 2 (ต่อ)

ระดับ	ตัวอย่าง
	ฉันวาดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเพื่อแสดงพิซซ่าทั้งหมด จากนั้นฉันก็ตัดมันออกเป็น 4 ส่วนแล้วแรงเงา 3 ส่วนของทั้งหมดเพื่อแสดงส่วนที่แม่ให้ฉัน แต่เนื่องจากฉันรับประทานเพียง 2 ใน 3 ของพิซซ่าที่แม่ให้ ซึ่งเป็นเพียง 2 ส่วนที่แรงเงาเท่านั้น  นี่เป็นสิ่งที่ฉันรับประทานตอนกลางวัน ดังนั้น 2/3 ของ 3/4 คือครึ่งนึงของพิซซ่า

3. ขั้นตอนของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์

Larsson (2015) ได้นำการปฏิบัติ 5 ขั้น (5 Practices) ที่เป็นแนวคิดของ Stein et al. (2008) มาพัฒนาเป็น 5 การปฏิบัติใหม่เพื่อให้เหมาะสำหรับการนำไปใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดย การปฏิบัติ 5 ขั้น ใหม่ที่ถูกพัฒนาขึ้นมีความสอดคล้องกับระยะการจัดกิจกรรม ซึ่งสรุปได้ดังนี้

ตาราง 3 แสดงความสอดคล้องระหว่างขั้นการปฏิบัติและระยะการจัดกิจกรรม

ขั้นการปฏิบัติ	ระยะการจัดกิจกรรม (Phase)
การคาดการณ์ (Anticipating)	การวางแผน (Plan)
การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ (Launching)	การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ (Launch)

ตาราง 3 (ต่อ)

ขั้นการปฏิบัติ	ระยะการจัดกิจกรรม (Phase)
การติดตาม (Monitoring)	การสำรวจ (Explore)
การคัดเลือกและจัดลำดับ (Selecting and Sequencing)	
การเชื่อมโยง (Connecting)	การอภิปรายและสรุปผล (Discuss and Summarize)

พร้อมทั้งได้อธิบายรายละเอียดของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ ดังนี้

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ หมายถึง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพื่อให้นักเรียนเกิดความรู้ใหม่และนำความรู้ใหม่ไปใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหา โดยใช้งานทางคณิตศาสตร์ที่ต้องอาศัยความรู้ความเข้าใจและทักษะทางคณิตศาสตร์ในการทำงาน นักเรียนเรียนรู้แบบสืบสอบผ่านกระบวนการสำรวจ อภิปราย และสรุปเป็นความรู้ใหม่ด้วยตนเอง และครูใช้ขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้น (5 Practices) ในการวางแผนและดำเนินการให้นักเรียนอภิปรายในชั้นเรียนเกี่ยวกับแนวคิดหรือวิธีการของตนเองทั้งที่ถูกต้องและมีข้อผิดพลาด เพื่อให้สรุปเป็นความรู้ใหม่ด้วยตนเองอย่างมีประสิทธิภาพ ซึ่งมีขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับการปฏิบัติ 5 ขั้น ดังนี้

ขั้นการปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์การเรียนรู้และการทำงานทางคณิตศาสตร์ (Anticipating) ครูออกแบบหรือคัดเลือกงานทางคณิตศาสตร์ที่ต้องอาศัยความรู้ความเข้าใจและทักษะทางคณิตศาสตร์ในการทำงาน และคาดการณ์พฤติกรรมการเรียนรู้และการตอบสนองของนักเรียนต่องานทางคณิตศาสตร์ รวมถึงคาดการณ์วิธีคิดและข้อผิดพลาดของนักเรียนที่เกิดจากการทำงานทางคณิตศาสตร์

ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ (Launching) ครูนำเสนองานทางคณิตศาสตร์ด้วยวิธีการที่น่าสนใจและท้าทายนักเรียนให้มีส่วนร่วมกับกิจกรรม และกระตุ้นให้นักเรียนทาความเข้าใจเงื่อนไขสำคัญต่าง ๆ และปัญหาของงานทางคณิตศาสตร์

ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน (Monitoring) นักเรียนใช้ความรู้เดิมทางคณิตศาสตร์ในการสำรวจและค้นหาแนวคิดหรือวิธีการเพื่อหาข้อสรุปหรือคำตอบจากงานทางคณิตศาสตร์ที่กำหนด ครูกำกับและติดตามแนวคิด

หรือวิธีการรวมถึงพฤติกรรมการเรียนรู้ต่าง ๆ ขณะที่นักเรียนลงมือทำงานทางคณิตศาสตร์ โดยครูเน้นใน 3 เรื่อง ได้แก่ (1) ความรู้เดิมทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ถูกต้องหรือไม่ หากพบว่าไม่ถูกต้องครูดำเนินการแก้ไข (2) แนวคิดหรือวิธีการที่นำมาใช้เหมาะสมหรือไม่ และ (3) พฤติกรรมการเรียนรู้ที่นักเรียนแสดงออกต่องานทางคณิตศาสตร์ รวมถึงครูจดบันทึกแนวคิดหรือวิธีการต่าง ๆ ที่น่าสนใจทั้งที่ถูกต้องและมีข้อผิดพลาดของนักเรียนเพื่อนำไปคัดเลือกและกำหนดเป็นประเด็นการอภิปราย

ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน (Selecting and Sequencing) ครูคัดเลือกแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียนจากข้อมูลที่ได้บันทึกในขั้นการปฏิบัติที่ 3 เพื่อกำหนดเป็นประเด็นการอภิปรายโดยเลือกให้ครอบคลุมแนวคิดหรือวิธีการทั้งที่ถูกต้องและมีข้อผิดพลาด รวมถึงแนวคิดหรือวิธีการที่หลากหลาย ซึ่งเพียงพอในการสรุปเป็นความรู้ใหม่ และจัดลำดับการอภิปรายของแนวคิดหรือวิธีการที่คัดเลือกดังกล่าวตามความเหมาะสมรวมถึงแจ้งลำดับการนำเสนอให้กับนักเรียนที่เป็นเจ้าของแนวคิดหรือวิธีการซึ่งถูกคัดเลือกได้ทราบเพื่อเตรียมความพร้อมก่อนนำเสนอหน้าชั้นเรียน

ขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่ (Connecting) นักเรียนนำเสนอและอธิบายแนวคิดหรือวิธีการของตนเองหรือกลุ่มตามลำดับที่ครูกำหนดไว้ในขั้นการปฏิบัติที่ 4 ทีละประเด็น นักเรียนได้อภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียนเพื่อแลกเปลี่ยนความรู้ แนวคิดหรือวิธีการ และเหตุผลเพื่อหาข้อสรุปในแต่ละประเด็น ครูให้นักเรียนพิจารณาเปรียบเทียบแนวคิดหรือวิธีการจากข้อสรุปต่าง ๆ และเชื่อมโยงไปสู่การสรุปเป็นความรู้ใหม่ รวมถึงเปิดโอกาสให้นักเรียนได้นำความรู้ใหม่ดังกล่าวไปใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาที่หลากหลายต่อไป

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ข้างต้น สรุปได้ว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย 5 ขั้นการปฏิบัติ ดังนี้ ขั้นการปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์การเรียนรู้และการทำงานทางคณิตศาสตร์ (Anticipating) เป็นขั้นการคัดเลือกหรือออกแบบงานทางคณิตศาสตร์และคาดการณ์พฤติกรรมการเรียนรู้ต่าง ๆ ของนักเรียน ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ (Launching) เป็นขั้นที่ครูนำเสนองานทางคณิตศาสตร์โดยกระตุ้นให้นักเรียนได้ทำความเข้าใจเงื่อนไขต่าง ๆ และปัญหาของงานทางคณิตศาสตร์ ก่อนให้นักเรียนลงมือสำรวจงานทางคณิตศาสตร์ ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน (Monitoring) เป็นขั้นที่ครูจะกำกับและติดตามกิจกรรมการเรียนรู้ของและการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน (Selecting and Sequencing) เป็นขั้นที่ครูการคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการ

ของนักเรียนเพื่อใช้ในการอภิปราย และขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่ (Connecting) เป็นขั้นที่สำคัญ โดยครูเปิดโอกาสให้นักเรียนได้อภิปรายเพื่อแลกเปลี่ยนความรู้ ได้พูดคุยแสดงความคิดเห็น ได้ถกเถียงแนวคิดทางคณิตศาสตร์แสดงความคิดเห็นและเหตุผลร่วมกัน โดยครูจะคอยช่วยเหลือให้นักเรียนได้พิจารณาเชื่อมโยงข้อสรุปของแนวคิดหรือวิธีการต่าง ๆ เหล่านั้นไปสู่ข้อสรุปที่เป็นเป้าหมายการเรียนรู้

4. อุปสรรคหรือความท้าทายและข้อเสนอแนะในการนำการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ไปใช้

Larsson (2015) ได้นำเสนอลักษณะของอุปสรรคหรือความท้าทายสำหรับครูในการจัดการอภิปรายทั้งชั้นเรียน พร้อมกับให้ข้อเสนอแนะไว้ดังนี้

1. ครูควรคาดการณ์เกี่ยวกับรายละเอียดของแนวคิด วิธีการหรือกลวิธีการแก้ปัญหาที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่นักเรียนจะนำมาใช้ในการทำงานทางคณิตศาสตร์ไว้ล่วงหน้า รวมถึงสิ่งที่น่าจะเป็นความเข้าใจผิดหรือความสับสนของนักเรียน ซึ่งจะช่วยให้ครูสามารถวางแผนการกระตุ้นเพื่อให้นักเรียนได้แสดงแนวคิดอย่างหลากหลายและเป็นไปตามที่ครูคาดการณ์ไว้

2. การคัดเลือกหรือออกแบบงานทางคณิตศาสตร์ในโมเดลของสไตน์เน้นงานระดับสูง (Higher–level demands) เพื่อให้นักเรียนได้ใช้แนวคิดหรือกลวิธีในการแก้ปัญหาได้อย่างหลากหลายทั้งนี้การเลือกงานทางคณิตศาสตร์อาจใช้กรอบแนวคิดจากตาราง 2

3. ครูควรกระตุ้นให้นักเรียนได้ทำความเข้าใจปัญหาด้วยตนเอง เพื่อที่ครูจะได้ตรวจสอบความรู้พื้นฐานและความเข้าใจของนักเรียนว่านักเรียนมีความรู้ความเข้าใจที่ถูกต้องและเพียงพอในการทำงานทางคณิตศาสตร์หรือไม่ หากพบว่านักเรียนมีความรู้พื้นฐานหรือความเข้าใจที่ผิดพลาด ครูจะดำเนินการแก้ไขให้ถูกต้อง

4. ครูควรกระตุ้นให้นักเรียนได้ใช้ความรู้ความเข้าใจของตนเองในการสำรวจงานทางคณิตศาสตร์ โดยใช้คำถาม ชี้แนะ หรือยกตัวอย่าง มากกว่าที่จะเป็นการบอกคำตอบเพื่อให้นักเรียนได้ใช้ความรู้ ความเข้าใจ และความคิดในการคำตอบได้ด้วยตนเอง

5. ครูควรตัดสินใจเกี่ยวกับวิธีคัดเลือกและจัดลำดับวิธีการแก้ปัญหาของนักเรียนเพื่อที่จะใช้ในการอภิปรายในชั้นเรียน โดยคัดเลือกและจัดลำดับผลงานของนักเรียนเพื่อใช้ในการอภิปราย ดังนี้ 1) ผลงานที่ถูกต้องสมบูรณ์ 2) ผลงานที่ถูกต้องสมบูรณ์ซึ่งใช้วิธีการ แนวทางหรือกลวิธีที่แตกต่างจากข้อ 1 และ 3) ผลงานที่มีข้อผิดพลาดหรือความเข้าใจผิด หากปริมาณผลงานมีจำนวนมาก ครูจะต้องเลือกผลงานที่สำคัญเพื่อให้เหมาะสมกับเวลา เช่น เป็นผลงานที่มี

ข้อผิดพลาดหรือความเข้าใจผิดของนักเรียนส่วนใหญ่ หรือเป็นผลงานที่สามารถเปรียบเทียบความเหมือน/ต่างของแนวคิดหรือกลวิธีการแก้ปัญหาได้

6. ครูควรตั้งประเด็นคำถามที่ซับซ้อนเพื่อให้นักเรียนได้ใช้ความคิด เหตุผลและความรู้ทางคณิตศาสตร์มาอภิปรายร่วมกันในชั้นเรียน

7. ครูควรเน้นให้นักเรียนได้อธิบายที่มาหรือเหตุผลเกี่ยวกับแนวคิด วิธีการหรือกลวิธีการแก้ปัญหาที่นักเรียนนำมาใช้มากกว่าที่จะให้ความสำคัญกับขั้นตอนการแก้ปัญหาหรือคำตอบเพียงอย่างเดียว

8. ครูควรช่วยให้นักเรียนเกิดการเชื่อมโยงในการอภิปรายในชั้นเรียน โดยนำเสนอแนวคิดวิธีการหรือกลวิธีการแก้ปัญหาจากง่ายไปยาก รูปธรรมไปนามธรรม หรือหากมีหลายแนวคิด หลายเหตุผล ครูควรช่วยให้นักเรียนได้เชื่อมโยงความเหมือน ความต่างเหล่านั้น จนนักเรียนสามารถสรุปเป็นความรู้ใหม่ด้วยตนเอง

9. ครูควรสร้างบรรยากาศในห้องเรียนที่เอื้อให้นักเรียนเกิดการโต้เถียงกันในการอภิปรายในชั้นเรียน

10. ครูควรคัดเลือกเนื้อหาและออกแบบงานทางคณิตศาสตร์ให้เหมาะสมกับระยะเวลาในการจัดกิจกรรม เพื่อให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการแก้ปัญหามากที่สุด

จากอุปสรรคหรือความท้าทายสำหรับครูและข้อเสนอแนะในการนำการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ไปใช้ สรุปได้ว่า ครูควรคาดการณ์เกี่ยวกับรายละเอียดของวิธีการแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่นักเรียนจะนำมาใช้ คัดเลือกหรือออกแบบงานทางคณิตศาสตร์ที่ช่วยให้นักเรียนได้ใช้วิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลายในการแก้ปัญหา พร้อมทั้งกระตุ้นให้นักเรียนได้คิดอย่างเป็นลำดับ ตัดสินใจเลือกและจัดลำดับงานที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้ถกเถียงใช้ความรู้ความคิด เหตุผล โดยควรให้ความสำคัญเกี่ยวกับวิธีคิดหรือเหตุผลของนักเรียนมากกว่าขั้นตอนการคำนวณหรือคำตอบ รวมถึงเลือกเนื้อหาหรืองานทางคณิตศาสตร์ให้เหมาะสมกับเวลาที่จะให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการแก้ปัญหาได้อย่างเต็มที่

การคิดเชิงคณิตศาสตร์

1. ความหมายและความสำคัญของการคิดเชิงคณิตศาสตร์

การคิดเชิงคณิตศาสตร์มาจากภาษาอังกฤษว่า Mathematical Thinking เป็นศัพท์ที่กว้างประกอบด้วยหลายมุมมองและความหมาย โดยมากนักวิจัยทางด้านคณิตศาสตร์และนักวิจัยด้านคณิตศาสตร์ศึกษา ได้ให้ความหมายของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

Duncan (2008) กล่าวว่า การคิดเชิงคณิตศาสตร์หมายถึงกระบวนการทำความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ที่เน้นถึงการใช้ความรู้ต่าง ๆ ที่ได้เรียนมา ซึ่งกระบวนการนี้จะช่วยให้ทราบถึงจุดประสงค์ทางคณิตศาสตร์และช่วยให้นักเรียนได้มองเห็นถึงสิ่งที่เกี่ยวกับการฝึกฝนทางคณิตศาสตร์มากกว่าการจัดแบ่งความสามารถ โดยที่นักเรียนจะมีข้อตกลงเกี่ยวกับบริบททางคณิตศาสตร์ นั่นคือความสำเร็จผ่านกระบวนการ

Greenwood (1993) ได้กล่าวว่า การคิดเชิงคณิตศาสตร์ว่าเป็นความสามารถในการเข้าใจแบบรูป หาสถานการณ์ร่วมของปัญหา ระบุข้อผิดพลาด และการสร้างยุทธวิธีใหม่ การคิดเชิงคณิตศาสตร์ทำให้เกิดวิธีการเชิงระบบสำหรับปัญหาเชิงปริมาณที่เป็นผลของการเรียนรู้และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เป็นการเน้นการเรียนรู้มากกว่าการมุ่งเพียงผลลัพธ์หรือคำตอบ และกล่าวย้ำว่า ถ้าสนับสนุนจุดเน้นนี้ให้เกิดขึ้นในการเรียนคณิตศาสตร์จะเป็นประโยชน์ ไม่เพียงแต่การเรียนรู้ในเนื้อหาวิชาเท่านั้น แต่จะเกิดความสามารถในการคิดและให้เหตุผลในตัวนักเรียนด้วย

Henderson et al. (2002) ได้เสนอนิยามทั่ว ๆ ไปของ "การคิดทางคณิตศาสตร์" ว่าเป็นการใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์ ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ อย่างใดอย่างหนึ่งที่แสดงออกมาอย่างชัดเจน หรือแสดงออกมาเป็นนัยในการหาคำตอบของปัญหา

Lutfiyya (1998) กล่าวว่า การคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่รวมถึงการใช้ทักษะการคิดเชิงคณิตศาสตร์อย่างชาญฉลาด เพื่อที่จะนาไปสู่ความเข้าใจในแนวคิดนั้น ๆ ซึ่งจะต้องอาศัยการค้นพบความสัมพันธ์ที่อยู่ระหว่างแนวคิดนั้น ๆ อาจจะเป็นภาพหรือการได้รับการสนับสนุนจากเงื่อนไขที่เกี่ยวกับแนวคิดและความสัมพันธ์เหล่านั้น และการแก้ปัญหาที่รวมถึงแนวคิดนั้น ๆ

Manouchehri (2005) กล่าวว่าการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เป็นการใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์เพื่อทำความเข้าใจสิ่งต่าง ๆ รอบตัว กระบวนการทำความเข้าใจนี้ไม่ใช่คณิตศาสตร์แต่เป็นการคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ และการดำเนินการเพื่อให้ได้คำตอบเป็นการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เครื่องมือทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่เป็นนามธรรม เป็นสัญลักษณ์ การนำเสนอตัวแทนความคิด และการดำเนินการทางสัญลักษณ์ ซึ่งเครื่องมือทางการคิดเชิงคณิตศาสตร์ประกอบด้วยการแก้ปัญหา การนำเสนอตัวแทนความคิด และการให้เหตุผล

Mason et al. (1994) ได้ให้ความหมายของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ไว้ว่าเป็นกระบวนการคิดที่ดำเนินไปเป็นพลวัต ซึ่งจะช่วยให้เราสามารถจัดการสิ่งที่มีความซับซ้อนและขยายความเข้าใจของเราได้

O' Daffer and Thornquist (1993) ได้ให้ความหมายเกี่ยวกับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ว่า หมายถึงการใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่หลากหลายในการทำความเข้าใจแนวคิด ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิด สร้างข้อสรุปหรือสนับสนุนข้อสรุปเกี่ยวกับแนวคิดและความสัมพันธ์ของแนวคิดและแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับแนวคิดนั้น

Romberg and Kaput (1999) กล่าวว่า การคิดเชิงคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการทำคณิตศาสตร์ที่เป็นกิจกรรมเกี่ยวกับหลักสูตร รวมไปถึงการแก้ปัญหาของผู้เรียนและการทำให้เป็นคณิตศาสตร์ของผู้เรียน เนื่องจากการคิดทางคณิตศาสตร์เป็นเป้าหมายที่สำคัญของระบบการศึกษา เป็นสิ่งสำคัญสำหรับวิธีการเรียนรู้ของผู้เรียน และการสอนคณิตศาสตร์

Swan and Ridgway (2005) กล่าวว่า การคิดเชิงคณิตศาสตร์ นั้นขึ้นอยู่กับองค์ประกอบที่แตกต่างกัน ได้แก่ ความรู้หลักที่เด่น ๆ วิธีการแก้ปัญหา การใช้แหล่งข้อมูลที่ได้ผล มีการรับรู้ทางคณิตศาสตร์ และการลงมือปฏิบัติเกี่ยวกับการคิดเชิงคณิตศาสตร์

Isoda and Katagiri (2012) กล่าวว่า ความสามารถที่สำคัญที่สุดที่จะต้องมีการปลูกฝังเข้าไปในการคิดและการตัดสินใจอย่างเป็นอิสระของนักเรียนอย่างต่อเนื่อง คือ การคิดเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ช่วยให้ทำความเข้าใจความสำคัญของการใช้ความรู้และทักษะการเรียนรู้ วิธีการเรียด้วยตนเอง และการบรรลุความสามารถที่จำเป็นสำหรับการเรียนรู้ที่เป็นอิสระ รวมทั้ง การคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียน ยังสะท้อนให้เห็นถึงกระบวนการจัดการเรียนการสอน ด้วยเหตุนี้การแสดงแนวคิดของนักเรียนในการแก้ปัญหาของนักเรียนจึงเป็นสิ่งที่มีความสำคัญ

พิเชาวน์ องค์อนุรักษ์ (2552) ได้ให้ความหมาย การคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียน หมายถึง ผลิตผล (product) ที่เกิดขึ้นจากแนวคิดทางคณิตศาสตร์และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (mathematical ideas and processes) ของนักเรียน ซึ่งนักเรียนจะแสดงออกในรูปแบบของยุทธวิธี หรือวิธีคิด หรือวิธีการต่าง ๆ ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ผ่านภาษาพูด การวาดเขียน หรือการแสดงอิริยาบถต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกัน ตามสมมติฐานที่เชื่อว่าสิ่งที่มนุษย์พูดในระหว่างการแก้ปัญหาจะใกล้เคียงกับการคิดของคน ๆ นั้นในขณะนั้นมากที่สุด

รุ่งทิวา นาบำรุง (2550) ได้ให้ความหมายไว้ว่า การคิดเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Thinking) เป็นวิธีการคิดของบุคคลทางด้านคณิตศาสตร์ การคิดแก้ปัญหาเกี่ยวกับปริมาณหรือจำนวน การให้เหตุผล โดยการใช้ความรู้ ทักษะและวิธีการที่หลากหลายทางคณิตศาสตร์ ในการทำความเข้าใจ ค้นหาคำตอบของปัญหาที่ไม่คุ้นเคย สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ให้บุคคลอื่นรับรู้ได้ โดยวัดจากการแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิด

จากความหมายของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ข้างต้น สรุปได้ว่า การคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการทางสมองของนักเรียนที่ใช้ความรู้ด้านคณิตศาสตร์ที่หลากหลายมาหาคำตอบของปัญหา โดยมีการให้เหตุผลเกี่ยวกับกลยุทธ์ที่เลือกใช้ นำเสนอตัวแทนความคิดในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เพื่อสื่อสารความหมายทางคณิตศาสตร์ให้บุคคลอื่นเข้าใจ ซึ่งกระบวนการทางสมอง เป็นสิ่งที่อยู่ภายในสมอง ไม่สามารถจับต้องได้ มีลักษะเป็นนามธรรม ที่ต้องใช้การวิเคราะห์ข้อมูล ความเข้าใจเพื่อเลือกกลยุทธ์ในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การใช้ตัวแทนความคิดแสดงสื่อความหมายในการแก้ปัญหา เพื่อสรุปคำตอบของปัญหาได้ถูกต้อง ดังนั้น ผู้วิจัยจะศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ต้องมีเครื่องมือเพื่อที่จะสามารถสังเกตได้ แนวทางหนึ่งคือ การออกแบบและคัดเลือกงานทางคณิตศาสตร์ เป็นหัวใจสำคัญ ครูจะต้องศึกษาวิธีการตั้งคำถามหรือออกแบบงานที่จะช่วยส่งเสริมการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของผู้เรียน นอกจากนี้ครูยังต้องวิเคราะห์ผลการอภิปรายทางคณิตศาสตร์

ความสำคัญของการคิดเชิงคณิตศาสตร์

นักการศึกษาหลายท่านได้อธิบายถึงความสำคัญของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ไว้ ดังนี้

Sternberg (1987) กล่าวถึงความสำคัญของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ไว้ว่า การคิดเชิงคณิตศาสตร์ เป็นการนิยามข้อมูลให้กระจ่าง ส่งผลให้เกิดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์อย่างมีประสิทธิภาพของแต่ละบุคคล

Jackson et al. (1994) กล่าวถึงความสำคัญของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ได้ว่า มนุษย์ได้ใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์ (Mathematical idea) เกี่ยวกับปัญหาในชีวิตประจำวันอยู่ตลอดเวลา แต่ไม่ได้สนใจศึกษาปัญหานั้นเท่าใดนัก แต่หากมีบางคนให้ความสนใจ สนุกกับปัญหาที่เกิดขึ้น มีความกระตือรือร้น พยายามศึกษารูปแบบโดยให้เหตุผลตามหลักตรรกศาสตร์ อาจกล่าวได้ว่าคน ๆ นั้นได้ใช้การคิดเชิงคณิตศาสตร์

Stacey (2007) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ไว้ว่า การคิดเชิงคณิตศาสตร์ มีความสำคัญใน 3 วิถีทาง ได้แก่ 1) การคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นเป้าหมายที่สำคัญของการศึกษา 2) การคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นสิ่งสำคัญต่อวิธีการเรียนรู้คณิตศาสตร์ 3) การคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นสิ่งสำคัญสำหรับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

จากความสำคัญของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ดังที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่าการคิดเชิงคณิตศาสตร์มีความสำคัญต่อการจัดการข้อมูล สถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หรืองานทางคณิตศาสตร์ที่มีความซับซ้อน ทั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์และปัญหาในชีวิตจริง

2. องค์ประกอบการคิดเชิงคณิตศาสตร์

NCTM (1991) กล่าวถึงกระบวนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ว่ามีองค์ประกอบที่สำคัญ 5 ส่วน คือ

1) การแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์
2) การให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์
3) การสื่อสารความคิดเชิงคณิตศาสตร์
4) การเชื่อมโยงสาระหลักเชิงคณิตศาสตร์
5) การนำเสนอตัวแทนความคิดเชิงคณิตศาสตร์

สมาคมวิจัยทางคณิตศาสตร์ศึกษาแห่งประเทศสหรัฐอเมริกา ได้กล่าวถึงความสามารถของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ประกอบไปด้วย ความเข้าใจเกี่ยวกับความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ การคิดคล่อง ความสามารถเชิงยุทธวิธี (ความสามารการคิดวิธีและแก้ปัญหา) การมีเหตุผล (ความสามารถที่จะคิดอย่างเป็นขั้นตอน การสะท้อน การอ้างเหตุผล) การควบคุมอย่างมีประสิทธิภาพ (การมองให้เป็นสิ่งที่ท้าทายและเกิดความมั่นใจในความสามารถของตนเอง)

กรองทอง ไครีรี (2548. อ้างอิงใน รุ่งทิวา นาบำรุง, 2550) ได้วิเคราะห์ว่าองค์ประกอบทั้ง 5 ประการ ดังกล่าวนั้นเกี่ยวข้องกับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยระบุว่า ในการแก้ปัญหาผู้เรียนต้องใช้ความสามารถในการสำรวจ (Explore) รวมทั้งมีการคิดเกี่ยวกับตัวปัญหา และการใช้เหตุผลในการหาคำตอบของปัญหาทั้งแบบธรรมดา (Routine Problem) หรือปัญหาที่แปลกใหม่ (Non-Routine Problem) นอกจากนี้ผู้ที่ใช้เหตุผลและใช้การคิดเชิงคณิตศาสตร์ในกระบวนการแก้ปัญหามักจะแสดงพฤติกรรมต่อไปนี้คือ ใช้การสังเกตอย่างรอบคอบเพื่อค้นหาแบบรูปโครงสร้าง หรือสิ่งที่ไม่เป็นไปตามธรรมดาจากสภาพการณ์หรือปัญหาในชีวิตจริง หรือในสถานการณ์ปัญหาที่อยู่ในรูปสัญลักษณ์ ตั้งคำถามต่อตนเองว่าแบบรูปเหล่านี้เกิดขึ้นโดยบังเอิญหรือเกิดขึ้นอย่างมีเหตุผล สร้างข้อคาดการณ์ และพิสูจน์ข้อคาดการณ์ของตนเอง กิจกรรมการแก้ปัญหาจะทำให้เด็กเกิดทักษะทางภาษาและสังคม เกิดทักษะการทำงานร่วมกัน ตลอดจนมีทักษะการสื่อสารการคิดเชิงคณิตศาสตร์เกิดขึ้น ทั้งนี้เนื่องจากการสื่อสารเป็นวิธีการที่บุคคลแลกเปลี่ยนความคิดซึ่งกันและกัน มีการทำความเข้าใจแนวคิด (Ideas) ซึ่งแนวคิดต่าง ๆ เป็นสิ่งที่สะท้อนความรู้และความเข้าใจของแต่ละบุคคล การอภิปรายโต้แย้งถกเถียงจะเป็นประเด็นสำคัญที่นำไปสู่การปรับปรุงแก้ไขปัญหา ที่ถูกต้องสมบูรณ์ยิ่งขึ้น นอกจากนี้การนำเสนอตัวแทนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ยังมีความเกี่ยวข้องกับกระบวนการและผลผลิตของการคิดซึ่งสามารถสังเกตเห็นได้จากภายนอกและเกิดขึ้นภายในสมองของผู้เรียนที่กำลังทำงานทางคณิตศาสตร์

Kriegler (2004) ได้กล่าวว่าทักษะการแก้ปัญหา (Problem Solving Skills) ประกอบด้วย การใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา การแก้ปัญหาที่หลากหลาย ทักษะการนำเสนอตัวแทนความคิด (Representation Skills) ใช้การนำเสนอความสัมพันธ์ที่สามารถมองเห็น สัญลักษณ์ตัวเลข ภาษา และทักษะการให้เหตุผล (Reasoning Skills) พิจารณาในส่วนของการให้เหตุผลอุปนัยและนิรนัย เป็นเครื่องมือที่ช่วยในการคิดเชิงคณิตศาสตร์รวมถึงการคิดวิเคราะห์ของนักเรียน

Swan and Ridgway (2005) กล่าวถึงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ขึ้นอยู่กับองค์ประกอบ ที่แตกต่างกัน ได้แก่ ความรู้หลักที่เด่น ๆ วิธีการแก้ปัญหา การใช้แหล่งข้อมูลที่ได้ผล มีการรับรู้ทางคณิตศาสตร์ และการลงมือปฏิบัติเกี่ยวกับการคิดเชิงคณิตศาสตร์

แพรไหม สามารถ (2555) ได้กำหนดองค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อศึกษาการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ตามแนวคิดของ Kriegler (2004) โดยแบ่งเป็นความสามารถ 3 ด้าน ดังนี้

1. การแก้ปัญหา เป็นความสามารถในการวิเคราะห์ปัญหาโดยสามารถระบุได้ว่าสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบคืออะไรสิ่งที่ปัญหากำหนดให้คืออะไรโดยสามารถเลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาได้หลากหลาย เช่น การสร้างรายการ ตาราง สมการ การวาดภาพ การลองผิดลองถูก รวมทั้งสรุปคำตอบได้สอดคล้องกับปัญหา

2. การให้เหตุผล เป็นความสามารถในการใช้ความและข้อมูลในการวิเคราะห์สถานการณ์อธิบายเหตุผลของการเลือกใช้กลยุทธ์หรือตัวแทนความคิดในวิธีการแก้ปัญหา และอธิบายความสมเหตุสมผลของคำตอบ

3. การนำเสนอตัวแทนความคิด เป็นความสามารถในการใช้ตัวแทนความคิดเพื่อทำความเข้าใจปัญหา สามารถใช้ตัวแทนความคิดเพื่อแสดงกระบวนการแก้ปัญหา และสามารถใช้ตัวแทนความคิดเพื่อแสดงการสรุปคำตอบของปัญหา โดยอาจใช้การเขียนข้อความ วาดภาพหรือสัญลักษณ์ ตัวเลข

จากองค์ประกอบการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ในการแก้ปัญหาในขณะปฏิบัติงานหรือสถานการณ์ต่าง ๆ ของชีวิตประจำวัน จะต้องใช้ทักษะการคิดหลายรูปแบบผสมผสานกันตามเหตุการณ์ สถานการณ์หรือปัญหาที่พบ ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้กำหนดองค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ตามแนวคิดของ Kriegler (2004) ซึ่งประกอบด้วย 3 ด้าน คือ 1) การแก้ปัญหา ซึ่งผู้เรียนต้องสามารถวิเคราะห์ปัญหา เลือกใช้กลยุทธ์และสรุปคำตอบให้สอดคล้องกับปัญหา 2) การให้เหตุผล ผู้เรียนสามารถใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์และข้อมูลในการวิเคราะห์ปัญหา อธิบายเหตุผลในการเลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา รวมทั้งอธิบายความสมเหตุสมผลของคำตอบ

และ 3) การนำเสนอตัวแทนความคิด ผู้เรียนสามารถใช้ตัวแทนความคิดเพื่อทำความเข้าใจปัญหา ใช้ตัวแทนความคิดเพื่อแสดงกระบวนการแก้ปัญหา และใช้ตัวแทนความคิดเพื่อสรุปปัญหา หรือสื่อความหมายสอดคล้องกับปัญหา โดยใช้ รูปภาพ ข้อความ ตัวแปร สัญลักษณ์ ตัวเลข ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนสามารถทำความเข้าใจและวิเคราะห์ปัญหา พร้อมทั้งตัดสินใจเลือกกลวิธีในการคิด นำรูปแบบการคิดมาใช้ หรืออาจมีการขยายแนวคิดเดิมอย่างมีเหตุผล

3. วิธีการศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์

การศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นการศึกษาสิ่งที่เป็นนามธรรม และเป็นการศึกษากระบวนการในสมอง จึงจำเป็นต้องอาศัยเครื่องมือต่าง ๆ เพื่อศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ โดยมีนักการศึกษาได้เสนอไว้ดังนี้

Kriegler (2004) ได้กล่าวว่าทักษะการแก้ปัญหา (Problem Solving Skills) ทักษะการนำเสนอตัวแทนความคิด (Representation Skills) และ ทักษะการให้เหตุผล (Reasoning Skills) เป็นเครื่องมือที่ช่วยในการคิดเชิงคณิตศาสตร์รวมถึงการคิดวิเคราะห์ของนักเรียน

Manouchehri (2005) กล่าวว่าเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่ช่วยในการทำความเข้าใจ สิ่งต่าง ๆ รอบตัวคือ 1) การแก้ปัญหา 2) การนำเสนอตัวแทนความคิดในรูปแบบที่มองเห็นได้ เช่น แผนภูมิ รูปภาพ หรือกราฟ ในรูปตัวเลข เช่น ตาราง การทำรายการ ในรูปสัญลักษณ์และในรูปคำพูด 3) การให้เหตุผล ได้แก่ การสร้างกรณีทั่วไป การสรุปที่สมเหตุสมผล วิธีการอุปนัยซึ่งเป็นการตรวจสอบกรณีเฉพาะ การจำแนกแบบรูปและความสัมพันธ์ การขยายแบบรูปและความสัมพันธ์

Cai (2003) ได้กล่าวถึงการตรวจสอบการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนจากการใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา การแสดงขอบเขตความรู้ทางคณิตศาสตร์ การนำเสนอตัวแทนความคิดของกระบวนการแก้ปัญหา การสนับสนุนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ และการตั้งปัญหาใหม่บนพื้นฐานของสถานการณ์ปัญหาเดิม

NCTM. (2000) ได้กล่าวว่า การศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก ครูจำเป็นต้องรู้ว่าเด็กรู้อะไร พวกเขามีความเข้าใจในบริบททางมโนทัศน์อย่างไร ใช้วิธีการใดในการคิดคำนวณ มีความเข้าใจอย่างถ่องแท้หรือไม่ สามารถสื่อสารความคิดของตนเองได้เพียงใด สิ่งต่าง ๆ เหล่านี้ไม่สามารถดูได้จากการทำงานของเด็กหรือจากการสังเกตเท่านั้น ดังนั้นการที่ครูรู้จักใช้คำถามให้เด็กแสดงการคิดหรือตรวจสอบการคิดของตนเอง จะช่วยให้เด็กมีความเข้าใจและช่วยให้สามารถศึกษาถึงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กได้เป็นอย่างดี ซึ่งในการใช้คำถามต้องพยายามใช้คำซึ่งจะช่วยให้คำถามนั้นสามารถตอบได้กว้างขึ้นและไม่ควรแนะคำตอบ

จากวิธีการศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่าต้องอาศัยเครื่องมือต่อไปนี้ในการศึกษา คือ การแก้ปัญหา การนำเสนอตัวแทนความคิด การให้เหตุผล และการใช้คำถาม

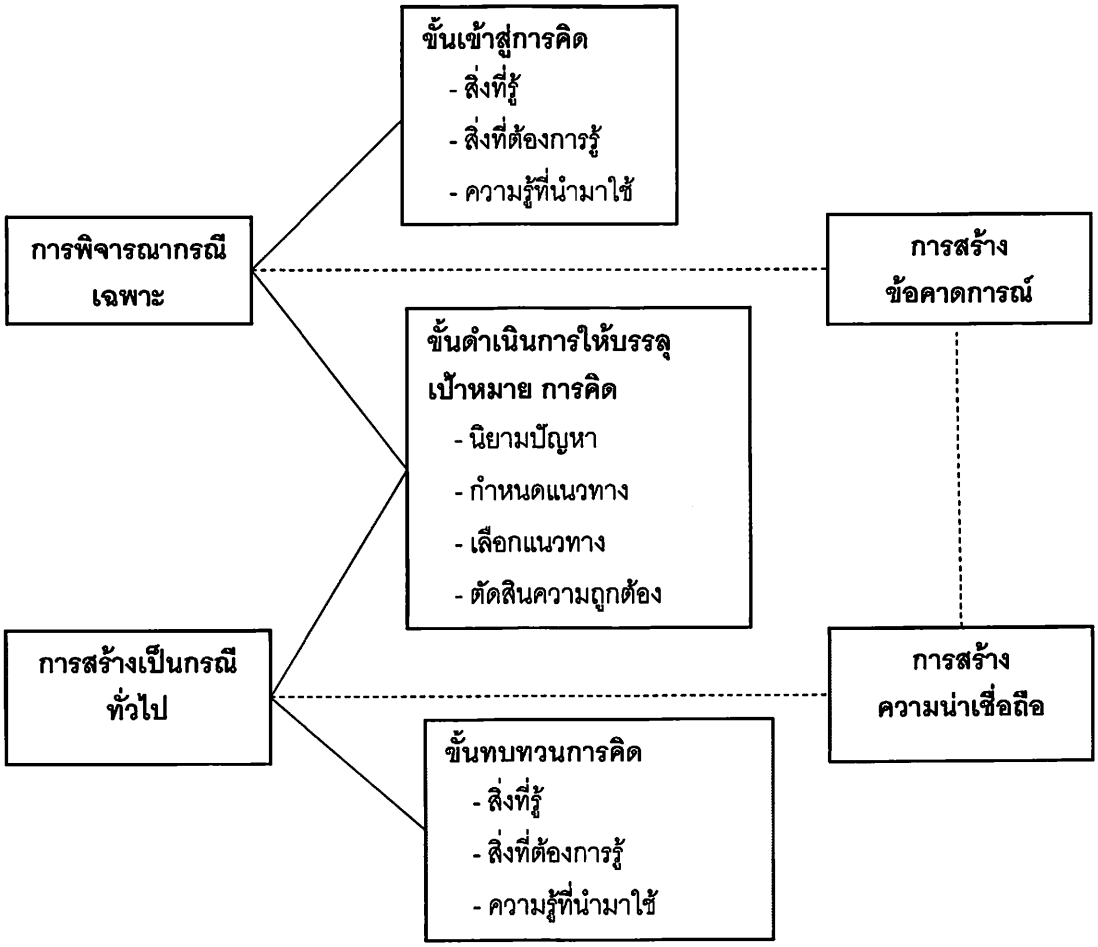
4. แนวทางการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์

มีนักการศึกษาได้เสนอแนวทางในการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ดังต่อไปนี้

อัมพร ม้าคนอง (2553) ได้เสนอแนวทางในการพัฒนาการคิดไว้ว่า การพัฒนาการคิดเป็นการพัฒนากระบวนการคิดที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ ซึ่งอาจทำได้ง่าย ๆ ด้วยการพยายามใช้คำถามให้ผู้เรียนได้คิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ และให้ผู้เรียนได้ฝึกการคิดจากสถานการณ์ปัญหา นอกจากนี้ผู้สอนอาจฝึกให้ผู้เรียนรักการคิด โดยเริ่มจากสิ่งที่ทำได้ไม่ยากนัก ดังนี้

1. ให้ผู้เรียนคิดในสิ่งที่พอคิดได้ หรือไม่ยากเกินไปจนคิดอย่างไรก็คิดไม่ได้
2. พยายามถามหาเหตุผลกับผู้เรียนบ่อย ๆ เพื่อฝึกให้ผู้เรียนได้คิด
3. ให้ผู้เรียนคิดในสิ่งที่สนใจและต้องการคิด
4. ฝึกให้คิดบ่อย ๆ เพื่อให้ผู้เรียนเกิดความคุ้นเคยและมีความพยายามในการคิด
5. ฝึกการคิดที่หลากหลาย เช่น การคิดวิเคราะห์ การคิดสังเคราะห์ การคิดนอกกรอบ การคิดเชื่อมโยง การคิดไตร่ตรอง การคิดเชิงตรรกะ
6. ปรับเปลี่ยนสถานการณ์หรือเงื่อนไขของปัญหาให้ท้าทายการคิด
7. ถามคำถามที่น่าสนใจ น่าคิด และไม่ใช้คำถามธรรมดาที่ผู้เรียนคุ้นเคย
8. ค่อย ๆ ฝึกจากการคิดระดับต่ำสู่การคิดระดับสูง

เมสันและคณะ (Mason et al. 1994) ได้เสนอรูปแบบในการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์บนความเชื่อที่ว่ากระบวนการสำคัญที่อยู่เบื้องหลังการคิดเชิงคณิตศาสตร์ คือ การพิจารณากรณีเฉพาะ การสรุปนัยทั่วไป การสร้างข้อความคาดการณ์และการสร้างความน่าเชื่อถือ กระบวนการดังกล่าวแบ่งออกเป็น 3 ระยะ ได้แก่ 1) ขั้นเข้าสู่การคิด 2) ขั้นดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิด 3) ขั้นทบทวนการคิด แต่ละระยะจะมีเกณฑ์บ่งชี้ เพื่อเป็นแนวทางในการบันทึกการคิดที่เกิดขึ้น ซึ่งจะช่วยเสริมประสิทธิภาพในการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ดังภาพ 2



ภาพ 2 กระบวนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของเมสันและคณะ

การพิจารณากรณีเฉพาะ (specializing) เมื่อเผชิญคำถามหรือสถานการณ์เชิงคณิตศาสตร์ ถ้าบุคคลสามารถหาหรือหยิบยกตัวอย่างของสิ่งที่กล่าวถึงในคำถามได้จะทำให้เกิดความเข้าใจและอาจมองเห็นลู่ทางในการหาคำตอบได้มากขึ้น การพิจารณากรณีเฉพาะจึงมีบทบาทสำคัญยิ่งในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ การเลือกกรณีเฉพาะมาพิจารณาอาจเลือกโดยการสุ่ม เลือกอย่างเป็นระบบ หรือเลือกในลักษณะผู้เชี่ยวชาญ

ตัวอย่างการพิจารณากรณีเฉพาะ เช่น "ถ้าร้านขายส่งแห่งหนึ่งให้ส่วนลด 20% แก่ผู้ซื้อและต้องชำระภาษีการค้า 15% ของราคาสินค้าด้วย ลูกค้าผู้หนึ่งกำลังตัดสินใจหลังจากซื้อสินค้าว่าควรเลือกวิธีใดในการคำนวณราคาสินค้า ระหว่างการคิดคำนวณส่วนลดก่อน หรือคิดคำนวณการชำระภาษีก่อนเพื่อจะได้ประหยัดเงินมากที่สุด"

แนวทางการคำนวณ : ทดลองกำหนดราคาสินค้าขึ้นมาเพื่อพิจารณาการคำนวณ เช่น ให้สินค้าที่ต้องการซื้อชนิดหนึ่งมีราคา 100 บาท

วิธีที่ 1 คิดส่วนลด 20% ก่อน แล้วชาระภาษี 15%

ราคาสินค้าไม่รวมภาษีคือ 80 บาท (80% ของ 100 บาท)

เมื่อรวมภาษีต้องจ่ายเงิน 1.15 x 80 = 92 บาท [1.15 x (0.80 x 100)]

วิธีที่ 2 คิดภาษี 15% ก่อน แล้วจึงคิดส่วนลด 20%

ราคาสินค้าก่อนคิดส่วนลดคือ 115 บาท (115% ของ 100 บาท)

เมื่อหักส่วนลดต้องจ่ายเงิน 0.80 x 115 = 92 บาท [0.80 x (1.15 x 100)]

จะเห็นว่าการคำนวณทั้งสองวิธีจะจ่ายเงินเท่ากัน

[1.15 x (0.80 x 100) = 0.80 x (1.15 x100)]

ดังนั้นการเลือกกรณีเฉพาะโดยใช้ราคาสินค้า 100 บาท ทำให้สามารถค้นพบความจริงบางอย่างได้

การสร้างกรณีทั่วไป (generalizing) เป็นการขยายจากการยกตัวอย่างเพียงไม่กี่กรณีไปสู่ความคาดหมายที่ครอบคลุมกรณีต่าง ๆ ที่กว้างขวาง หรือมีลักษณะทั่วไปมากขึ้น เช่น การซื้อสินค้าในราคาขายส่งที่ได้กล่าวมาข้างต้น หากพิจารณาราคาสินค้าอื่น ๆ อีกหนึ่งหรือสองชนิด จะเริ่มเห็นแบบรูปที่เกิดขึ้นคือ "ลำดับของการคิดคำนวณส่วนลดก่อน หรือคำนวณภาษีก่อนไม่ส่งผลที่แตกต่างกันต่อราคาสินค้าที่ผู้ซื้อต้องจ่ายจริง" แบบรูปนี้เป็นตัวอย่างหนึ่งของการสรุปกรณีทั่วไปของสถานการณ์เชิงคณิตศาสตร์ที่กล่าวมา

กรณีเฉพาะที่นำมาพิจารณาจะช่วยให้สามารถเชื่อมโยงไปสู่การสรุปกรณีทั่วไปสำหรับสินค้าราคาใด ๆ (กำหนดให้เป็น P) ได้คือ 1.15 x (0.80 x P) = 0.80 x (1.15 x P)

การสร้างกรณีทั่วไปตามทรรศนะของเมสันและคณะ หมายถึง การพบและการนำเสนอแบบรูปที่นำไปสู่

- สิ่งที่คาดหมายว่าน่าจะถูกต้อง (ข้อคาดการณ์ (conjecture))
- สาเหตุที่ทาให้คาดหมายว่าน่าจะถูกต้อง (การตัดสินความถูกต้อง (justifying))
- ขอบเขตที่คาดหมายว่าน่าจะถูกต้อง คือ เป็นความจริงที่ครอบคลุม ปัญหาอื่นทั่ว ๆ ไปมากขึ้น

การสร้างข้อความคาดการณ์ (conjecturing) หมายถึง การเสนอสิ่งที่คาดหมายว่าน่าจะถูกต้อง แต่ยังไม่มีผู้ใดสรุปหรือแสดงเหตุผลให้เป็นที่ยอมรับ ข้อคาดการณ์ที่มีชื่อเสียงและมีความโดดเด่นในทางคณิตศาสตร์มีอยู่หลากหลาย หนึ่งในจำนวนนั้นคือ ข้อคาดการณ์ของโกลด์บาค (Goldbach's conjecture) ที่กล่าวว่า "จำนวนคู่ทุกจำนวนที่มีค่ามากกว่า 2 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลบวกของจำนวนเฉพาะสองจำนวนได้" จากข้อคาดการณ์นี้ทำให้มีการสำรวจจำนวนคู่ที่

มากกว่า 2 จำนวนนับล้าน ๆ และทุก ๆ จำนวนคู่ที่นำมาทดสอบ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลบวกของจำนวนเฉพาะสองจำนวนได้ อย่างไรก็ตามยังไม่มีใครสามารถพิสูจน์ได้ว่าทุก ๆ จำนวนคู่มีสมบัติตามข้อคาดการณ์ของโกล์ดบาค จึงยังไม่มีใครกล้ายืนยันว่าข้อคาดการณ์ของโกลด์บาคเป็นจริง

ดังนั้น ข้อคาดการณ์จึงเป็นเพียงคำกล่าว ข้อความ หรือประโยคที่พบว่ามีความเป็นไปได้แต่ยังไม่มีการตัดสินความถูกต้องอย่างน่าเชื่อถือ ข้อคาดการณ์ส่วนใหญ่มักตั้งหรือสร้างขึ้นง่าย ๆ แล้วพยายามตัดสินความถูกต้องเพื่อนำไปสนับสนุนผลลัพธ์หรือวิธีการบางอย่างเท่านั้น การตั้งข้อคาดการณ์ จึงเป็นกระบวนการของความรู้สึก (Sensing) หรือการเดาว่าบางสิ่งน่าจะถูก แล้วสำรวจความถูกต้องของสิ่งนั้น

การสร้างความเชื่อมั่น (convincing) ระหว่างการดำเนินการแก้ปัญหา กระบวนการค้นหาคำตอบที่ถูกต้องเพื่อปะติดปะต่อเป็นข้อคาดการณ์ ยังมีอีกกระบวนการหนึ่งที่เกิดควบคู่ไปด้วย คือกระบวนการค้นหาเหตุผลว่าทำไมสิ่งเหล่านั้นจึงถูกต้อง (หรือไม่ถูกต้องสำหรับบางกรณี) ซึ่งจะช่วยสร้างความน่าเชื่อถือให้กับคำตอบหรือข้อค้นพบต่าง ๆ ตัวอย่างเช่น ข้อคาดการณ์ของโกล์ดบาค จะเห็นว่ามีการพิจารณากรณีเฉพาะเป็นจำนวนมาก จนกระทั่งคนจำนวนมากมีความเชื่อว่าเป็นข้อคาดการณ์ที่สมเหตุสมผล แต่ยังไม่มีการตรวจสอบความถูกต้องที่จะทาให้มีการยอมรับอย่างไม่มีข้อโต้แย้ง ความน่าเชื่อถือจึงมีขอบเขตที่จำกัด ในการสร้างความน่าเชื่อถือเกี่ยวกับประเด็นต่าง ๆ จากคำถามหรือปัญหา สิ่งที่ต้องการจึงไม่ใช่แค่เพียงการยกตัวอย่างแบบผิวเผิน แต่ควรเป็นเหตุผลที่เกี่ยวกับแบบรูปหรือโครงสร้างบางอย่างเพื่อเป็นกรอบในการอธิบายเพื่อให้เกิดความน่าเชื่อถืออย่างแท้จริงมากกว่า

กระบวนการที่อยู่เบื้องหลังการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่กล่าวมา จะดำเนินไปตามระยะของการคิด 3 ระยะ ได้แก่

1. ระยะเข้าสู่การคิด เป็นระยะการหาข้อมูลเพื่อตอบคำถามต่าง ๆ เช่น รู้อะไรบ้าง ต้องการอะไร นาความรู้ใดมาใช้ได้บ้าง

2. ระยะดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิด เป็นระยะการดำเนินการแก้สถานการณ์ปัญหา โดยใช้กระบวนการสร้างข้อคาดการณ์ การคิดหาเหตุผล การตัดสินความถูกต้อง และการสร้างความน่าเชื่อถือ

3. ระยะทบทวนการคิด เป็นระยะที่ต้องตรวจสอบการแก้ปัญหา สะท้อนและขยายความรู้และประสบการณ์ที่ได้จากการแก้ปัญหา

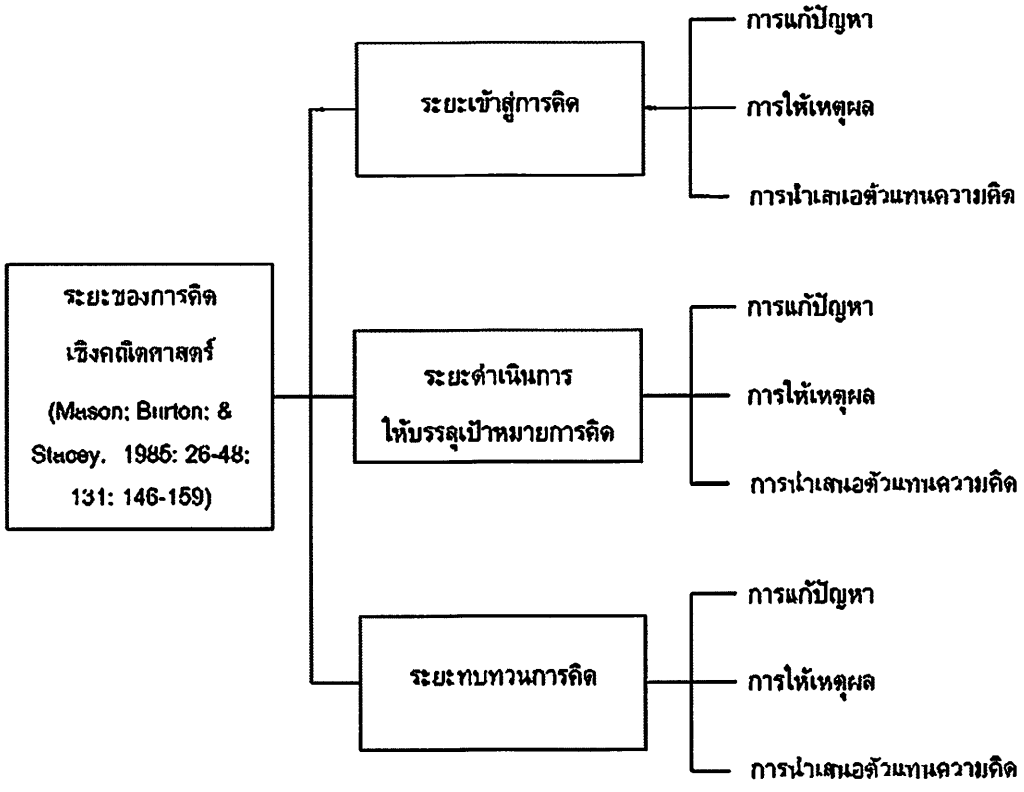
เมสันและคณะ มีความคิดว่า แนวทางการฝึกการคิดไปพร้อมกับการสะท้อนการเรียนรู้จากการคิด เป็นแนวทางที่ช่วยพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพและเชื่อมโยงกับการแก้ปัญหาและการคิดอย่างมีวิจารณญาณโดยตรง

5. แนวทางการวัดและการประเมินผลการคิดเชิงคณิตศาสตร์

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2556ข) กล่าวว่า การสร้างข้อสอบวัดความสามารถในการคิดนั้นจำเป็นต้องมีสถานการณ์ที่น่าสนใจและกระตุ้นให้เกิดการคิด สถานการณ์ที่นำมาใช้อาจเป็นสถานการณ์จริง สถานการณ์จำลอง เหตุการณ์ ปรากฏการณ์ หรือประเด็นที่สังคมให้ความสนใจ หรือเป็นเรื่องราวที่สมมติขึ้นอย่างมีเหตุมีผล ซึ่งอยู่ในรูปของข้อความ แผนภาพรูปภาพ หรือตารางข้อมูลที่สามารถหาได้จากแหล่งข้อมูลต่าง ๆ เช่น บทความจากหนังสือหรือวารสาร หรือข่าวจากหนังสือพิมพ์ โดยผลคะแนนที่ได้จากการวัดความสามารถในการคิดนั้นสามารถใช้เป็นแนวทางในการพัฒนาและส่งเสริมการคิดด้านอื่น ๆ ของผู้เรียนต่อไป ตลอดจนใช้เป็นข้อสนเทศให้แก่ผู้เรียน เพื่อให้ผู้เรียนเกิดความมั่นใจในการเลือกเรียนในด้านที่มีความเหมาะสมกับตนเองในอนาคตได้

ชนาธิป พรกุล (2554) ได้กล่าวถึงการวัดและประเมินความสามารถในการคิด ว่าการคิดเป็นสิ่งที่เกิดขึ้นภายในสมอง เมื่อต้องการวัดการคิดจึงเป็นการวัดความสามารถในการคิด ซึ่งแสดงออกในลักษณะต่าง ๆ หรืออาจกล่าวได้ว่า การวัดการคิดเป็นการวัดสิ่งที่แสดงร่องรอยของการคิด ซึ่งแบ่งสิ่งที่วัดออกเป็น 3 ประเภท ได้แก่ 1) ผลของการคิด แสดงให้เห็นเป็นความคิด ผลงานหรือการกระทำ โดยสามารถวัดจากแบบทดสอบ แบบสัมภาษณ์ แบบตรวจผลงานการคิด และแบบสังเกตพฤติกรรมการคิด 2) กระบวนการของการคิด แสดงให้เห็นเป็นขั้นตอนการปฏิบัติงาน หรือการแก้ปัญหา วัดจากแบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงาน แบบสังเกตพฤติกรรมการแก้ปัญหา 3) คุณลักษณะของบุคคล หรือเจตคติ สังเกตเห็นได้จากลักษณะการเป็นผู้ใฝ่รู้ คิดไกล คิดลึกซึ้ง คิดรอบคอบ คิดชัดเจน มีวิจารณญาณ คิดสร้างสรรค์ วัดจากแบบสังเกตพฤติกรรมการคิดและแบบสัมภาษณ์ โดยเวลาที่วัดความสามารถในการคิดควรวัดก่อนการสอน ระหว่างการสอน (ทุกบทเรียน/หน่วยการเรียนรู้) และหลังการสอน โดยทำอย่างสม่ำเสมอและต่อเนื่อง ซึ่งในการวัดคิดอาจวัดรวมไปกับเนื้อหาวิชาในแบบสอบตามปกติ หรือแยกต่างหาก

รุ่งทิวา นาบำรุง (2550) ได้กล่าวว่า การวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เป็นการศึกษากระบวนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ 3 ด้าน ได้แก่ การแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิด โดยจะมีระยะในการศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ดังภาพ 3



ภาพ 3 กระบวนการศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์

ที่มา : รุ่งทิวา นาบำรุง 2550 ; อ้างอิงใน Mason et al. 1985

แพรไหม สามารถ (2555) ได้กล่าวว่าการวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วยแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ก่อนเรียน แบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ระหว่างเรียนและแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์หลังเรียนโดยกำหนดกรอบการสร้างแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่ประกอบไปด้วยวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ 3 ด้าน ได้แก่

1. การแก้ปัญหา เป็นความสามารถในการวิเคราะห์ปัญหาโดยสามารถระบุได้ว่าสิ่งที่เป็นปัญหาต้องการทราบ คืออะไร สิ่งที่ปัญหากำหนดให้ คืออะไร โดยสามารถเลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาได้หลากหลาย เช่น การสร้างรายการ ตาราง สมการ การวาดภาพ การลองผิดลองถูก รวมทั้งสรุปคำตอบได้สอดคล้องกับปัญหา

2. การให้เหตุผล เป็นการใช้ความรู้และข้อมูลในการวิเคราะห์สถานการณ์ อธิบายเหตุผลของการเลือกใช้กลยุทธ์หรือตัวแทนความคิดในวิธีการแก้ปัญหา และอธิบายความสมเหตุสมผลของคำตอบ

3. การนำเสนอตัวแทนความคิดเป็นการใช้ตัวแทนความคิดเพื่อทำความเข้าใจปัญหา สามารถใช้ตัวแทนความคิดเพื่อแสดงกระบวนการแก้ปัญหาและสามารถใช้ตัวแทน

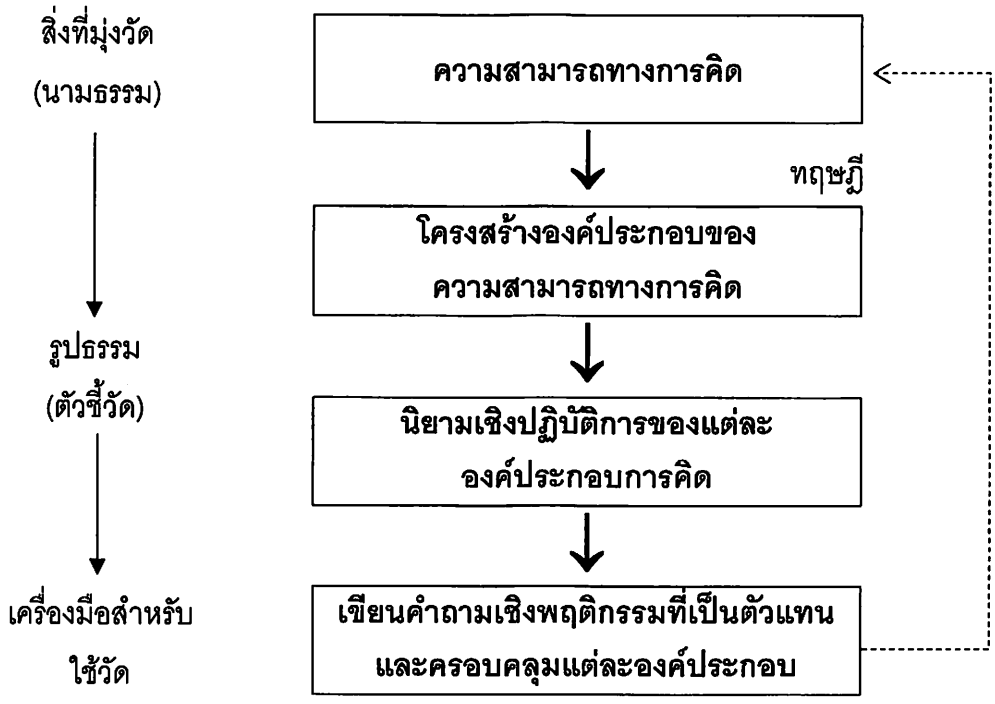
ศิริชัย กาญจนวาสี (2551) ได้เสนอการวัดความสามารถในการคิดเป็น 2 ลักษณะ คือ แบบสอบมาตรฐานที่ใช้สำหรับการวัดความสามารถในการคิด และแบบสอบสำหรับสำหรับวัดความสามารถทางการคิดที่สามารถสร้างขึ้นใช้เอง โดยมีรายละเอียดดังนี้

1. แบบสอบมาตรฐานที่ใช้สำหรับวัดความสามารถในการคิด เป็นแบบสอบมาตรฐานที่มีผู้สร้างไว้แล้ว สำหรับใช้วัดความสามารถในการคิด สามารถจัดกลุ่มได้เป็น 2 ประเภท ได้แก่ แบบสอบการคิดทั่วไป และแบบสอบการคิดเฉพาะด้าน

2. การสร้างแบบวัดการคิดขึ้นใช้เอง ในการสร้างสร้างแบบวัดการคิดขึ้นใช้เอง เป็นการสร้างแบบวัดการคิดเพื่อให้เหมาะสมกับความต้องการในการวัดการคิดที่ต้องการวัด โดยมีหลักการสร้างและขั้นตอนการพัฒนาแบบวัดความสามารถทางการคิด ดังนี้

2.1 หลักการสร้างแบบวัดความสามารถทางการคิด

การวัดความสามรถทางการคิดของบุคคล ผู้สร้างเครื่องมือจะต้องมีความรอบรู้ ในแนวคิดหรือทฤษฎีเกี่ยวกับ “การคิด” เพื่อนำมาเป็นกรอบหรือโครงสร้างของการคิด เมื่อมี การกำหนดนิยามเชิงปฏิบัติการของโครงสร้าง/องค์ประกอบการคิดแล้ว จะทำให้ได้ตัวชี้วัดหรือลักษณะพฤติกรรมเฉพาะที่เป็นรูปธรรม ซึ่งสามารถบ่งชี้ถึงโครงสร้าง/องค์ประกอบการคิด จากนั้นจึงเขียนข้อความตามตัวชี้วัดหรือลักษณะพฤติกรรมเฉพาะของแต่ละองค์ประกอบของการคิดนั้น ๆ ดังภาพ 4



ภาพ 4 แสดงหลักการสร้างแบบวัดความสามารถทางการคิด

ที่มา: สำนักคณะกรรมการสถานศึกษาแห่งชาติ. (2540)

2.2 ขั้นตอนการพัฒนาแบบวัดความสามารถทางการคิด มีขั้นตอนในการดำเนินการที่สำคัญ ดังนี้

1) กำหนดจุดมุ่งหมายของแบบวัด

การกำหนดจุดมุ่งหมายสำคัญของการสร้างแบบวัดความสามารถทางการคิด ผู้พัฒนาแบบวัดจะต้องพิจารณาจุดมุ่งหมายของการนาแบบวัดไปใช้ด้วยว่า ต้องการวัดความสามารถความสามารถทางการคิดทั่ว ๆ ไป หรือต้องการวัดความสามารถทางการคิดเฉพาะวิชา (Aspect-Specific) การวัดมุ่งติดตามความก้าวหน้าของความสามารถทางการคิด (Formative) หรือต้องการเน้นการประเมินผลสรุปรวม (Summative) สำหรับการตัดสินใจ รวมทั้งการแปลผลการวัด เน้นการเปรียบเทียบกับมาตรฐานของกลุ่ม (Norm-Referenced) หรือต้องการเปรียบเทียบกับเกณฑ์หรือมาตรฐานที่กำหนดไว้ (Criterion-Referenced)

2) กำหนดกรอบของการวัดและนิยามเชิงปฏิบัติการ

ผู้พัฒนาแบบวัดควรศึกษาเอกสาร แนวคิด ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับความสามารถทางการคิดตามจุดมุ่งหมายที่ต้องการ และควรคัดเลือกแนวคิดหรือทฤษฎีที่เหมาะสมกับบริบทและ

จุดมุ่งหมายที่ต้องการเป็นหลัก แล้วศึกษาให้เข้าใจอย่างลึกซึ้ง เพื่อกำหนดโครงสร้าง/องค์ประกอบของความสามารถทางการคิดตามทฤษฎีและให้นิยามเชิงปฏิบัติการ (operational definition) ของแต่ละองค์ประกอบในเชิงรูปธรรมของพฤติกรรมที่สามารถบ่งชี้ถึงลักษณะแต่ละองค์ประกอบของการคิดนั้นได้

3) สร้างผังข้อสอบ (Table of Specification)

การสร้างผังข้อสอบเป็นการกำหนดเค้าโครงของแบบวัดความสามารถทางการคิดที่ต้องการให้ครอบคลุม โครงสร้างหรือองค์ประกอบใดบ้างตามทฤษฎีและกำหนดว่า แต่ละส่วนมีน้ำหนักความสำคัญมากน้อยเพียงใด ในกรณีที่ต้องการสร้างแบบวัดความสามารถทางการคิดสำหรับใช้เฉพาะวิชาใดวิชาหนึ่ง ผู้พัฒนาแบบวัดจะต้องกำหนดเนื้อหาวิชานั้นด้วยว่าจะใช้เนื้อหาใดบ้างที่เหมาะสมนำมาใช้วัดความสามารถทางการคิด พร้อมทั้งกำหนดน้ำหนักความสำคัญของแต่ละเนื้อหาในแต่ละองค์ประกอบความสามารถทางการคิดเป็นผังข้อสอบสำหรับนำไปใช้เขียนข้อสอบต่อไป

4) เขียนข้อสอบ

กำรูปแบบของการเขียนข้อสอบ ตัวคำถาม ตัวคำตอบ และวิธีการตรวจให้คะแนน โดยมีการกำหนดเกณฑ์การตรวจไว้ เมื่อกำหนดรูปแบบของข้อสอบแล้ว ลงมือร่างข้อสอบตามผังข้อสอบที่กำหนดไว้จนครบทุกองค์ประกอบ ภาษาที่ใช้ควรเป็นไปตามหลักการเขียนข้อสอบที่ดีโดยทั่วไป หลังจากร่างข้อสอบเสร็จแล้ว ควรมีการทบทวนข้อสอบถึงความเหมาะสมของการวัดและความชัดเจนของภาษาที่ใช้ โดยผู้เขียนข้อสอบเองและผู้ตรวจสอบที่มีความเชี่ยวชาญ ในการสร้างข้อสอบวัดความสามารถในการคิดโดยทำการวิเคราะห์ข้อสอบและวิเคราะห์แบบสอบ วิเคราะห์ข้อสอบเพื่อตรวจสอบคุณภาพของข้อสอบเป็นรายข้อใน ด้านความยาก (p) และอำนาจจำแนก (r) เพื่อคัดลอกข้อสอบที่มีความยากพอเหมาะและมีอำนาจจำแนกสูงไว้ และปรับปรุงข้อที่ไม่เหมาะสม คัดเลือกข้อสอบที่มีคุณภาพเหมาะสม และ/หรือข้อสอบที่ปรับปรุงแล้วให้ได้จานวนตามผังข้อสอบ เพื่อให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจความตรงตามเนื้อหา และนำไปทดลองใช้อีกครั้งเพื่อวิเคราะห์แบบสอบในด้านความเที่ยง (Reliability) แบบสอบควรมีความเที่ยงเบื้องต้นอย่างน้อย 0.50 จึงเหมาะที่จะนำไปใช้ได้ ส่วนการตรวจสอบความตรง (Validity) ของแบบสอบ ถ้าสามารถหาเครื่องมือวัดความสามารถทางการคิดที่เป็นมาตรฐานสำหรับใช้เปรียบเทียบได้ ก็ควรคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความตรงตามสภาพ (Concurrent Validity) ของแบบสอบด้วย

5) นำแบบวัดไปใช้จริง

หลังจากวิเคราะห์คุณภาพของข้อสอบเป็นรายข้อ และวิเคราะห์คุณภาพของแบบสอบทั้งฉบับว่าเป็นไปตามเกณฑ์คุณภาพที่ต้องการแล้ว จึงนำแบบวัดความสามารถทาง การคิดไปใช้กับกลุ่มเป้าหมายจริง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2556ข) กล่าวว่า การสร้างข้อสอบวัดความสามารถในการคิดนั้นจาเป็นต้องมีสถานการณ์ที่น่าสนใจและกระตุ้นให้เกิดการคิด สถานการณ์ที่นามาใช้อาจเป็นสถานการณ์จริง สถานการณ์จำลอง เหตุการณ์ ปรากฏการณ์ หรือประเด็นที่สังคมให้ความสนใจ หรือเป็นเรื่องราวที่สมมติขึ้นอย่างมีเหตุมีผล ซึ่งอยู่ในรูปของข้อความ แผนภาพ รูปภาพ หรือตารางข้อมูล ที่สามารถหาได้จากแหล่งข้อมูลต่าง ๆ เช่น บทความจากหนังสือหรือวารสาร หรือข่าวจากหนังสือพิมพ์ โดยผลคะแนนที่ได้จากการวัดความสามารถในการคิดนั้นสามารถใช้เป็นแนวทาง ในการพัฒนาและส่งเสริมการคิดด้านอื่น ๆ ของผู้เรียนต่อไป

สุวิทย์ มูลคำ (2548: 157-160) กล่าวถึง การประเมิลผลกระบวนการคิดว่าสามารถจำแนกได้เป็น 2 แนวทาง ได้แก่ 1) การประเมินผลโดยการใช้แบบทดสอบ ซึ่งอาจเป็นแบบสอบมาตรฐานหรือ แบบทดสอบที่สร้างขึ้นมาเองซึ่งเป็นแบบวัดการคิดที่เหมาะสมกับความต้องการในการวัด และ 2) ใช้การประเมินผลตามสภาพจริง ซึ่งมีแนวทางในการประเมิน 2 ลักษณะ ดังนี้

ลักษณะที่ 1 ประเมินจากพฤติกรรมการแสดงออก ได้แก่ การพูด การฟัง การอภิปรายการร่วมกิจกรรมตามที่กำหนด การเก็บข้อมูลเพื่อประเมินผลกระบวนการคิดจากพฤติกรรมการแสดงออก ควรใช้วิธีการที่หลากหลาย เช่น การสังเกต การสัมภาษณ์ การใช้ผลการบันทึกจากผู้ที่เกี่ยวข้อง เช่น เพื่อนร่วมชั้น ผู้สอน เป็นต้น

ลักษณะที่ 2 ประเมินจากผลงานและชิ้นงานที่เกิดขึ้น การประเมินผลกระบวนการคิด ในลักษณะที่สองนี้สามารถใช้วิธีการที่หลากหลายได้ เช่น การตรวจงานหรือผลงานของนักเรียน การรายงานตนเองของผู้เรียน การใช้บันทึกจากผู้ที่เกี่ยวข้อง และการใช้แฟ้มสะสมผลงาน

เกณฑ์การให้คะแนน (Scoring Rubric) คือเกณฑ์การให้คะแนนที่ถูกพัฒนาโดยครูหรือผู้ประเมินที่ใช้วิเคราะห์ผลงานหรือกระบวนการที่ผู้เรียนได้พยายามสร้างขึ้น การประเมินผลงานของนักเรียนจะมี 2 ลักษณะคือ ผลงานที่ได้จากกระบวนการของนักเรียน และกระบวนการที่นักเรียนใช้เพื่อให้เกิดผลงาน จะประเมินในลักษณะใดขึ้นอยู่กับจุดมุ่งหมายในการเรียนรู้ อาจจะประเมินลักษณะใดลักษณะหนึ่งหรือประเมินทั้งสองลักษณะก็ได้ ผู้ประเมินจะต้องตัดสินคุณภาพของผลงานหรือกระบวนการปฏิบัติงานของผู้เรียนแต่ละคนที่มีระดับที่แตกต่างกันหลายระดับ ระดับที่แตกต่างกันอาจจะเป็นระดับคุณภาพของชิ้นงานที่ได้สร้างขึ้น หรือระดับของกระบวนการต่าง ๆ ที่

ผู้เรียนแต่ละคนได้ใช้เพื่อให้เกิดผลงาน โดยการให้คะแนนแบบรูบริคมี 3 รูปแบบคือ 1) Holistic Rubrics เป็นเกณฑ์การให้คะแนนผลงานหรือกระบวนการแบบไม่ได้แยกส่วน โดยเป็นการประเมินในภาพรวมของผลงานหรือกระบวนการนั้น 2) Analytic Rubrics เป็นเกณฑ์การให้คะแนนแบบแยกส่วน หรือองค์ประกอบคุณลักษณะของผลงานหรือกระบวนการ แล้วนำแต่ละส่วนหรือองค์ประกอบของคุณลักษณะมารวมกันเป็นคะแนนรวม 3) Annotated Holistic Rubrics ผู้ประเมินจะประเมินแบบ holistic rubrics ก่อนแล้วจึงประเมินแยกส่วนอีกบางคุณลักษณะที่เด่น ๆ เพื่อใช้เป็นผลสะท้อนในบางคุณลักษณะของผู้เรียน (ฉัตรศิริ ปิยะพิมลสิทธิ์, 2554)

จากการศึกษาแนวทางการวัดและการประเมินผลการคิดเชิงคณิตศาสตร์ข้างต้น งานวิจัยนี้ได้ใช้แนวทางในการวัดและประเมินผลการการคิดเชิงคณิตศาสตร์จากการสร้างแบบวัดการคิดขึ้นใช้เอง โดยได้กำหนดองค์ประกอบการคิดเชิงคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของ Kriegler (2004) ซึ่งองค์ประกอบการคิดเชิงคณิตศาสตร์ประกอบด้วย การแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิด และสร้างเกณฑ์การให้คะแนนแบบแยกส่วน (Analytic Rubrics) ตามนิยามเชิงปฏิบัติการของแต่ละองค์ประกอบการคิดแต่ละองค์ประกอบ และทำการวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนจากแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ หลังจัดกิจกรรมการเรียนรู้ครบทั้งสามวงจรปฏิบัติการ นอกจากนี้ยังศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ระหว่างเรียนจากร่องรอยการทำงาน การแก้ปัญหา และตอบคำถามในใบกิจกรรม เพื่อทำการศึกษาพัฒนาการการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียน

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องในประเทศ

ทรรศมน วินัยโกศล (2562) ได้ศึกษาผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามโมเดลของสไตน์ที่มีต่อความรู้และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยเปรียบเทียบความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่ตามโมเดลของสไตน์เทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 60 เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อนและหลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามโมเดลของสไตน์ และเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามโมเดลของสไตน์เทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 60 เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง คือ แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามโมเดลของสไตน์ เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล คือ แบบวัดความรู้ทางคณิตศาสตร์ และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า 1) นักเรียนที่ได้รับการจัด

กิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามโมเดลของสไตน์มีความรู้ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 2) นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามโมเดลของสไตน์มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และ 3) นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามโมเดลของสไตน์มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ณัฐวุฒิ พันธุลี (2562) ได้ศึกษาแนวทางการอำนวยการวาทกรรมชั้นเรียนเพื่อพัฒนายุทธวิธีการเรียนรู้โดยการกำกับตนเองของนักเรียนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่เน้นการแก้ปัญหา ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพ โดยใช้การวิเคราะห์โพรโทคอลชั้นเรียนร่วมกับการวิเคราะห์ผลงานการแก้ปัญหาของนักเรียน ผลการวิจัยพบว่า ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่เน้นการแก้ปัญหาตามแนวทางของวิธีการแบบเปิด มีแนวทางการอำนวยการวาทกรรมชั้นเรียน ซึ่งครูและนักเรียนได้ปฏิบัติเพื่อพัฒนายุทธวิธีการเรียนรู้โดยการกำกับตนเองของนักเรียนในแต่ละระยะของวงจรการเรียนรู้ ได้แก่ การคาดการณ์แนวคิด การคอยกำกับติดตามแนวคิด การเลือกแนวคิด การเรียงลำดับแนวคิด และการเชื่อมโยงแนวคิด โดยในระยะการคิดล่วงหน้า นักเรียนสามารถบอกเป้าหมายในการทำโจทย์ และวางแผนเลือกวิธีการที่ใช้ในการทำโจทย์ได้ สำหรับระยะการแสดงออก นักเรียนสามารถเขียนแสดงขั้นตอนในการทำโจทย์ได้ และมีการจดบันทึกสิ่งที่เรียนรู้จากการทำโจทย์ สุดท้าย ระยะการสะท้อนด้วยตนเอง นักเรียนมีการตรวจสอบคำตอบและบอกได้ถึงข้อดีและข้อเสียของวิธีการที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา

สุพิชฌาย์ สีหะวงษ์ และคณะ (2562) ได้พัฒนารูปแบบการจัดการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมการคิดเชิงคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมการคิดเชิงคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ผู้ให้ข้อมูลสำคัญคือผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ศึกษาและด้านการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ 5 คน โดยใช้แบบประเมินความเหมาะสมของรูปแบบการจัดการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมการคิดเชิงคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ผลการวิจัยปรากฏว่า กระบวนการเรียนการสอนของรูปแบบการจัดการเรียนรู้มี 5 ขั้น คือ (1) ขั้นทบทวนความรู้เดิม (2) ขั้นเรียนรู้จากการปฏิบัติ (3) ขั้นแลกเปลี่ยนเรียนรู้ (4) ขั้นสร้างความรู้ และ (5) ขั้นนำไปใช้ ผลการประเมินความเหมาะสมของรูปแบบการจัดการเรียนรู้พบว่า รูปแบบการจัดการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมการคิดเชิงคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความเหมาะสมในระดับมาก

อนุพร วิชามล (2560) ได้ศึกษาการตั้งคำถามที่ส่งเสริมการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแบบเปิด เพื่อศึกษาผลของการตั้งคำถามที่ส่งเสริมการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ด้วยการทดลองเชิงการสอนโดยใช้วิธีการแบบเปิด ผลการวิจัยพบว่าคำถามที่ส่งเสริมการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมีดังนี้ 1) คำถามที่ถามเพื่อให้นักเรียนเข้าถึงโจทย์ปัญหา ทำให้นักเรียนเกิดการคิดเชิงนามธรรม 2) คำถามที่ถามเพื่อชี้แนะให้นักเรียนได้ทราบวัตถุประสงค์ในคาบเรียน ทำให้นักเรียนเกิดการคิดเชิงพัฒนาและเกิดการคิดเชิงนิรนัย 3) คำถามที่ถามเพื่อสนับสนุนช่วยเหลือการทำงานของนักเรียนแต่ละคน ทำให้นักเรียนเกิดการคิดเชิงนิรนัย การคิดเชิงอุปนัย การคิดเชิงอุปมาและการคิดเชิงพัฒนา 4) คำถามที่ถามเพื่อชี้แนะให้นักเรียนอธิบายวิธีการคิดและเปรียบเทียบวิธีการคิด ทำให้นักเรียนเกิดการคิดเชิงอุปมาและการคิดเชิงนิรนัย 5) คำถามที่ถามเพื่อชี้แนะให้นักเรียนมองย้อนกลับและจัดการกับสิ่งที่ได้เรียนรู้ และเห็นคุณค่าของสิ่งที่ได้เรียนรู้ ทำให้นักเรียนเกิดการคิดเชิงอุปนัย

2. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องต่างประเทศ

Schielack et al. (2001) ได้ศึกษาเรื่องการออกแบบคำถามเพื่อส่งเสริมการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2–4 โดยมีการกำหนดคำถามเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนหาหนทางที่จะใช้การคิดเชิงคณิตศาสตร์ในการจัดกิจกรรมต่าง ๆ มีการแนะนำที่จะสรุป การอภิปรายเพื่อหาเหตุผลรวมถึงการประเมินผลการเรียนรู้ของนักเรียน การจัดประสบการณ์จะเน้นคำถามที่ใช้กระบวนการในการหาคำตอบ ซึ่งผลการศึกษาพบว่านักเรียนสามารถพัฒนาทักษะการคิดเชิงคณิตศาสตร์ได้

Brunström and Fahlgren (2015) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับ การส่งเสริมการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยใช้งานทางด้านคอมพิวเตอร์ (Orchestration of mathematical discussions drawing on students' computer-based work) ศึกษาโดยการทดสอบโมเดลของ Stein et al. (2008) ว่าสามารถนำมาใช้เป็นแนวทางสำหรับครูในการจัดการเรียนการสอนที่ส่งเสริมการอภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียนโดยใช้โครงงานคอมพิวเตอร์เป็นฐาน ผู้วิจัยได้ทำงานร่วมกับครูมัธยมศึกษาตอนปลายจำนวน 4 คน โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อที่จะค้นหาการดำเนินการสอนระยะสั้นอันประกอบไปด้วย บทเรียนโดยการใช้คอมพิวเตอร์เป็นฐานและบทเรียนโดยใช้คำถามสะท้อนคิดที่คิดขึ้นโดยครูประจำชั้น ในระหว่างการเรียนการสอนบทเรียนแรก นักเรียนทำงานด้วยกันเป็นคู่โดยเป็นงานเกี่ยวการใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่องลำดับ และการพัฒนาความสามารถที่เกี่ยวข้องกับการใช้เครื่องมือ GeoGebra ภาระงานนี้จึงได้ถูกออกแบบเพื่อเสริมสร้างให้นักเรียนใช้เหตุผลกับฟังชันก์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งฟังก์ชันเอ็กโพเนลเชียล และยังพบว่าในบทเรียนโดยใช้คำถามสะท้อน

เป็นวิธีการที่ครูเป็นศูนย์กลางในการเรียนมากเกินไปที่จะพัฒนาการให้เหตุผลของนักเรียน จึงเป็นสิ่งกระตุ้นให้ผู้วิจัยค้นหาวิธีในการสนับสนุนครูที่ออกแบบการสอนบทเรียนโดยใช้คำถามสะท้อนคิด

ผลการวิจัยพบว่า การจัดการเรียนการสอนแบบอภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียนโดยใช้โครงงานคอมพิวเตอร์เป็นฐาน เป็นวิธีการสอนที่เน้นครูเป็นศูนย์กลาง จึงได้เกิดคำถามว่าจะพัฒนาการอภิปรายนี้อย่างไรให้เน้นนักเรียนเป็นศูนย์กลางในการเรียน พร้อมให้มีแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจากการศึกษาพบว่าโมเดลของ Stein et al. (2008) สามารถนำมาใช้เป็นแนวทางสำหรับครูในการจัดการเรียนการสอนที่เน้นอภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียนโดยใช้โครงงานคอมพิวเตอร์เป็นฐาน จากตัวอย่างแสดงให้เห็นว่าโมเดลนี้มีประสิทธิภาพที่ดีพอสำหรับวงการการศึกษา มีการค้นพบ 5 แนวทางปฏิบัติที่มีประโยชน์ในการแนะนำกับครูผู้สอน ข้อเสนอแนะคือ ควรมีงานวิจัยที่อ้างอิงถึงโมเดลนี้ให้มากกว่านี้ และควรให้ทำการวิจัยโดยสังเกตชั้นเรียนที่ครูจัดการเรียนการสอนตามแนวปฏิบัติทั้ง 5 แนวทางก่อน

Groth (2015) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับผลของการใช้โมเดลของสไตน์ เพื่อสนับสนุนการอภิปรายทางสถิติ โดยตัวอย่างในการวิจัยคือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 2 ห้องเรียน คือ ห้องที่ได้รับจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้โมเดลของสไตน์ กับห้องที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนแบบปกติ ผลการวิจัยพบว่า ห้องที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้โมเดลของสไตน์ นั้น นักเรียนมีความรู้และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเพิ่มขึ้นอย่างเห็นได้ชัด สามารถวิเคราะห์เชื่อมโยงความคิดหลากหลาย มีความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

Cartier et al. (2013) ได้ทำการทดลองจัดกิจกรรมการเรียนการสอนวิชาวิทยาศาสตร์โดยใช้โมเดลของสไตน์กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยสอนเกี่ยวกับเรื่องการเจริญเติบโตของพืชโดยให้นักเรียนจับกลุ่มแล้วออกแบบการนำเสนอเกี่ยวกับอัตราการเจริญเติบโตของพืช ซึ่งแต่ละกลุ่มมีการใช้ความรู้และวิธีที่แตกต่างกันในการนำเสนอ เช่น กราฟ รูปภาพ แผนภูมิ เป็นต้น แล้วให้นักเรียนทั้งชั้นเรียนได้พูดคุย แสดงความคิดเห็นและเหตุผลร่วมกันเกี่ยวกับอัตราการเจริญเติบโตของพืชใน 1 สัปดาห์และวิธีการนำเสนอที่แต่ละกลุ่มใช้ ซึ่งผู้วิจัยให้ข้อสังเกตว่า การใช้โมเดลของสไตน์เข้ามาช่วยในการจัดการเรียนการสอนสามารถช่วยให้ครูกำกับ ติดตามและควบคุมการทำงานของนักเรียนจนไปสู่การอภิปรายในชั้นเรียน และช่วยส่งเสริมความรู้และความเข้าใจในบทเรียนของนักเรียนให้ถูกต้องและชัดเจน รวมถึงมีเหตุผลที่ดียิ่งขึ้น

Young (2015) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการนำโมเดลของสไตน์มาใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อให้ครูได้ใช้เป็นแนวทางในการปฏิบัติสำหรับจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นการ

อภิปรายทางคณิตศาสตร์ในห้องเรียน โดยการวิจัยนี้ได้ทดลองกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยทำการศึกษา วิเคราะห์ การปฏิบัติงานของครูผู้สอนในแต่ละขั้นตอนจากการใช้โมเดลของสไตน์ และผลของการใช้โมเดลของสไตน์ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน พบว่า โมเดลของสไตน์สามารถช่วยให้ครูผู้สอนกำกับ ติดตามและควบคุมการทำงานของนักเรียนได้ดีขึ้น ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมกับงาน มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างครูกับนักเรียนและนักเรียนด้วยกัน นอกจากนี้ผู้วิจัยได้ให้ข้อสังเกตเพิ่มเติมว่า คุณภาพของงานหรือปัญหาที่เลือกมาให้นักเรียนได้ทำเป็นปัจจัยสำคัญที่จะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาสาระที่ดีขึ้น

Danielowski (2016) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาการส่งเสริมความรู้สึกเชิงจำนวน (number sense) ผ่านการอภิปรายทางคณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลของสไตน์ซึ่งทดลองกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 โดยเก็บข้อมูลจากการบันทึกข้อมูลของครูในระหว่างการทำงานของนักเรียนและการประเมินตนเองของนักเรียน ซึ่งผลการวิจัยระบุว่าการตั้งคำถาม การพูดคุย แลกเปลี่ยนความคิดเห็น การแบ่งปันกลยุทธ์หรือวิธีการทำให้ความรู้เชิงจำนวน (number sense) ของนักเรียนดีขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 รวมถึงนักเรียนมีความมั่นใจในความสามารถทางคณิตศาสตร์ของตนเองมากขึ้น

จากงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ทำให้ผู้วิจัยได้แนวคิดในการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนโดยการใช้เครื่องมือวิจัยและเกณฑ์การประเมินในรูปแบบที่แตกต่างกัน ผ่านการจัดการเรียนรู้ด้วยแนวการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ที่มุ่งเน้นให้นักเรียนแลกเปลี่ยนความคิดซึ่งกันและกัน มีการทำความเข้าใจเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งแนวคิดต่าง ๆ เป็นสิ่งที่สะท้อนความรู้และความเข้าใจของแต่ละบุคคล การอภิปรายโต้แย้งถกเถียงจะเป็นประเด็นสำคัญที่นำไปสู่การเชื่อมโยงความคิดที่หลากหลายไปสู่ข้อสรุปหรือคำตอบตามเป้าหมายการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ สำหรับการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้นำแนวปฏิบัติ 5 ขั้น (5 Practice) ของสไตน์มาประยุกต์ใช้ในการจัดการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ซึ่งมีจุดเด่นหรือข้อดีบางประการเมื่อเปรียบเทียบจากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังต่อไปนี้

1) ผู้วิจัย มีความพยายามที่จะนำแนวการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ มาใช้ในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งยังไม่ปรากฏงานวิจัยในประเทศไทยเท่าที่ควร

2) ลักษณะสำคัญของการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้แนวการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์นั้น เน้นให้นักเรียนได้เรียนรู้แบบสืบสอบร่วมกับการ

อภิปรายทั้งชั้นเรียนโดยใช้งานทางคณิตศาสตร์ที่ส่งเสริมให้นักเรียนใช้แนวคิดหรือกลวิธีในการแก้ปัญหาได้อย่างหลากหลาย ทำให้สามารถพัฒนาการแก้ปัญหา ของนักเรียนได้

3) องค์ประกอบสำคัญของการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้แนวการปฏิบัติ 5 ขั้น ของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ คือ การเรียนรู้แบบสืบสอบ เน้นการพัฒนาความสามารถในการคิดและแก้ปัญหา การแสวงหาความรู้โดยใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการแสวงหาความรู้และค้นหาความรู้ด้วยตนเอง ซึ่งครูเป็นเพียงผู้ตั้งคำถามเป็นสื่อให้นักเรียนเกิดความคิด สืบค้น และหาคำตอบ เหมาะสำหรับใช้เป็นรูปแบบการจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะการคิดขั้นสูงของผู้เรียน เช่น การคิดวิเคราะห์ การคิดเชิงประเมินค่า การคิดสร้างสรรค์ เป็นต้น ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยมุ่งพัฒนาทักษะการคิดเชิงคณิตศาสตร์

4) ผู้วิจัยใช้กระบวนการศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพ ทำให้สามารถตอบคำถามวิจัยได้อย่างชัดเจนและครอบคลุม ซึ่งแนวโน้มปัจจุบันในการวิจัยทางคณิตศาสตร์ศึกษาได้เปลี่ยนจากการวิจัยที่ใช้วิธีการที่เน้นกระบวนการทางวิทยาศาสตร์หรือการศึกษาเชิงปริมาณไปเน้นการวิจัยในเชิงคุณภาพหรือใช้วิธีการที่อาศัยการตีความ ดังนั้นผู้วิจัยจึงเลือกใช้ระเบียบวิธีแบบผสมผสานเพื่อแก้ไขจุดอ่อนและเสริมจุดแข็งของการวิจัยในครั้งนี้

กรอบแนวคิดในการวิจัย

ทั้งนี้ผู้วิจัยได้แสดงการเปรียบเทียบองค์ประกอบของการจัดการเรียนรู้แนวการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ที่ส่งเสริมทักษะรายด้านของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียน ดังตาราง 4

ตาราง 4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างการจัดการเรียนรู้ด้วยแนวการปฏิบัติ 5 ของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ กับ การคิดเชิงคณิตศาสตร์

องค์ประกอบของการจัดการเรียนรู้ด้วย 5 ขั้นการปฏิบัติของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์	การคิดเชิงคณิตศาสตร์
การเรียนรู้แบบสืบสอบ (inquiry-based) **ตามรูปแบบ** LEDS (Launch- Explore-Discuss-Summarize)	
ขั้นที่ 1 ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน (Launch)	-
ขั้นที่ 2 การสำรวจ (Explore)	• การให้เหตุผล • การแก้ปัญหา
ขั้นที่ 3 การอภิปรายและสรุปผล (Discuss and Summarize)	• การนำเสนอตัวแทนความคิด
การปฏิบัติ 5 ขั้น (5 Practices)	
การปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์ (Anticipating)	
การปฏิบัติที่ 2 การกำกับติดตาม (Monitoring)	• การแก้ปัญหา • การให้เหตุผล • การนำเสนอตัวแทนความคิด
การปฏิบัติที่ 3 การคัดเลือก (Selecting)	
การปฏิบัติที่ 4 การจัดลำดับ (Sequencing)	
การปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยง (Connecting)	• การให้เหตุผล • การนำเสนอตัวแทนความคิด
งานทางคณิตศาสตร์ (Mathematical task)	• การแก้ปัญหา • การให้เหตุผล • การนำเสนอตัวแทนความคิด

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงปฏิบัติการในชั้นเรียน (Classroom Action Research) ที่มุ่งศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้และผลการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีวิธีการดำเนินการตามขั้นตอน ดังนี้

รูปแบบการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้ เป็นการวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียนตามแบบของ Schmuck, R. (2006) ซึ่งดำเนินการเป็นวงจรปฏิบัติการที่ต่อเนื่องกัน แต่ละวงจรประกอบด้วย ขั้นวางแผน (Plan) ขั้นปฏิบัติการ (Act) ขั้นสังเกตการณ์ (Observe) และขั้นสะท้อนผลการปฏิบัติ (Reflect) ตามลำดับ ดำเนินการวิจัยทั้งหมด 3 วงจรปฏิบัติการ โดยเมื่อดำเนินการจัดการเรียนรู้มาถึงขั้นสะท้อนผลการปฏิบัติ ผู้วิจัยจะนำข้อมูลที่ได้จากขั้นนี้มาสรุปเป็นแนวทางการจัดการเรียนรู้ในขั้นวางแผนของวงจรปฏิบัติการถัดไปจนครบจำนวนวงจรปฏิบัติการที่กำหนด มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นวางแผน (Plan)

1. สำรวจสภาพปัญหาในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ควรได้รับการแก้ไขโดยผู้วิจัยได้สังเกตความสามารถในการเรียนรู้ของนักเรียนระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้และสังเคราะห์ปัญหาการเรียนรู้จากบันทึกหลังการจัดการเรียนรู้ และทำการวิเคราะห์สิ่งที่เกี่ยวข้องกับปัญหาและสาเหตุ

2. ศึกษาค้นคว้าหลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของสถานศึกษา (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 สำหรับนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ และเอกสารที่เกี่ยวข้อง เพื่อเป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์ และเพื่อเป็นแนวทางในการแก้ปัญหาในชั้นเรียน

3. ศึกษาเอกสาร วารสาร ตำรา ข้อมูล งานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งในและต่างประเทศเกี่ยวกับขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ความสามารถในการคิดเชิงคณิตศาสตร์ การวัดและประเมินการคิดเชิงคณิตศาสตร์

4. ศึกษาเอกสาร งานวิจัย และข้อมูลจากอินเตอร์เน็ต เกี่ยวกับวิธีวิทยาการวิจัยเชิงปฏิบัติการ การวัดและประเมินผลการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ การออกแบบและพัฒนาเครื่องมือในการวิจัย

5. วางแผนและสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ จำนวน 3 แผนการจัดการเรียนรู้ แบบสังเกตพฤติกรรมการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัย แบบสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของผู้เรียน แบบบันทึกผลหลังการจัดการเรียนรู้ ใบกิจกรรม แบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ และแบบสัมภาษณ์การคิดเชิงคณิตศาสตร์

6. เตรียมการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ การออกแบบงานทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ สถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ เครื่องมือวัดผลและประเมินผล รวมถึงวัสดุอุปกรณ์ที่ใช้ในการอภิปรายทางคณิตศาสตร์

ขั้นที่ 2 ขั้นปฏิบัติการ (Act)

ดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแผนการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัย โดยผู้วิจัยจะดำเนินการในวงจรปฏิบัติการละหนึ่งแผนการจัดการเรียนรู้ และจะดำเนินการจัดการเรียนรู้ทั้งหมด 3 แผนการจัดการเรียนรู้ หรือ 3 วงจรปฏิบัติการ ดังนี้

วงจรปฏิบัติการที่ 1	แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง วงกลม
วงจรปฏิบัติการที่ 2	แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง วงรี
วงจรปฏิบัติการที่ 3	แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง พาราโบลา

ขั้นที่ 3 ขั้นสังเกตการณ์ (Observe)

ในระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ ผู้วิจัยและผู้ร่วมสังเกตการณ์ จะทำการบันทึกผลการจัดการเรียนรู้ลงในแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้พร้อมทั้งมีการบันทึกเทปการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้เครื่องบันทึกวิดีโอเพื่อใช้ประกอบการสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัย พร้อมกับการมอบหมายให้นักเรียนทำใบกิจกรรมในแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ เมื่อครบทุกแผนการจัดการเรียนรู้แล้วนักเรียนจะทำแบบทดสอบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อสังเกตและประเมินทักษะการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียน

ขั้นที่ 4 ขั้นสะท้อนผลการปฏิบัติ (Reflect)

ผู้วิจัยจะนำข้อมูลที่ได้จากแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้และเทปบันทึกการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ มาทำการวิเคราะห์ถึงปัญหาและอุปสรรคที่เกิดขึ้นระหว่างการดำเนินการจัดการเรียนรู้ เพื่อนำไปปรับปรุงและพัฒนาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการต่อไปให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น โดยทำซ้ำไปจนครบทั้ง 3 แผนการจัดการเรียนรู้หรือวงจรปฏิบัติการ หลังจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ครบทั้ง 3 แผนการจัดการเรียนรู้หรือวงจรปฏิบัติการแล้ว ผู้วิจัยนำผลที่ได้จากการเก็บรวบรวมข้อมูลทั้งหมดไปทำการวิเคราะห์ข้อมูลและสรุปผลการวิจัยในลำดับต่อไป

ผู้เข้าร่วมวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ของโรงเรียนมัธยมศึกษาขนาดกลางแห่งหนึ่ง ในเขตภาคเหนือตอนล่าง ที่ลงทะเบียนเรียนในรายวิชา ค31202 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562 จำนวน 25 คน ที่ได้มาจากการคัดเลือกแบบเจาะจง (purposive sampling) เนื่องจากเป็นกลุ่มที่ผู้วิจัยทำหน้าที่เป็นผู้สอนและพบปัญหาเกี่ยวกับความสามารถด้านการแก้ปัญหา การให้เหตุผล ทักษะการสื่อสาร และการนำเสนอตัวแทนความคิดเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ผู้วิจัยแสดงเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยที่สอดคล้องกับจุดประสงค์ของการวิจัยในแต่ละข้อดังตาราง 5

ตาราง 5 แสดงจุดประสงค์ของการวิจัยและเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

จุดประสงค์การวิจัย	เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
1. เพื่อศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	– แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้

ตาราง 5 (ต่อ)

จุดประสงค์การวิจัย	เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
1. เพื่อศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	– แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้
2. เพื่อศึกษาผลการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้น ของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์	
2.1 เปรียบเทียบคะแนนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ กับเกณฑ์ร้อยละ 70 ของคะแนนเต็ม	– แบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์
2.2 ศึกษาพัฒนาการของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ระหว่างวงจรปฏิบัติการทั้ง 3 วงจร	– ใบกิจกรรม – แบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยแสดงเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย แบ่งออกเป็น 3 ประเภท ดังนี้

1. เครื่องมือที่ใช้ในการทดลองปฏิบัติ ได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้การจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ จำนวน 3 แผนการจัดการเรียนรู้

2. เครื่องมือที่ใช้ในการสะท้อนผลการปฏิบัติ ได้แก่ แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ที่บันทึกโดยผู้วิจัย และผู้ร่วมสังเกตการณ์ ซึ่งเป็นครูผู้เชี่ยวชาญด้านหลักสูตรและการสอน ที่มีประสบการณ์ด้านการศึกษาและการทำวิจัยระดับปริญญาเอก ด้านหลักสูตรและการสอน

3. เครื่องมือที่ใช้ในการประเมินประสิทธิภาพของการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ได้แก่ แบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ใบกิจกรรมเรื่องวงกลม ใบกิจกรรมเรื่องวงรี และใบกิจกรรมเรื่องพาราโบลา

ผู้วิจัยแสดงการกระบวนการพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ดังต่อไปนี้

1. **เครื่องมือที่ใช้ในการทดลองปฏิบัติ** ได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้การจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ จำนวน 3 แผนการจัดการเรียนรู้ ดังนี้

1.1 แผนการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ จำนวน 3 แผนการจัดการเรียนรู้ โดยผู้วิจัยได้ออกแบบงานทางคณิตศาสตร์ หรือสถานการณ์ปัญหา เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ให้มีความน่าสนใจและมีแนวคิดที่แปลกใหม่ ส่งเสริมให้เกิดกิจกรรมการอภิปรายในชั้นเรียนเป็นรายกลุ่มและทั้งชั้นเรียน รวมทั้งหมด 15 ชั่วโมง โดยใช้เวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ทั้งหมด 3 สัปดาห์ มีขั้นตอนการพัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้ ดังนี้

1.1.1 ศึกษาค้นคว้าหลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 และคู่มือการใช้หลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยศึกษารายละเอียด ดังนี้ 1) สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม สำหรับผู้เรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนวิทยาศาสตร์ 2)จำนวนเวลาในการเรียนแต่ละหัวข้อ 3) ผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม 4) แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้/แนวทางการจัดกิจกรรม และสื่อการเรียนรู้/แหล่งเรียนรู้ เป็นต้น รวมถึงศึกษาคู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ และแนวทางการสร้างแผนการจัดการเรียนรู้

1.1.2 ศึกษาเนื้อหาเรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ จากเอกสารประกอบการสอน หนังสือเรียน ตำราต่างประเทศ และเว็บไซต์ที่เกี่ยวข้อง เป็นต้น

1.1.3 ศึกษาแนวคิด ทฤษฎี และหลักการเกี่ยวกับกระบวนการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์

1.1.4 ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียน เพื่อนำไปสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์

1.1.5 จัดทำแผนการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ จำนวน 3 แผนการจัดการเรียนรู้ โดยใช้เวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ทั้งหมด 15 ชั่วโมง ดังแสดงในตาราง 6

ตาราง 6 แสดงลำดับวงจรปฏิบัติการ แผนการจัดการเรียนรู้ เนื้อหา ชื่อแผนการจัดการเรียนรู้ และเวลาที่ใช้ในการจัดกิจกรรม

วงจรปฏิบัติการที่	แผนการจัดการเรียนรู้ที่	เนื้อหา	ชื่อแผนการจัดการเรียนรู้	จำนวน (ชั่วโมง)
1	1	วงกลม	วงกลม	5
2	2	วงรี	วงรี	5
3	3	พาราโบลา	พาราโบลา	5

แผนการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ที่ส่งเสริมการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แต่ละแผนการจัดการเรียนรู้จะมีรายละเอียด ดังต่อไปนี้

1. ผลการเรียนรู้
2. จุดประสงค์การเรียนรู้
3. สาระสำคัญ
4. สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม
5. กิจกรรมการเรียนรู้ตามการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์
   - 5.1 ขั้นการปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์การเรียนรู้และการทำงานทางคณิตศาสตร์
   - 5.2 ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์
   - 5.3 ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน
   - 5.4 ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน
   - 5.5 ขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่

6. สื่อการเรียนรู้

7. แหล่งการเรียนรู้เพิ่มเติม

8. การวัดและประเมินผล

9. แบบบันทึกผลหลังการการจัดการเรียนรู้ (สำหรับผู้วิจัย)

1.1.6 นำแผนการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นจำนวน 3 แผนการจัดการเรียนรู้ เสนอต่อผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน

1) ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาคณิตศาสตร์ เป็นอาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร ที่มีความรู้ความเชี่ยวชาญและประสบการณ์การสอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษา

2) ผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ศึกษา เป็นอาจารย์ประจำภาควิชาการศึกษา สาขาวิทยาศาสตร์ศึกษา (คณิตศาสตร์ศึกษา) คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร ที่มีความรู้ความเชี่ยวชาญและประสบการณ์การสอนเกี่ยวกับหลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์

3) ผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เป็นครูประจำการ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ที่มีประสบการณ์การสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 ไม่ต่ำกว่า 10 ปี

เพื่อพิจารณาและตรวจสอบคุณภาพของแผนการจัดการเรียนรู้ทั้ง 5 ด้าน คือ ด้านจุดประสงค์การเรียนรู้ ด้านสาระการเรียนรู้ ด้านการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ด้านสื่อและแหล่งการเรียนรู้ และ ด้านการวัดผลและประเมินผล โดยข้อเสนอแนะจากผู้เชี่ยวชาญทั้ง 3 ท่าน สามารถสรุปได้ดังนี้

ตาราง 7 แสดงข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแผนการจัดการเรียนรู้

การพิจารณา	ข้อเสนอแนะ
ด้านจุดประสงค์การเรียนรู้	ควรระบุความรู้คณิตศาสตร์ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์และคุณลักษณะที่เกี่ยวข้องกับกิจกรรมให้ชัดเจน และสอดคล้องกับกิจกรรมที่นักเรียนได้ปฏิบัติจริง
ด้านสาระการเรียนรู้	-

ตาราง 7 (ต่อ)

การพิจารณา	ข้อเสนอแนะ
ด้านการจัดกิจกรรมการเรียนรู้	1) ควรเขียนอธิบายรายละเอียดกิจกรรมในแต่ละขั้นตอนให้ชัดเจนโดยใส่รายละเอียดแสดงให้เห็นถึงสิ่งที่ครูและนักเรียนจะต้องดำเนินการ และเป้าหมายในการดำเนินกิจกรรมในแต่ละขั้นตอน 2) ในบางแผนการจัดการเรียนรู้ให้ตัวอย่างแก่นักเรียนมากเกินไปซึ่งจะทำให้มีเวลาในการอภิปรายน้อย ควรตัดบางตัวอย่างออก 3) คำถามที่ใช้กระตุ้นนักเรียนในขั้นการปฏิบัติที่ 2 และ 5 ควรกำหนดให้ชัดเจน
ด้านสื่อและแหล่งการเรียนรู้	1) งานทางคณิตศาสตร์ในบางแผนมีความซับซ้อนมากเกินไปควรลดความซับซ้อนลงให้เหมาะสมกับนักเรียน 2) ผลงานของนักเรียนที่นำไปเป็นประเด็นการอภิปรายกำหนดให้ชัดเจนและเหมาะสม ไม่มากเกินไป
ด้านการวัดผลและประเมินผล	-

1.1.7 สร้างแผนการจัดการเรียนรู้ฉบับสมบูรณ์เพื่อนำไปใช้ดำเนินการจัดการเรียนรู้กับนักเรียนต่อไป

2. เครื่องมือที่ใช้ในการสะท้อนผลการปฏิบัติ

2.1 แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้

ผู้ร่วมสังเกตการณ์ ซึ่งเป็นครูผู้เชี่ยวชาญด้านหลักสูตรและการสอน จะบันทึกประเด็นปัญหา อุปสรรค ลักษณะของคำถามที่เหมาะสม และข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของผู้วิจัยแต่ละขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ เพื่อนำข้อมูลมาปรับปรุงการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัยในวงจรปฏิบัติการถัดไปมีขั้นตอนในการสร้างแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ ดังนี้

2.1.1 กำหนดขอบเขตการบันทึกการสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้

2.1.2 สร้างแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ โดยมีลักษณะเป็นแบบเขียนบันทึกประเด็นตามขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปราย

ทางคณิตศาสตร์ ปัญหาและอุปสรรค์ แนวทางในการแก้ไขปรับปรุง และบันทึกพฤติกรรมของนักเรียนด้านการแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิด เกิดจากบทบาทด้านใดของครู

2.1.3 นำแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษา และ ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน ประกอบด้วย

1) ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาคณิตศาสตร์ เป็นอาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร ที่มีความรู้ความเชี่ยวชาญและประสบการณ์การสอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษา

2) ผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ศึกษา เป็นอาจารย์ประจำภาควิชาการศึกษา สาขาวิทยาศาสตร์ศึกษา (คณิตศาสตร์ศึกษา) คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร ที่มีความรู้ ความเชี่ยวชาญและประสบการณ์การสอนเกี่ยวกับหลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์

3) ผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เป็นครูประจำการ วิทยฐานะ ครูชำนาญการพิเศษ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ที่มีประสบการณ์การสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 ไม่ต่ำกว่า 10 ปี

เพื่อพิจารณาและตรวจสอบคุณภาพของแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ โดยข้อเสนอแนะจากผู้เชี่ยวชาญทั้ง 3 ท่าน สามารถสรุปได้ดังนี้

1) ปรับปรุงประเด็นการสังเกต เพื่อผู้วิจัยและผู้ร่วมสังเกตการณ์ได้บันทึกบทบาทของผู้สอนว่าเป็นไปตามขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์หรือไม่

2) เพิ่มประเด็นการสังเกต เพื่อผู้วิจัยและผู้ร่วมสังเกตการณ์ได้บันทึกว่าแต่ละขั้นการปฏิบัตินั้นได้ส่งเสริมให้เกิดความสามารถด้านการแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิดของนักเรียน หรือไม่ อย่างไร

2.1.4 นำแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ ไปใช้บันทึกข้อมูลจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้

3. เครื่องมือที่ใช้ในการประเมินประสิทธิภาพของการจัดการเรียนรู้ โดยมีเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ดังนี้

3.1 แบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์

คือ แบบทดสอบที่ใช้การคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนเมื่อสิ้นสุดแผนการจัดการเรียนรู้ทั้ง 3 แผน ซึ่งมีรูปแบบการเขียนตอบอิสระจำนวน 3 ข้อ โดยแต่ละข้อมีคำถามย่อย 4 ข้อ รวม

คำถามย่อยทั้งหมด 12 ข้อ สำหรับให้นักเรียนทำเป็นรายบุคคล กำหนดเกณฑ์การวัดและประเมินการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริค เพื่อนำผลคะแนนไปทำการวิเคราะห์เชิงปริมาณโดยเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 70 ของคะแนนเต็ม

นอกจากนี้ ผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้จากแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ มาตรวจและวิเคราะห์ข้อมูลด้วยเกณฑ์การให้คะแนนแบบแยกประเด็น (Analytic Scoring) ปรับปรุงจากเกณฑ์รูบริคสำหรับวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของ คฑาไชย ทักษ์สิทธา (2560) ออกเป็น 4 ระดับคุณภาพ คือ ดีมาก ดี ปานกลาง พอใช้ เพื่อวิเคราะห์เชิงคุณภาพ ซึ่งผู้วิจัยมีขั้นตอนในการสร้างดังนี้

1) ผู้วิจัยศึกษาเนื้อหาเรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ จากเอกสารประกอบการสอน หนังสือเรียน ตำราต่างประเทศ และเว็บไซต์ที่เกี่ยวข้อง

2) ศึกษาเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีการสร้างแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างแบบวัด

3) ศึกษาสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม ตามหลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 สำหรับนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์

4) กำหนดกรอบการสร้างแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ตามคำจำกัดความที่ใช้ในการวิจัย ซึ่งสรุปได้ว่าการคิดเชิงคณิตศาสตร์ประกอบด้วย 3 ด้าน ได้แก่

(1) การแก้ปัญหา ประกอบด้วย

การทำความเข้าใจปัญหา (P1)

การดำเนินการแก้ปัญหา (P2)

การสรุปคำตอบของปัญหา (P3)

(2) การให้เหตุผล ประกอบด้วย

การอธิบายเหตุผลของการนำความรู้หรือข้อมูลมาใช้เพื่อทำความเข้าใจปัญหา (R1)

การอธิบายเหตุผลของการดำเนินการแก้ปัญหา (R2) และ

การอธิบายความสมเหตุสมผลของคำตอบของปัญหา (R3)

(3) การนำเสนอตัวแทนความคิด ประกอบด้วย

การใช้ตัวแทนความคิดเพื่อทำความเข้าใจปัญหา (Re1)

การใช้ตัวแทนความคิดในการดำเนินการแก้ปัญหา (Re2)

การใช้ตัวแทนความคิดเพื่อสรุปคำตอบของปัญหา (Re3)

5) สร้างแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งเป็นแบบทดสอบแบบอัตนัยจำนวน 3 ข้อ โดยในแบบทดสอบได้ให้โจทย์ปัญหาแล้วให้นักเรียนเขียนตอบ

6) สร้างเกณฑ์ในการตรวจให้คะแนนแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ตามกรอบการสร้างแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ซึ่งสังเคราะห์ตามคำจำกัดความที่ใช้ในการวิจัย โดยยึดตามแนวคิดของ Kriegler (2004) การให้คะแนนแต่ละข้อคะแนนเต็ม 18 คะแนน ตามเกณฑ์ดังนี้

ตาราง 8 เกณฑ์การให้คะแนนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการแก้ปัญหา

คะแนน	เกณฑ์การพิจารณา
P1 การทำความเข้าใจปัญหา	
2	- ระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบและเงื่อนไขของปัญหาได้ถูกต้องและครบถ้วน
1	- ระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบและเงื่อนไขของปัญหาได้ถูกต้องเพียงบางส่วน หรือ ระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบและเงื่อนไขของปัญหาได้ถูกต้อง แต่ยังไม่ครบถ้วน
0	- ระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบและเงื่อนไขของปัญหาผิด หรือ ไม่ระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบและเงื่อนไขของปัญหา
P2 การดำเนินการแก้ปัญหา	
2	- ใช้สูตร ทฤษฎีบท หรือหลักการทางคณิตศาสตร์เพื่อแสดงการแก้ปัญหาได้ถูกต้อง และครบทุกขั้นตอน
1	- ใช้สูตร ทฤษฎีบท หรือหลักการทางคณิตศาสตร์เพื่อแสดงการแก้ปัญหาได้ถูกต้องเพียงบางส่วน หรือ แสดงการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง แต่ยังไม่ครบทุกขั้นตอน
0	- ใช้สูตร ทฤษฎีบท หรือหลักการทางคณิตศาสตร์เพื่อแสดงการแก้ปัญหาผิด หรือ ไม่แสดงการแก้ปัญหา

ตาราง 8 (ต่อ)

P3 การสรุปคำตอบของปัญหา	
2	- สรุปคำตอบได้ถูกต้องและครบถ้วนตามประเด็นที่ปัญหาต้องการทราบ
1	- สรุปคำตอบได้ถูกต้องเพียงบางส่วน หรือ สรุปคำตอบได้ถูกต้อง แต่ยังไม่ครบถ้วนตามประเด็นที่ปัญหาต้องการทราบ
0	- สรุปคำตอบผิด หรือ ไม่สรุปคำตอบ

ตาราง 9 เกณฑ์การให้คะแนนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการให้เหตุผล

คะแนน	เกณฑ์การพิจราณา
R1 การอธิบายเหตุผลของการนำความรู้หรือข้อมูลมาใช้เพื่อทำความเข้าใจปัญหา	
2	- ระบุความสอดคล้องระหว่างสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบกับเงื่อนไขของปัญหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องได้ถูกต้อง
1	- ระบุความสอดคล้องระหว่างสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบกับเงื่อนไขของปัญหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องได้ถูกต้องเพียงบางส่วน
0	- ระบุความสอดคล้องระหว่างสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบกับเงื่อนไขของปัญหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องผิด หรือ ไม่ระบุความสอดคล้อง
R2 การอธิบายเหตุผลของการดำเนินการแก้ปัญหา	
2	- อธิบายเหตุผลของการดำเนินการแก้ปัญหาได้อย่างสมเหตุสมผล
1	- อธิบายเหตุผลของการดำเนินการแก้ปัญหาได้อย่างสมเหตุสมผลในบางส่วนหรืออธิบายไม่ชัดเจน
0	- อธิบายเหตุผลของการดำเนินการแก้ปัญหาไม่สมเหตุสมผล หรือ ไม่สามารถอธิบายได้
R3 การอธิบายความสมเหตุสมผลของคำตอบของปัญหา	
2	- นำคำตอบที่ได้ไปตรวจสอบกับเงื่อนไขของปัญหาได้ถูกต้อง หรือ ระบุความสอดคล้องระหว่างคำตอบและเงื่อนไขของปัญหาได้ถูกต้อง
1	- นำคำตอบที่ได้ไปตรวจสอบกับเงื่อนไขของปัญหาได้ถูกต้องเพียงบางส่วน หรือ ระบุความสอดคล้องระหว่างคำตอบและเงื่อนไขของปัญหาได้ถูกต้องเพียงบางส่วน
0	- นำคำตอบที่ได้ไปตรวจสอบกับเงื่อนไขของปัญหาผิด หรือ ระบุความสอดคล้องระหว่างคำตอบและเงื่อนไขของปัญหาผิด หรือ ไม่เขียนอธิบายความสมเหตุสมผล

ตาราง 10 เกณฑ์การให้คะแนนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการเสนอตัวแทนความคิด

คะแนน	เกณฑ์การพิจารณา
Re1 การใช้ตัวแทนความคิดเพื่อทำความเข้าใจปัญหา	
2	- เขียนแผนภาพ เน้นข้อความ หรือกำหนดสัญลักษณ์จากปัญหาเพื่อระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบและเงื่อนไขของปัญหาได้อย่างเหมาะสม และสื่อความหมายได้อย่างชัดเจน
1	- เขียนแผนภาพ เน้นข้อความ หรือกำหนดสัญลักษณ์จากปัญหาเพื่อระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบและเงื่อนไขของปัญหาไม่เหมาะสม แต่สื่อความหมายได้อย่างชัดเจน หรือ เขียนแผนภาพ เน้นข้อความ หรือกำหนดสัญลักษณ์จากปัญหาเพื่อระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบและเงื่อนไขของปัญหาได้อย่างเหมาะสม แต่สื่อความหมายไม่ชัดเจน
0	- เขียนแผนภาพ เน้นข้อความ หรือกำหนดสัญลักษณ์จากปัญหาเพื่อระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบและเงื่อนไขของปัญหาไม่เหมาะสม และสื่อความหมายไม่ชัดเจน หรือ ไม่ระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบและเงื่อนไขของปัญหา
Re2 การใช้ตัวแทนความคิดในการดำเนินการแก้ปัญหา	
2	- นำสัญลักษณ์ แผนภาพ รูปภาพ กราฟ หรือข้อความมาแสดงการดำเนินการการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม และสื่อความหมายได้อย่างชัดเจน
1	- นำสัญลักษณ์ แผนภาพ รูปภาพ กราฟ หรือข้อความมาแสดงการดำเนินการการแก้ปัญหาไม่เหมาะสม แต่สื่อความหมายได้อย่างชัดเจน หรือ นำสัญลักษณ์ แผนภาพ รูปภาพ กราฟ หรือข้อความมาแสดงการดำเนินการการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม แต่สื่อความหมายไม่ชัดเจน
0	- นำสัญลักษณ์ แผนภาพ รูปภาพ กราฟ หรือข้อความมาแสดงการดำเนินการการแก้ปัญหาไม่เหมาะสม และสื่อความหมายไม่ชัดเจน หรือ ไม่แสดงการแก้ปัญหา

ตาราง 10 (ต่อ)

คะแนน	เกณฑ์การพิจารณา
Re3 การใช้ตัวแทนความคิดเพื่อสรุปคำตอบของปัญหา	
2	- นำสัญลักษณ์ แผนภาพ รูปภาพ กราฟ หรือข้อความมาใช้สรุปคำตอบได้อย่างเหมาะสม และสื่อความหมายได้อย่างชัดเจน
1	- นำสัญลักษณ์ แผนภาพ รูปภาพ กราฟ หรือข้อความมาใช้สรุปคำตอบไม่เหมาะสม แต่สื่อความหมายได้อย่างชัดเจน หรือ นำสัญลักษณ์ แผนภาพ รูปภาพ กราฟ หรือข้อความมาใช้ได้อย่างเหมาะสม แต่สื่อความหมายไม่ชัดเจน
0	- นำสัญลักษณ์ แผนภาพ รูปภาพ กราฟ หรือข้อความมาใช้สรุปคำตอบไม่เหมาะสม และสื่อความหมายไม่ชัดเจน หรือ ไม่สรุปคำตอบ

7) ผู้วิจัยนำแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์และเกณฑ์เสนออาจารย์ที่ปรึกษาตรวจพิจารณาความเหมาะสม ให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแก้ไขแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์

8) หลังจากนั้นผู้วิจัยนำแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่ปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของอาจารย์ที่ปรึกษาไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิ จำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบให้ข้อเสนอแนะความตรงตามเนื้อหา ความถูกต้องของภาษา ความเหมาะสมของปัญหาในชีวิตจริงและข้อคำถาม โดยผู้เชี่ยวชาญประกอบด้วย

1) ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาคณิตศาสตร์ เป็นอาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร ที่มีความรู้ความเชี่ยวชาญและประสบการณ์การสอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษา

2) ผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ศึกษา เป็นอาจารย์ประจำภาควิชาการศึกษา สาขาวิทยาศาสตร์ศึกษา (คณิตศาสตร์ศึกษา) คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร ที่มีความรู้ ความเชี่ยวชาญและประสบการณ์การสอนเกี่ยวกับหลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์

3) ผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เป็นครูประจำการ วิทยฐานะ ครูชำนาญการพิเศษ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ที่มีประสบการณ์การสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 ไม่ต่ำกว่า 10 ปี

เพื่อพิจารณาและตรวจสอบคุณภาพของแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ โดยข้อเสนอแนะจากผู้เชี่ยวชาญทั้ง 3 ท่าน สามารถสรุปได้ดังนี้

(1) ควรปรับปรุงคำถามในสถานการณ์ปัญหาบุญบั้งไฟ เพราะว่าเป็นเนื้อหาเรื่องฟังก์ชันกำลังสอง ซึ่งไม่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาเรื่องพาราโบลา สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4

(2) ควรปรับปรุงสถานการณ์ปัญหาสวนรูปวงรี ในเป็นปัญหาที่สอดคล้องหรือมีเรื่องราวที่สอดคล้องกับชีวิตจริงมากขึ้น

(3) ปรับปรุงการใช้ภาษาในสถานการณ์ เด็กเลี้ยงแกะ โดยใช้ภาษาระดับทางการ มีความสมเหตุสมผล และน่าสนใจมากขึ้น

9) นำแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ทั้งที่ผ่านการตรวจสอบคุณภาพโดยอาจารย์ที่ปรึกษา และผู้เชี่ยวชาญไปใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เป็นผู้เข้าร่วมวิจัย

การเก็บรวมรวมข้อมูล

ผู้วิจัยดำเนินการเก็บข้อมูลจากการจัดการเรียนรู้โดยมีขั้นตอนการดำเนินการ ดังนี้

1. ปฐมนิเทศและชี้แจงจุดประสงค์การจัดการเรียนรู้ให้กับนักเรียนที่เป็นผู้เข้าร่วมวิจัย

2. ดำเนินการจัดการเรียนรู้ตามแผนการจัดการเรียนรู้ตามการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ที่ส่งเสริมการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนในชั่วโมงปกติของโรงเรียน โดยใช้เวลาในการจัดการเรียนรู้ทั้งหมด 15 ชั่วโมง

3. ในระหว่างทำกิจกรรมการเรียนรู้ นักเรียนแต่ละกลุ่มจะร่วมกันศึกษาข้อมูลในการแก้ปัญหาที่กำหนด ระดมแนวคิดที่หลากหลาย และร่วมกันอภิปรายแลกเปลี่ยนความคิดเห็นโต้แย้งด้วยเหตุผลและข้อมูลทางคณิตศาสตร์ ในขณะที่ผู้วิจัยและผู้ร่วมสังเกตการณ์ ซึ่งเป็นครูผู้เชี่ยวชาญด้านหลักสูตรและการสอน จะสังเกตและจดบันทึกการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ลงในแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ และกลุ่มของนักเรียนเขียนคำตอบหรือแสดงวิธีคิดลงในใบกิจกรรมเป็นรายกลุ่ม ตามที่ผู้วิจัยกำหนด

4. ผู้วิจัยและผู้ร่วมสังเกตการณ์จัดกิจกรรมการเรียนรู้บันทึกผลการสังเกตพฤติกรรมคิดเชิงคณิตศาสตร์ ลงในแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้

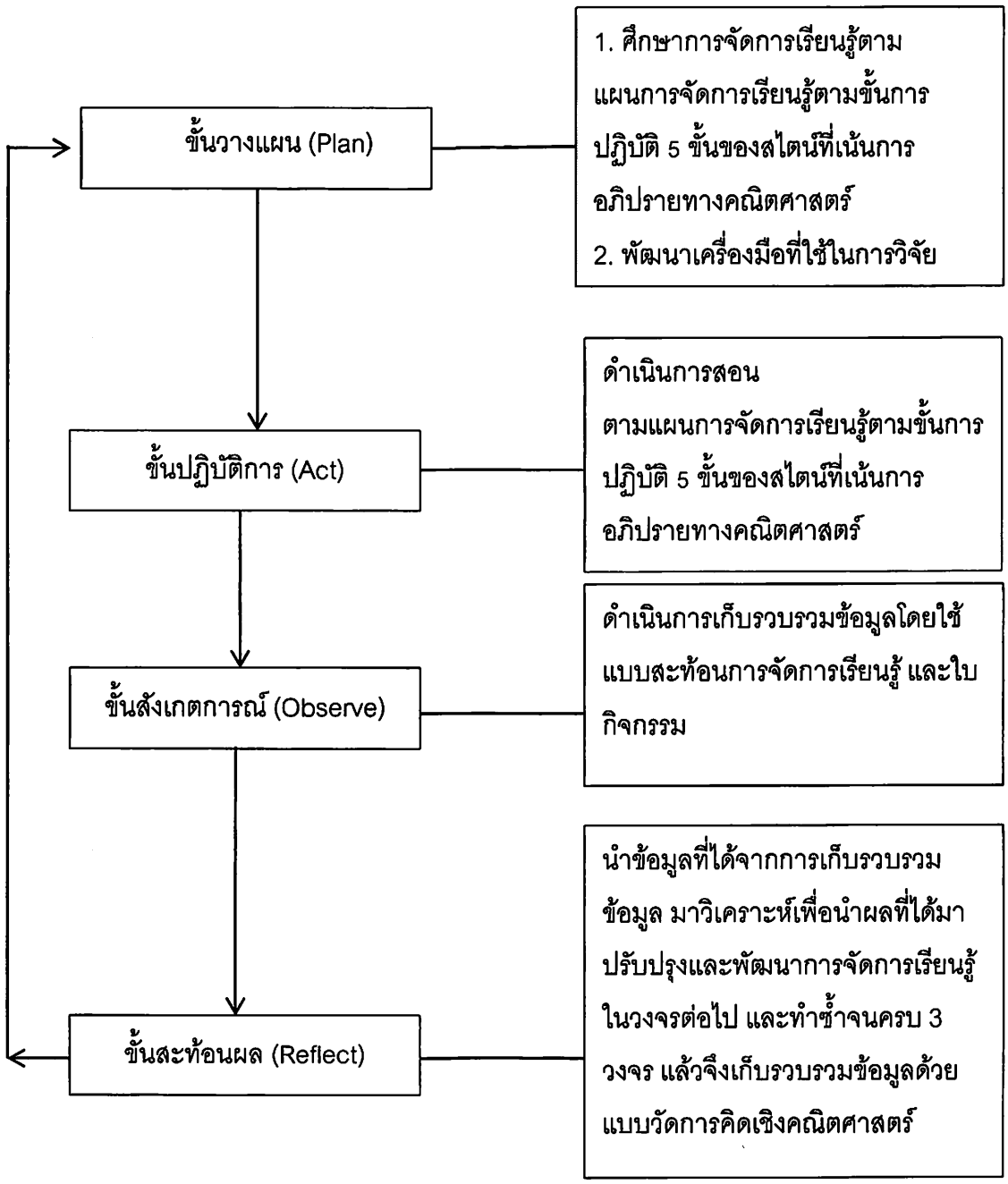
5. เมื่อเสร็จสิ้นการจัดการเรียนรู้ในแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ ผู้วิจัยจะนำผลที่ได้จากการจัดการเรียนรู้ทั้งหมดให้อาจารย์ที่ปรึกษาทำการสะท้อนผล เพื่อนำผลที่ได้ไปปรับปรุงแผนการจัดการเรียนรู้ในครั้ง ต่อไป

6. เมื่อดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ครบทั้งสามแผนการจัดการเรียนรู้แล้ว ผู้วิจัยให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นรายบุคคล โดยใช้เวลาในการสอบ 1 ชั่วโมง

7. นำผลที่ได้จากการเก็บรวบรวมข้อมูลทั้งหมดไปทำการวิเคราะห์ข้อมูล

ขั้นตอนการดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ใช้รูปแบบการวิจัยเชิงปฏิบัติการในชั้นเรียน ซึ่งได้ดำเนินการตามขั้นตอนของการวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียนดังแผนภาพ ต่อไปนี้



ภาพ 5 แสดงขั้นตอนการวิจัยเชิงปฏิบัติการ

ที่มา: พัชรินทร์ ชูกลิ่น, 2554

การวิเคราะห์ข้อมูล

การศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้จากสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ ซึ่งเป็นข้อมูลเชิงคุณภาพและเป็นข้อมูลที่ได้จากผู้วิจัยและผู้ร่วมสังเกตการณ์ ซึ่งเป็นครูผู้เชี่ยวชาญด้านหลักสูตรและการสอนในโรงเรียน โดยใช้การวิเคราะห์เชิงเนื้อหา (Content Analysis) เมื่อสิ้นสุดการจัดการเรียนรู้ในแต่ละวงจรปฏิบัติการ และวิเคราะห์ภาพรวมทั้งหมดอีกครั้ง เมื่อดำเนินการจัดการเรียนรู้ครบทั้ง 3 วงจรปฏิบัติการ มีรายละเอียดการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

1. การจัดระเบียบข้อมูลเพื่อทำการวิเคราะห์และตีความ

2. การจัดระเบียบเนื้อหาของข้อมูลตามประเด็นที่ผู้วิจัยต้องการวิเคราะห์ ได้แก่

1) การจัดการเรียนรู้สอดคล้องกับหลักการหรือขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของ สไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ อย่างไร

2) ปัญหาหรืออุปสรรคที่พบจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

3) แนวทางการปรับปรุงแก้ไขปัญหาสำหรับการจัดการเรียนรู้ในครั้งต่อไป

4) การจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ส่งผลให้เกิดความสามารถของผู้เรียนด้านการแก้ปัญหา การให้เหตุผลและการนำเสนอตัวแทนความคิด ได้หรือไม่ อย่างไร โดยประเด็นเหล่านี้จะมีผลต่อการปรับปรุงและพัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้ด้วยการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์

3. การแสดงข้อมูล เป็นการนำข้อมูลที่มีรหัสเดียวกันมาจัดกลุ่มให้เป็นหมวดหมู่เพื่อสะดวกต่อการวิเคราะห์และอภิปรายผล โดยข้อมูลที่ผู้วิจัยจัดกลุ่มนั้นมีทั้งหมด 4 กลุ่ม ดังที่กล่าวมาข้างต้นในข้อ 2

4. การรายงานผลการดำเนินการวิจัย ได้แก่

4.1 ขั้นวางแผน เป็นการรายงานรายละเอียดที่ผู้วิจัยได้วางแผนและเตรียมการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในแต่ละวงจรปฏิบัติการ

4.2 ขั้นปฏิบัติการ เป็นการรายงานขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ ขั้นการปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์การเรียนรู้และการทำงานทางคณิตศาสตร์ (Anticipating) ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ (Launching) ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน (Monitoring) ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของ

นักเรียน (Selecting and Sequencing) ขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่ (Connecting)

4.3 ขั้นสังเกตการณ์ เป็นการรายงานผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ได้จากการจัดระเบียบข้อมูลโดยเขียนรายงานแยกเป็นประเด็น

4.4 ขั้นสะท้อนผลการปฏิบัติ เป็นการรายงานแนวทางการปรับปรุงแก้ไข เพื่อนำไปปรับปรุงและพัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้ด้วยแนวการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ในวงจรปฏิบัติการต่อไปให้ดียิ่งขึ้น

5. ผู้วิจัยนำแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ที่ได้จากตัวผู้วิจัยและผู้ร่วมสังเกตการณ์ มาดำเนินการตรวจสอบข้อมูลเชิงคุณภาพด้วยวิธีการสามเส้า (Triangulation) และตรวจสอบความสอดคล้องของข้อมูลเชิงคุณภาพด้วยการตรวจสอบสามเส้าแบบใช้แหล่งข้อมูลมากกว่าหนึ่งชนิด (Resource Triangulation) โดยการตรวจสอบจากผู้วิจัยและผู้ร่วมสังเกตการณ์ว่าได้ข้อมูลที่เหมือนกันหรือแตกต่างกันอย่างไร เพื่อนำข้อมูลมาวิเคราะห์และพิจารณาผลการดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ว่าให้ข้อมูลในประเด็นที่สอดคล้องและเป็นไปในทิศทางเดียวกันหรือไม่ อย่างไร

การศึกษาผลการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ในการวิเคราะห์ข้อมูลนั้น ผู้วิจัยได้ใช้เครื่องมือในการเก็บรวบรวมข้อมูล ได้แก่ ใบกิจกรรมและแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียน ซึ่งจะทำการวิเคราะห์ข้อมูลจากใบกิจกรรมเมื่อสิ้นสุดในแต่ละวงจรปฏิบัติการ และจะวิเคราะห์ภาพรวมทั้งหมดเมื่อดำเนินการจัดการเรียนรู้ครบทั้ง 3 วงจร จากนั้นนำผลการวิเคราะห์ข้อมูลทั้งสองแหล่งมาเปรียบเทียบกันเพื่อตรวจสอบความสอดคล้องของผลการวิเคราะห์ข้อมูล โดยมีรายละเอียดการวิเคราะห์ดังนี้

1. การวิเคราะห์ข้อมูลจากใบกิจกรรม

1.1 ผู้วิจัยรวบรวมข้อมูลจากใบกิจกรรม โดยศึกษาจากร่องรอยการทำงานของนักเรียนจากใบกิจกรรม และการตอบคำถามในชั้นเรียน รวมถึงปัญหาและอุปสรรคที่พบขณะดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยใช้การวิเคราะห์เนื้อหาเพื่อประกอบการอธิบายผลที่เกิดขึ้นระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1.2 โดยวิเคราะห์การเขียนคำตอบของนักเรียน โดยวิเคราะห์ข้อมูลด้วยเกณฑ์การให้คะแนนแบบแยกประเด็น (Analytic Scoring) ที่ผู้วิจัยได้ปรับปรุงจากเกณฑ์รูบริคสำหรับวัดการ

คิดเชิงคณิตศาสตร์ของ คฑาไชย ทักษ์สิทธา (2560) แบ่งเป็น 4 ระดับคุณภาพ คือ ดีมาก ดี ปานกลาง พอใช้ ดังรายละเอียดในตาราง 11

1.3 ผู้วิจัยเปรียบเทียบจำนวนนักเรียนในแต่ละระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้จากใบกิจกรรมที่ 1, 2 และ 3 ซึ่งถ้าหากจำนวนนักเรียนมากขึ้นในระดับที่ดีขึ้น ตามใบกิจกรรมที่ได้จากวงจรปฏิบัติการที่ 1, 2 และ 3 แสดงให้เห็นว่านักเรียนได้มีการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ และแสดงให้เห็นว่าการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นสามารถพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนได้

ตาราง 11 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนแบบแยกประเด็นตามระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการแก้ปัญหา

คำอธิบาย	ระดับคุณภาพ
บอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และบอกสิ่งที่โจทย์ถาม ได้อย่างถูกต้องและครบถ้วน โดยขยายความตามความเข้าใจหรือใช้ภาษาของตนเอง และดำเนินการแก้ปัญหาตามแผนที่วางไว้หรือคิดคำนวณได้ถูกต้อง ตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบได้ถูกต้อง สมบูรณ์	ดีมาก
บอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และบอกสิ่งที่โจทย์ถาม ได้อย่างถูกต้องและครบถ้วน โดยระบุเพียงชื่อมโนทัศน์ หรือ วิธีการทางคณิตศาสตร์เป็นคำสั้นๆ และดำเนินการแก้ปัญหาตามแผนที่วางไว้หรือคิดคำนวณได้ถูกต้อง แต่การตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบ ยังไม่สมบูรณ์	ดี
บอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และบอกสิ่งที่โจทย์ถาม โดยการคัดลอกข้อความจากโจทย์มาเขียนตอบและไม่อธิบาย ดำเนินการแก้ปัญหาได้ถูกต้องเพียงบางส่วนหรือมีร่องรอยการดำเนินการแก้ปัญหาแต่ไม่สำเร็จ	พอใช้
บอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และบอกสิ่งที่โจทย์ถามไม่สมบูรณ์หรือไม่ทำเลย ดำเนินการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง หรือไม่มีร่องรอยการดำเนินการแก้ปัญหาเลย สรุปคำตอบไม่ถูกต้องและไม่ครบถ้วน หรือไม่สรุปคำตอบ	ปรับปรุง

ตาราง 12 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนแบบแยกประเด็นตามระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ด้านการให้เหตุผล

คำอธิบาย	ระดับคุณภาพ
สามารถเขียนอธิบายข้อสรุป โดยใช้ข้อมูลจากเงื่อนไขของปัญหาหรือการทำงานทางคณิตศาสตร์ ได้ถูกต้องและครบถ้วน สมเหตุสมผล และสามารถเขียนอธิบายให้เหตุผล ในการเลือกใช้ข้อมูลในการดำเนินการแก้ปัญหา ได้ถูกต้อง	ดีมาก
สามารถเขียนอธิบายข้อสรุป โดยใช้ข้อมูลจากเงื่อนไขของปัญหาหรือการทำงานทางคณิตศาสตร์ ได้ถูกต้องและครบถ้วน สมเหตุสมผล หรือสามารถเขียนอธิบายให้เหตุผล ในการเลือกใช้ข้อมูลในการดำเนินการแก้ปัญหา ได้ถูกต้อง	ดี
สามารถเขียนอธิบายข้อสรุป ได้ถูกต้อง แต่ยังขาดข้อมูลหรือหลักฐานสนับสนุนคำตอบ หรือ ระบุเพียงชื่อมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ แต่ไม่สามารถอธิบายให้เหตุผล ในการเลือกใช้ข้อมูลในการดำเนินการแก้ปัญหาได้ถูกต้อง	พอใช้
เขียนอธิบายข้อสรุปไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียนอธิบายข้อสรุป	ปรับปรุง

ตาราง 13 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนแบบแยกประเด็นตามระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ด้านการนำเสนอตัวแทนความคิด

คำอธิบาย	ระดับคุณภาพ
ทำความเข้าใจปัญหาโดยการขีดเขียน วาดรูป หรือขีดเส้นใต้ข้อเท็จจริงและคำสำคัญ ใช้รูปภาพ แผนภาพ แบบจำลอง หรือสมการ ประกอบการอธิบายแสดงการทำความเข้าใจปัญหา การดำเนินการแก้ปัญหา และสรุปคำตอบของปัญหาได้ถูกต้องสมบูรณ์ ครบทั้งสามกระบวนการ	ดีมาก
ทำความเข้าใจปัญหาโดยการขีดเขียน วาดรูป หรือขีดเส้นใต้ข้อเท็จจริงและคำสำคัญ ใช้รูปภาพ แผนภาพ แบบจำลอง หรือสมการ ประกอบการอธิบายแสดงการทำความเข้าใจปัญหา การดำเนินการแก้ปัญหา และสรุปคำตอบของปัญหาได้ถูกต้องสมบูรณ์ เพียง 2 กระบวนการ	ดี

ตาราง 13 (ต่อ)

คำอธิบาย	ระดับคุณภาพ
ทำความเข้าใจปัญหาโดยการขีดเขียน วาดรูป หรือขีดเส้นใต้ข้อเท็จจริงและคำสำคัญ ใช้รูปภาพ แผนภาพ แบบจำลอง หรือสมการ ประกอบการอธิบายแสดงการทำความเข้าใจปัญหา การดำเนินการแก้ปัญหา และสรุปคำตอบของปัญหาได้ถูกต้องสมบูรณ์ อย่างใดอย่างหนึ่ง	พอใช้
ใช้รูปภาพ แผนภาพ แบบจำลอง หรือตัวแทนแนวคิดทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ ประกอบการอธิบายไม่ถูกต้อง หรือ ไม่เขียนเลย	ปรับปรุง

2. การวิเคราะห์ข้อมูลจากแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยดำเนินการวิเคราะห์ข้อมูลทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพ ดังนี้

2.1 การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ

2.1.1 ผู้วิจัยนำแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์มาตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริค โดยยึดตามแนวคิดของ Kriegler (2004) จากนั้นนำผลไปวิเคราะห์ข้อมูล

2.1.2 ผู้วิจัยนำผลคะแนนมาวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (Statistical Package for the Social Science : SPSS) โดยทำการเปรียบเทียบคะแนนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ใน กับเกณฑ์ร้อยละ 70 ของคะแนนเต็ม โดยนำคะแนนการคิดเชิงคณิตศาสตร์จากแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ มาคำนวณหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน และทดสอบกับสถิติทีแบบกลุ่มเดียว (t – test one sample) เพื่อเปรียบเทียบคะแนนสอบกับเกณฑ์ร้อยละ 70

2.2 การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ

2.2.1 ผู้วิจัยนำแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นแบบทดสอบแบบอัตนัย จำนวน 3 ข้อ มาวิเคราะห์เชิงคุณภาพ โดยรวบรวมข้อมูลจากร่องรอยการเขียนแสดงวิธีคิดในแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ โดยใช้การวิเคราะห์เนื้อหาเพื่อประกอบการอธิบายผลที่เกิดขึ้นหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

2.2.2 ตรวจและวิเคราะห์ข้อมูลด้วยเกณฑ์การให้คะแนนแบบแยกประเด็น (Analytic Scoring) ปรับปรุงจากเกณฑ์รูบริคสำหรับวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของ คฑาไชย ทักษ์-สิทธา (2560) เช่นเดียวกับใบกิจกรรม โดยแบ่งเป็น 4 ระดับคุณภาพ คือ ดีมาก ดี ปานกลาง พอใช้

2.2.3 ผู้วิจัยเปรียบเทียบจำนวนนักเรียนในแต่ละระดับของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้จากใบกิจกรรมที่ 3 และ แบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ มาเปรียบเทียบเพื่อตรวจสอบความสอดคล้องและทิศทางของข้อมูล

บทที่ 4

ผลการวิจัย

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลการวิจัยเชิงปฏิบัติการเพื่อพัฒนาการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ สำหรับนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แบ่งออกเป็น 2 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 บทบาทของครูในแต่ละขั้นการปฏิบัติ ในการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้น ของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ตอนที่ 2 ผลการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ตอนที่ 1 บทบาทของครูในแต่ละขั้นการปฏิบัติ ในการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้น ของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

งานวิจัยครั้งนี้ใช้รูปแบบการวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียน ซึ่งเป็นการวิจัยแบบผสมผสานและดำเนินการตามแผนการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้น ของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ จำนวน 3 แผนการจัดการเรียนรู้ แผนละหนึ่งวงจรปฏิบัติการ รวมจำนวน 3 วงจรปฏิบัติการ แต่ละวงจรปฏิบัติการประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นวางแผน (Plan) ขั้นปฏิบัติการ (Act) ขั้นสังเกตการณ์ (Observe) และขั้นสะท้อนผลการปฏิบัติ (Reflect) โดยจัดกิจกรรมการเรียนรู้สัปดาห์ละ 5 ชั่วโมง รวมเวลาทั้งหมด 15 ชั่วโมง สำหรับแต่ละวงจรปฏิบัติการมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

วงจรปฏิบัติการที่ 1 เรื่อง วงกลม

ขั้นที่ 1 ขั้นวางแผน (Plan)

1. **การเตรียมแผนการจัดการเรียนรู้**

ผู้วิจัยจัดการเรียนรู้ตามหลักสูตรของโรงเรียนมัธยมศึกษาแห่งหนึ่งในจังหวัดกำแพงเพชร ตามหลักสูตรรายวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 รายวิชา ค31202

คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 ซึ่งเป็นรายวิชาสำหรับนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562 ในหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ประกอบด้วย 3 เรื่องย่อย ได้แก่ วงกลม วงรี และพาราโบลา โดยได้วางแผนการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ จำนวน 3 แผน ได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 วงกลม แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 วงรี และแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 พาราโบลา ซึ่งแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้มีขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้น ดังนี้

ขั้นการปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์การเรียนรู้และการทำงานทางคณิตศาสตร์

ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์

ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน

ขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่

โดยแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1.1 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง วงกลม เป็นกิจกรรมการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยกำหนดงานทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับวงกลมให้นักเรียนได้ศึกษา วิเคราะห์ โดยมีจุดมุ่งหมายให้นักเรียนได้เรียนรู้แบบสืบสอบผ่านกระบวนการสำรวจ อภิปราย แก้ปัญหาและสรุปเป็นความรู้ใหม่ด้วยตนเอง ประกอบด้วยงานทางคณิตศาสตร์ 5 งาน ได้แก่ "นาฬิกาของเรขา" เป็นสถานการณ์ปัญหาให้นักเรียนได้สืบสอบ ถกเถียงและอภิปรายจนสรุปเป็นความรู้ใหม่เกี่ยวกับนิยามและส่วนประกอบของวงกลม "ห่างเท่าไหร่" เป็นงานทางคณิตศาสตร์ให้ร่วมกันสืบสอบและแก้ปัญหาโดยใช้ความรู้เดิมเรื่องระยะทางระหว่างจุดสองจุด อภิปรายจนสรุปเป็นความรู้ใหม่เกี่ยวกับสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม "จากรูปแบบมาตรฐาน สู่รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม" เป็นปัญหาให้นักเรียนร่วมกันแก้ปัญหาโดยการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ในสมการรูปแบบมาตรฐาน ร่วมกันวิเคราะห์ และอภิปรายทั้งชั้นเรียนเกี่ยวกับ ความแตกต่างของสมการรูปแบบมาตรฐานและรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม "ช่วยเหลือนักท่องเที่ยว" และ "ระบบสปริงเกอร์ของโรงเรียน" เป็นสถานการณ์ปัญหา ที่ต้องให้ความรู้เกี่ยวกับวงกลมในการแก้ไขสถานการณ์ ทั้งนี้ยังมีกิจกรรมสืบสอบทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ปริศนาอัศจรรย์ครอปเซอร์เคิล (Crop cricle) ให้นักเรียนสืบสอบเกี่ยวกับปรากฏการณ์ดังกล่าว มอบหมายให้นักเรียนได้ศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมนอกห้องเรียน

1.2 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง วงรี เป็นกิจกรรมการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยกำหนดงานทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับวงรีให้นักเรียนได้ศึกษา วิเคราะห์ โดยมีจุดมุ่งหมายให้นักเรียนได้เรียนรู้แบบสืบสอบผ่านกระบวนการสำรวจ อภิปราย แก้ปัญหาและสรุปเป็นความรู้ใหม่ด้วยตนเอง

ประกอบด้วยงานทางคณิตศาสตร์ 5 งาน ได้แก่ "พับ เพื่อรู้จักวงรี" เป็นกิจกรรมการลงมือปฏิบัติ (hands-on) ให้นักเรียนลงมือพับกระดาษตามขั้นตอนที่ครูกำหนด ร่วมกันสังเกต อภิปรายและวิเคราะห์รอบพับที่เกิดเป็นวงงรี ครูใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนร่วมกันคิดและอธิบายจนสรุปเป็นความรู้ใหม่เกี่ยวกับนิยามและส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรี "เรามาหาสมการวงรีกันดีกว่า" เป็นงานทางคณิตศาสตร์ให้ร่วมกันสืบสอบและแก้ปัญหาโดยใช้ความรู้เดิมเรื่องนิยามของวงรีและการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด อภิปรายจนสรุปเป็นความรู้ใหม่เกี่ยวกับสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี "วงรีที่เปลี่ยนรูปร่าง" เป็นงานทางคณิตศาสตร์ที่ให้นักเรียนตั้งสมมติฐาน ถึงสมการของวงรีที่มีแกนเอกขนานกับแกน y แล้วร่วมกันสืบสอบ แก้ปัญหาและอภิปราย เพื่อพิสูจน์สมมติฐานที่ตั้งไว้ นักเรียนและครูร่วมกันอภิปรายสรุปอีกครั้งหนึ่ง "วงรี ที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h,k)" เป็นงานทางคณิตศาสตร์ ให้นักเรียนได้สืบสอบและอภิปรายเกี่ยวกับพิกัดของจุดบนวงรีที่เกิดจากการเลื่อนขนานวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดไปยังพิกัด (h,k) ใด ๆ ร่วมกันสร้างสมมุติฐานเกี่ยวกับสมการวงรี ที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h,k) อภิปรายและแก้ปัญหา เพื่อตรวจสอบสมมติฐานที่สร้างขึ้น "สะพานโค้ง ในสนามเด็กเล่น" เป็นสถานการณ์ปัญหา ที่ต้องให้ความรู้เกี่ยวกับวงรีในการแก้ไขสถานการณ์และให้เหตุผลสนับสนุนการตอบ นอกจากนี้ยังมีกิจกรรมสืบสอบทางคณิตศาสตร์ เรื่อง วงรีสลายนิ่ว ให้นักเรียนสืบสอบเกี่ยวกับการใช้สมบัติของวงรีในการสร้างเครื่องสลายนิ่ว (ESWL)

1.3 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง พาราโบลา เป็นกิจกรรมการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยกำหนดงานทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับพาราโบลาให้นักเรียนได้ศึกษา วิเคราะห์ โดยมีจุดมุ่งหมายให้นักเรียนได้เรียนรู้แบบสืบสอบผ่านกระบวนการสำรวจ อภิปราย แก้ปัญหาและสรุปเป็นความรู้ใหม่ด้วยตนเอง ประกอบด้วยงานทางคณิตศาสตร์ 5 งาน ได้แก่ "พับ เพื่อรู้จักพาราโบลา" เป็นกิจกรรมการลงมือปฏิบัติ (hands-on) ให้นักเรียนลงมือพับกระดาษตามขั้นตอนที่ครูกำหนด ร่วมกันสังเกต อภิปรายและวิเคราะห์รอบพับที่เกิดเป็นพาราโบลา ครูใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนร่วมกันคิดและอธิบายจนสรุปเป็นความรู้ใหม่เกี่ยวกับนิยามและส่วนประกอบต่าง ๆ ของพาราโบลา "เรามาหาสมการพาราโบลากันดีกว่า" เป็นงานทางคณิตศาสตร์ให้ร่วมกันสืบสอบและแก้ปัญหาโดยใช้ความรู้เดิมเรื่องนิยามของพาราโบลาและการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด อภิปรายจนสรุปเป็นความรู้ใหม่เกี่ยวกับสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลา "พาราโบลาที่มีจุดยอดที่ (0,0)" เป็นงานทางคณิตศาสตร์ ให้นักเรียนได้สืบสอบและอภิปรายในกลุ่มเล็กเกี่ยวกับพาราโบลาที่มีจุดยอดที่ (0,0) ความแตกต่างของสมการพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่บนแกน x และ โฟกัสอยู่บนแกน y ร่วมกันสืบสอบและแก้ปัญหาโดยใช้ความรู้เดิม อภิปรายจนสรุปเป็นความรู้ใหม่เกี่ยวกับสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาในลักษณะต่าง ๆ และยาวเส้นลาตัสเรคตัม "พาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h,k)"

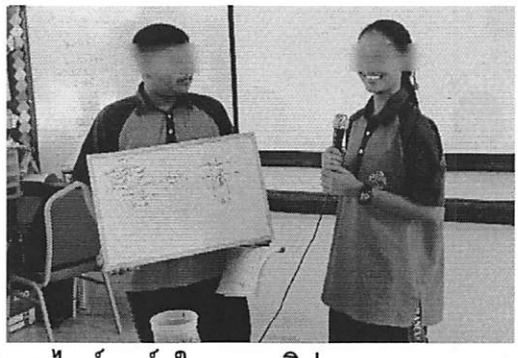
เป็นงานทางคณิตศาสตร์ ให้นักเรียนได้สืบสอบและอภิปรายเกี่ยวกับพิกัดของจุดบนพาราโบลาที่เกิดจากการเลื่อนขนานพาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดไปยังพิกัด (h,k) ใด ๆ ร่วมกันสร้างสมมุติฐานเกี่ยวกับสมการพาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h,k) อภิปรายและแก้ปัญหา เพื่อตรวจสอบสมมติฐานที่สร้างขึ้น "มรดกสร้างอาชีพ" เป็นงานทางคณิตศาสตร์ ให้นักเรียนได้สืบสอบการใช้ประโยชน์ของพาราโบลาในชีวิตจริง จากคลิปวิดีโอ จากนั้นให้นักเรียนออกแบบชิ้นงานที่ใช้ประโยชน์ของพาราโบลา และอธิบายเหตุผลในการสร้างชิ้นงานของตนเอง นอกจากนี้ยังมีกิจกรรมสืบสอบทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลุงเหลือ ยอดนักประดิษฐ์สติเฟื่อง ให้นักเรียนสืบสอบและอภิปรายเกี่ยวกับการใช้สมบัติของพาราโบลาในการสร้างจานรับสัญญาณดาวเทียมของลุงเหลือ

2. การเตรียมเอกสาร

ผู้วิจัยจัดเตรียมเอกสารโดยจำแนกเป็น 3 ส่วน ได้แก่ ส่วนที่ 1 เอกสารสำหรับผู้วิจัยประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้ แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ พร้อมเกณฑ์การประเมินความสามารถในการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ส่วนที่ 2 เอกสารสำหรับ ผู้ร่วมสังเกตการจัดการเรียนรู้ ประกอบด้วย แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ และส่วนที่ 3 เอกสารสำหรับผู้เข้าร่วมวิจัยหรือนักเรียน ประกอบด้วย ใบกิจกรรม และแบบทดสอบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์

3. การเตรียมสถานที่หรือห้องเรียน

การจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ จะเป็นลักษณะกิจกรรมกลุ่ม 4 – 5 คน ซึ่งจะใช้โต๊ะเรียนแบบกลุ่มของห้องปฏิบัติการคณิตศาสตร์ เพื่อสะดวกต่อการเข้ากลุ่มและการดำเนินการตามแผนการจัดการเรียนรู้ และในช่วงท้ายของการจัดกิจกรรมตัวแทนนักเรียนจะนำเสนอผลการแก้ปัญหาหรือการนำเสนอแนวคิดเกี่ยวกับงานทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้จัดเตรียมปากกาและกระดานไวท์บอร์ดขนาด 50 × 70 ซ.ม. สำหรับเขียนทดเลข หรือการนำเสนอตัวแทนความคิดเพื่อทำความเข้าใจปัญหา ดำเนินการแก้ปัญหา และสรุปความสมเหตุสมผลของคำตอบร่วมกันในกลุ่ม นอกจากนี้ผู้วิจัยได้จัดเตรียมเครื่องฉายทึบแสง และไมโครโฟนไว้ สำหรับอำนวยความสะดวกให้กับนักเรียนตามความเหมาะสม



ภาพ 6 แสดงการใช้กระดานไวท์บอร์ดในการอภิปรายและการแสดงแนวคิด ในห้องเรียน

ขั้นที่ 2 ขั้นปฏิบัติการ (Act)

ขั้นปฏิบัติการเป็นการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ใช้ระยะเวลา 5 ชั่วโมง มีรายละเอียดแต่ละขั้นดังนี้

ขั้นการปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์การเรียนรู้และการทำงานทางคณิตศาสตร์

ขั้นการปฏิบัตินี้เป็นขั้นการปฏิบัติที่เกิดขึ้นนอกห้องเรียน ก่อนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยผู้วิจัยต้องออกแบบหรือคัดเลือกงานทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับวงกลม ที่ต้องอาศัยความรู้ความเข้าใจและทักษะทางคณิตศาสตร์ในการทำงาน และคาดการณ์พฤติกรรมการเรียนรู้และการตอบสนองของนักเรียนต่องานทางคณิตศาสตร์นั้น รวมถึงคาดการณ์วิธีคิดและข้อผิดพลาดของนักเรียนที่เกิดจากการทำงานทางคณิตศาสตร์

ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์

ขั้นการปฏิบัตินี้ผู้วิจัยนำเสนองานทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับวงกลม ด้วยวิธีการที่น่าสนใจและท้าทายให้นักเรียนมีส่วนร่วมกับกิจกรรม และกระตุ้นให้นักเรียนทำความเข้าใจเงื่อนไขสำคัญต่าง ๆ และปัญหาของงานทางคณิตศาสตร์นั้น

ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

ขั้นนี้นักเรียนภายในกลุ่มร่วมกันระดมสมองและแลกเปลี่ยนการเรียนรู้ เพื่อพิจารณาให้ความเห็น สนับสนุน โต้แย้ง และตัดสินใจเลือกแนวคิดหรือวิธีการแก้ปัญหา รวมทั้งระบุเหตุผลที่เหมาะสม เพื่อนำมาใช้แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จนได้คำตอบของปัญหา ผู้วิจัยคอยกำกับและติดตามแนวคิดหรือวิธีการรวมถึงพฤติกรรมการเรียนรู้ต่าง ๆ ขณะที่นักเรียนลงมือทำงานทางคณิตศาสตร์ โดยเน้นใน 3 เรื่อง ได้แก่ (1) ความรู้เดิมทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ (2) แนวคิดหรือวิธีการที่นำมาใช้ และ (3) พฤติกรรมการเรียนรู้ที่นักเรียนแสดงออกต่องานทางคณิตศาสตร์ รวมถึงจดบันทึกแนวคิดหรือวิธีการต่าง ๆ ที่น่าสนใจเพื่อนำไปคัดเลือกและกำหนดเป็นประเด็นการอภิปราย

ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน

ขั้นนี้ผู้วิจัยคัดเลือกแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียนจากข้อมูลที่ได้บันทึกในขั้นการปฏิบัติที่ 3 เพื่อกำหนดเป็นประเด็นการอภิปรายโดยเลือกให้ครอบคลุมทั้งแนวคิดหรือวิธีการทั้งที่ถูกต้องและมีข้อผิดพลาด รวมถึงแนวคิดหรือวิธีการที่หลากหลาย ซึ่งเพียงพอในการสรุปเป็นความรู้ใหม่

ขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่

ขั้นนี้นักเรียนนำเสนอและอธิบายแนวคิดหรือวิธีการของตนเองหรือกลุ่มตามลำดับที่ครูกำหนดไว้ใน นักเรียนได้อภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียนเพื่อแลกเปลี่ยนความรู้ แนวคิดหรือวิธีการ และเหตุผลเพื่อหาข้อสรุปในแต่ละประเด็น ผู้วิจัยใช้คำถามเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนพิจารณาเปรียบเทียบแนวคิดหรือวิธีการจากข้อสรุปต่าง ๆ และเชื่อมโยงไปสู่การสรุปเป็นความรู้ใหม่

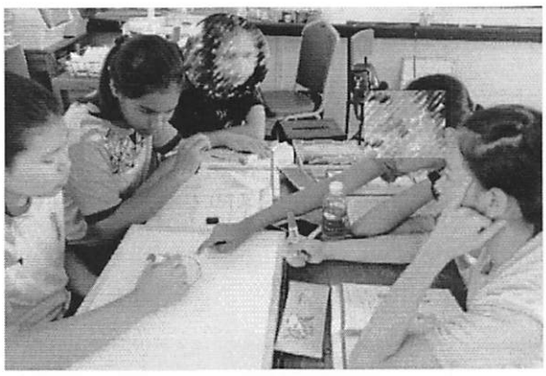
3. **ขั้นสังเกตการณ์** (Observe)

ขั้นสังเกตการณ์เป็นการเก็บรวบรวมข้อมูลระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ โดยเก็บรวบรวมข้อมูลจากแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัยและผู้ร่วมสังเกตการจัดการเรียนรู้ และเก็บรวบรวมข้อมูลจากการทำใบกิจกรรมเป็นรายกลุ่ม โดยมีประเด็นดังนี้

จากการสังเกตของผู้วิจัยขณะทำการจัดการเรียนรู้สามารถบรรยายถึงสภาพบรรยากาศในชั้นเรียน รวมทั้งปัญหาและอุปสรรคที่พบจากการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ โดยมีรายละเอียดแต่ละขั้นดังนี้

ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์

เมื่อนักเรียนศึกษาสถานการณ์ปัญหา “นาฬิกาของเรขา” พบว่า หลังจากที่ได้อ่านสถานการณ์ปัญหาแล้ว นักเรียนแต่ละกลุ่มมีความตั้งใจและให้ความสนใจในการศึกษาสถานการณ์ที่ได้รับ โดยนักเรียนบางกลุ่มร่วมกันอ่านสถานการณ์ นักเรียนบางกลุ่มมอบหมายให้ตัวแทนอ่านสถานการณ์ที่ได้รับให้สมาชิกในกลุ่มฟัง นักเรียนบางกลุ่มแสดงร่องรอยการขีดเขียนวาดรูปลงในกระดาน หรือลองพิจารณาลักษณะของนาฬิกาของจริง ดังภาพ 9 จากนั้นนักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันตอบคำถามและอภิปรายข้อเท็จจริงร่วมกับผู้วิจัย ดังภาพ 7



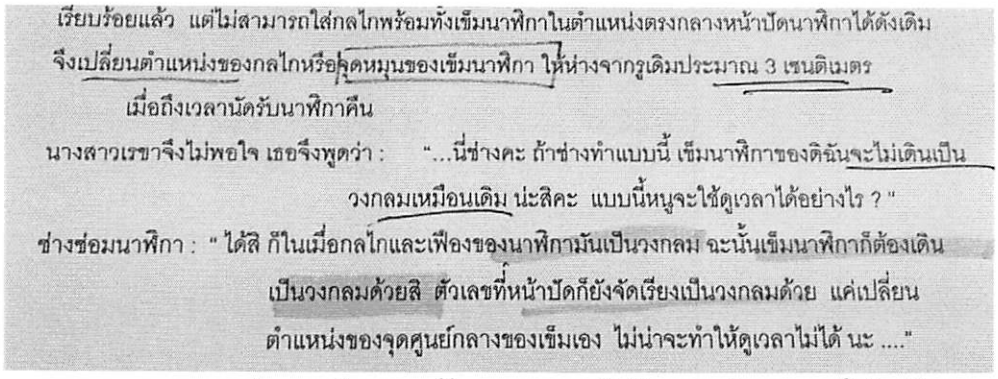
ภาพ 7 แสดงการศึกษาสถานการณ์ปัญหาของกลุ่มนักเรียน

ภาพ 9 แสดงการนำการนำเสนอตัวแทนความคิดในการทำความเข้าใจปัญหา

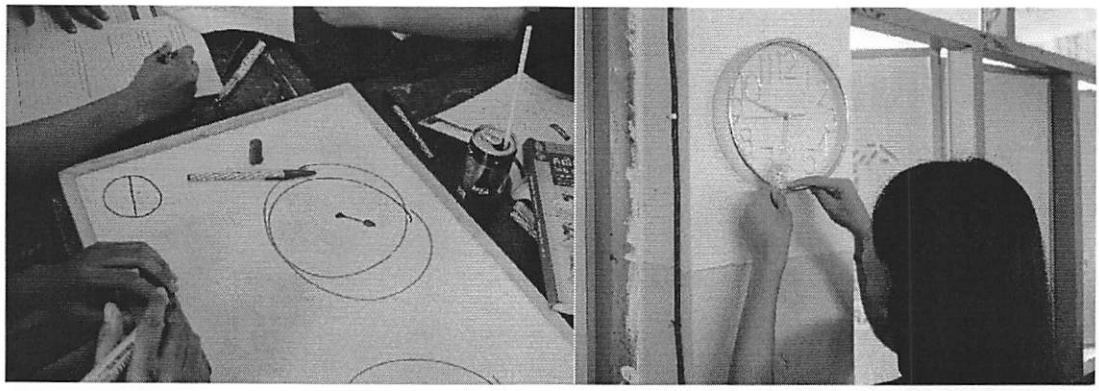
นอกจากนี้จากแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนนรู้ของผู้วิจัยพบปัญหาคือ ระยะเวลาสำหรับการอภิปรายเพื่อสรุปรวบยอดไม่เพียงพอ เนื่องจากงานทางคณิตศาสตร์ที่ให้นักเรียนทำมีความซับซ้อนและต้องใช้เวลาอภิปรายในกลุ่มเล็ก

จากภาพ 7 เป็นภาพกิจกรรมกลุ่มที่นักเรียนกำลังอ่านและร่วมกันวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา แสดงให้เห็นถึงความตั้งใจและสนใจในการทำความเข้าใจปัญหา และจากการวิเคราะห์การจัดการเรียนรู้ในขั้นนี้ พบว่า ในชั่วโมงแรกนักเรียนเข้าใจว่าสถานการณ์ที่กำหนดให้มีคำตอบที่ถูกต้องเพียงคำตอบเดียว เนื่องจากไม่คุ้นชินกับกับสถานการณ์ปัญหาปลายเปิด จึงยกมือซักถามผู้วิจัยเพื่อให้ผู้วิจัยช่วยอธิบายเพิ่มเติมเกี่ยวกับเงื่อนไขของปัญหา ซึ่งผู้วิจัยได้ใช้คำถามร่วมอภิปรายกับนักเรียนเพื่อให้นักเรียนได้แสดงเหตุผลในการทำความเข้าใจปัญหา

นักเรียนทุกกลุ่มยังทำความเข้าใจปัญหาโดยการขีดเขียน วาดรูป หรือขีดเส้นใต้ข้อเท็จจริงและคำสำคัญ (Keyword) ในใบกิจกรรม จากนั้นนักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันตอบคำถามและอภิปรายข้อเท็จจริงร่วมกับผู้วิจัย ดังภาพ 7 และ ภาพ 8


เรียบร้อยแล้ว แต่ไม่สามารถใส่กลไกพร้อมทั้งเข็มนาฬิกาในตำแหน่งตรงกลางหน้าปัดนาฬิกาได้ดังเดิม
จึงเปลี่ยนตำแหน่งของกลไกหรือจุดหมุนของเข็มนาฬิกา ให้ห่างจากรูเดิมประมาณ 3 เซนติเมตร
เมื่อถึงเวลานัดรับนาฬิกาคืน
นางสาวเรขาจึงไม่พอใจ เธอจึงพูดว่า : "...นี่ช่างคะ ถ้าช่างทำแบบนี้ เข็มนาฬิกาของดิฉันจะไม่เดินเป็น
วงกลมเหมือนเดิม น่ะสิคะ แบบนี้หนูจะใช้ดูเวลาได้อย่างไร ?"
ช่างซ่อมนาฬิกา : " ได้สิ ก็ในเมื่อกลไกและเฟืองของนาฬิกามันเป็นวงกลม ฉะนั้นเข็มนาฬิกาก็ต้องเดิน
เป็นวงกลมด้วยสิ ตัวเลขที่หน้าปัดก็ยังจัดเรียงเป็นวงกลมด้วย แค่เปลี่ยน
ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของเข็มเอง ไม่น่าจะทำให้ดูเวลาไม่ได้ นะ ...."

ภาพ 8 แสดงการนำการนำเสนอตัวแทนความคิดในการทำความเข้าใจปัญหา



ภาพ 9 แสดงการนำการนำเสนอตัวแทนความคิดในการทำความเข้าใจปัญหา

นอกจากนี้จากแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนนรู้ของผู้วิจัยพบปัญหาคือ ระยะเวลาสำหรับการอภิปรายเพื่อสรุปรวบยอดไม่เพียงพอ เนื่องจากงานทางคณิตศาสตร์ที่ให้นักเรียนทำมีความซับซ้อนและต้องใช้เวลาอภิปรายในกลุ่มเล็ก

ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

นักเรียนแต่ละกลุ่มได้ร่วมกันสนทนา อภิปรายเกี่ยวกับปัญหา แต่ยังมีนักเรียนบางกลุ่มที่ไม่สามารถนำความรู้เดิมทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้แก้ปัญหาได้ ครูจึงต้องใช้คำถาม เพื่อสนับสนุนช่วยเหลือการทำงานของนักเรียน เช่น

ปัญหา : วงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง C(h,k) และ รัศมียาว r หน่วยจะสร้างสมการที่มีกราฟเป็นรูปวงกลมนี้ ได้อย่างไร

(เมื่อครูสังเกตพบว่ามีนักเรียนบางกลุ่มไม่สามารถแก้ปัญหานี้ได้ ครูจึงใช้คำถาม)

ครู : วงกลมมีสมบัติว่าอย่างไรล่ะ จำได้ไหม

นักเรียน 1 : อ๋อ ระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางถึงขอบมัน จะเท่ากันทุกจุดเลยค่ะ

ครู : อ่ะ แล้วระยะทางระหว่างจุดสองจุดใด ๆ เราคำนวณหาได้ไหม ล่ะ

นักเรียน 1 : ได้ค่ะ เราเรียนมาแล้วอ่ะ

นักเรียน 2 : แล้วจะใช้ x ใช้ y ของจุดตรงไหน แทนในสูตรล่ะคะ

ครู : เอ้า ก็จากโจทย์ เห็นม่ะ ? จุดศูนย์กลางเค้ากำหนดให้รึยัง ?

นักเรียน 2 : อ่อ ส่วนอีกจุดนึงก็คือจุด (x,y) จุดไหนก็ได้ขอบขอบของวงกลมใช่ไหมคะ

ครู : ใช่แล้วจ้า แต่ทำไมเธอถึงจะใช้จุดไหนก็ได้ล่ะ ?

นักเรียน 1: ก็เพราะว่า วงกลมอ่ะ รัศมีมันเท่ากันทุกเส้นนั่นแหละ ไม่ว่าเราจะใช้จุดไหน มันก็ยาวเท่ากันหมด เพราะมันเป็นวงกลม อ่ะ

(แล้วนักเรียนก็ลงมือดำเนินการแก้ปัญหาต่อไป)

ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน

ผู้วิจัยได้จัดลำดับการอภิปราย โดยให้นักเรียนได้พูดอภิปรายงานของตนเองทุกกลุ่ม โดยให้นักเรียนกลุ่มที่มีแนวคิดหรือวิธีการทั้งที่ถูกต้องและมีข้อผิดพลาดน้อย ได้นำอภิปรายก่อน ทำให้นักเรียนกลุ่มหลัง ๆ ได้มีโอกาสพัฒนาแนวคิดหรือคำตอบของกลุ่มให้มีความสมบูรณ์มากขึ้น

ขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่

นักเรียนนำเสนอและอธิบายแนวคิดและเหตุผลหรือผลจากการทำงานกลุ่ม ในลักษณะการนำเสนองานการแก้โจทย์ปัญหาหน้าชั้นเรียนเท่านั้น ผู้วิจัยได้ชี้แนะโดยการใช้คำถาม

ให้นักเรียนเกิดการอภิปรายเพื่อนำไปสู่แนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่ เช่น "เห็นด้วยกับแนวคิดของเพื่อนหรือไม่" "สิ่งที่เพื่อนพูด มีอะไรขาดหายไปไหม" "ถ้าจะเพิ่มเติมแนวคิดของเพื่อนให้ดีขึ้นจะเพิ่มเติมอย่างไร" ทำให้นักเรียนฝ่ายที่เป็นผู้ฟังได้แสดงแนวคิดสนับสนุนหรือโต้แย้งกับผู้อภิปราย

4. ขั้นสะท้อนผลการปฏิบัติ (Reflect)

ผู้วิจัยได้สรุปปัญหาที่พบในชั้นเรียนขณะจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ และแนวทางการปรับปรุงขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ของวงจรปฏิบัติการที่ 1 สำหรับพัฒนาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการที่ 2 ให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น ดังแสดงในตาราง 14

ตาราง 14 สรุปปัญหาที่พบในชั้นเรียนและแนวทางการปรับปรุงในแต่ละขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ของวงจรปฏิบัติการที่ 1

ขั้นการปฏิบัติ	ปัญหาที่พบ	แนวทางการปรับปรุง
ขั้นการปฏิบัติที่ 1	งานทางคณิตศาสตร์ในใบกิจกรรมเป็นงานที่ไม่ส่งเสริมให้เกิดการอภิปรายหรือทำให้นักเรียนแสดงแนวคิดที่หลากหลายในการแก้ปัญหา	1. พัฒนาปัญหาให้เน้นการใช้คำถามปลายเปิดหรือมีวิธีการหาคำตอบที่หลากหลาย เพื่อให้นักเรียนได้ใช้แนวคิดหรือกลวิธีในการแก้ปัญหาได้อย่างหลากหลาย 2. พัฒนาปัญหาให้นักเรียนร่วมกันสร้างสมมติฐานและตรวจสอบสมมติฐาน โดยใช้ข้อมูลทางคณิตศาสตร์หรือความรู้เดิม
ขั้นการปฏิบัติที่ 2	นักเรียนส่วนใหญ่ไม่เข้าใจสถานการณ์จากใบกิจกรรม	ครูควรช่วยอธิบายงาน หรือปัญหา ให้นักเรียนเกิดความเข้าใจมากยิ่งขึ้น

ตาราง 14 (ต่อ)

ขั้นการปฏิบัติ	ปัญหาที่พบ	แนวทางการปรับปรุง
ขั้นการปฏิบัติที่ 3	นักเรียนไม่สามารถนำความรู้เดิมทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้แก้ปัญหาได้	ครูต้องใช้คำถาม ชี้แนะ หรือยกตัวอย่างเพื่อสนับสนุนช่วยเหลือการทำงานและการแก้ปัญหาของนักเรียน
ขั้นการปฏิบัติที่ 4	นักเรียนบางกลุ่มที่มีแนวคิดที่คล้ายกัน เมื่อจัดให้นักเรียนได้อภิปรายครบทุกกลุ่ม ทำให้ระยะเวลาไม่เพียงพอ	ครูควรเลือกงานของนักเรียนที่ช่วยให้เกิดการอภิปรายเชิงคณิตศาสตร์ตามวัตถุประสงค์ของบทเรียน โดยไม่ต้องให้นักเรียนเสนอผลงานครบทุกกลุ่ม
		ครูควรคัดเลือกและออกแบบงานทางคณิตศาสตร์ให้เหมาะสมกับระยะเวลาในการจัดกิจกรรม
ขั้นการปฏิบัติที่ 5	นักเรียนบางกลุ่มไม่ได้นำเสนอ เนื่องจากเวลาไม่ เพียงพอสำหรับการจัดกิจกรรม	ครูควรให้ตัวแทนกลุ่มที่มีแนวคิดหรือวิธีการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันออกมานำเสนอ เพื่อให้นักเรียนในชั้นเรียนได้เรียนรู้ผลการแก้ปัญหาด้วยแนวคิดที่หลากหลาย และเป็นการประหยัดเวลาในการแสดงแนวคิดที่เพื่อนนำเสนอไปแล้ว
	นักเรียนนำเสนอและอธิบายแนวคิดหรือผลจากการทำงานกลุ่ม ในลักษณะการนำเสนอการแก้โจทย์ปัญหาหน้าชั้นเรียน เท่านั้น ไม่เกิดการอภิปรายทางคณิตศาสตร์	ครูควรใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนได้เปรียบเทียบความคล้ายคลึงหรือความแตกต่างของแนวคิดทางคณิตศาสตร์
		ครูควรช่วยอำนวยการอภิปรายในชั้นเรียนโดยชี้แนะหรือแนะนำ ให้นักเรียนได้เชื่อมโยงความเหมือน ความต่างของงานแต่ละกลุ่ม จนนักเรียนสามารถสรุปเป็นความรู้ใหม่ด้วยตนเอง

วงจรปฏิบัติการที่ 2 เรื่อง วงรี

จากผลการสะท้อนผลการปฏิบัติในวงจรปฏิบัติการที่ 1 ทำให้ผู้วิจัยได้แนวทางการปรับปรุงและพัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ที่ส่งเสริมทักษะการคิดเชิงคณิตศาสตร์ โดยมีรายละเอียดในการดำเนินกิจกรรม ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นวางแผน (Plan)

ผู้วิจัยนำผลการสะท้อนการจัดการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการที่ 1 มาปรับปรุงแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง วงรี เพื่อให้การจัดการเรียนรู้บรรลุตามวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้ ซึ่งผู้วิจัยได้คัดเลือกและพัฒนางานทางคณิตศาสตร์ให้มีความชัดเจนมากยิ่งขึ้นรวมทั้งพยายามกระตุ้นให้นักเรียนร่วมระดมความคิดเพื่อแก้ปัญหา แสดงเหตุผล และนำเสนอตัวแทนความคิด ในการทำงานทางคณิตศาสตร์ และนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่น ๆ ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ขั้นการปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์การเรียนรู้และการทำงานทางคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยได้ปรับปรุงงานทางคณิตศาสตร์ในใบกิจกรรม ให้เหมาะสมกับระยะเวลาในการจัดกิจกรรม เพื่อให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการแก้ปัญหามากที่สุด ให้เป็นงานที่ส่งเสริมให้เกิดการอภิปรายหรือแสดงแนวคิดที่หลากหลายในการแก้ปัญหา และสรุปความรู้ด้วยตนเองจากการใช้คำถามหรือการชี้แนะจากครู เนื่องจากการจัดการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการที่ผ่านมา พบว่าระยะเวลาไม่เพียงพอ และในขั้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ นักเรียนส่วนใหญ่นำเสนอผลจากการทำงานกลุ่มหรืออธิบายวิธีการแก้ปัญหาและผลการแก้โจทย์ปัญหาหน้าชั้นเรียนเท่านั้น โดยไม่เกิดการแลกเปลี่ยนแนวคิด การเปรียบเทียบ ความเหมือนหรือความต่างของแนวคิด ผู้วิจัยจึงปรับเปลี่ยนแนวทางการอภิปรายงานทางคณิตศาสตร์ โดยการให้นักเรียนได้ทดลองตั้งสมมติฐานเกี่ยวกับปัญหาขึ้น และร่วมกันตรวจสอบสมมติฐานที่สร้างขึ้นว่าจริงหรือไม่ เพื่อให้นักเรียนได้แสดงแนวคิด แสดงการให้เหตุผลเพื่อทำความเข้าใจปัญหา การดำเนินการแก้ปัญหา และสรุปคำตอบ ได้อย่างชัดเจนมากยิ่งขึ้น

ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยได้ปรับรูปแบบการนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ โดยเพิ่มการช่วยอธิบายและทบทวนความรู้เดิมที่จำเป็นต้องใช้ในการทำงาน ให้นักเรียนเกิดความเข้าใจงานทางคณิตศาสตร์ง่ายขึ้น เนื่องจากการจัดการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการที่ผ่านมาพบว่า การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์โดยให้นักเรียนร่วมกันอ่านและศึกษาปัญหาในใบกิจกรรมฝ่ายเดียว ประกอบกับงานทางคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่เป็นปัญหาที่นักเรียนยังไม่มีประสบการณ์หรือความรู้คณิตศาสตร์ที่เพียงพอจะแก้ปัญหานั้นได้ด้วยตนเอง ทำให้นักเรียนไม่สามารถเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ได้ด้วย

ตนเอง ผู้วิจัยจึงพัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้โดยเพิ่มบทบาทในการช่วยอธิบายงานและทบทวนความรู้เดิมที่จำเป็นต้องใช้ในการทำงานทางคณิตศาสตร์

ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

ผู้วิจัยได้ปรับปรุงบทบาทของครูในแผนการจัดการเรียนรู้ให้มีความชัดเจนมากขึ้น เนื่องจากการกำกับและติดตามแนวคิดหรือวิธีการรวมถึงพฤติกรรมการเรียนรู้ต่าง ๆ ขณะที่นักเรียนลงมือทำงานทางคณิตศาสตร์ในวงจรปฏิบัติการที่ผ่านมานั้นมิได้กำหนดให้ครูต้องใช้คำถามหรือคำแนะนำเพื่อสนับสนุนช่วยเหลือการทำงานและการแก้ปัญหาของนักเรียน โดยเน้นเพียง 3 เรื่อง ได้แก่ (1) ความรู้เดิมทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ถูกต้องหรือไม่ หากพบว่าไม่ถูกต้องครูดำเนินการแก้ไข (2) แนวคิดหรือวิธีการที่นำมาใช้เหมาะสมหรือไม่ และ (3) พฤติกรรมการเรียนรู้ที่นักเรียนแสดงออกต่องานทางคณิตศาสตร์

ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน

เนื่องจากในวงจรปฏิบัติการที่ผ่านมาพบว่า ระยะเวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้บางชั่วโมงไม่เพียงพอ เกิดจากครูให้นักเรียนได้นำเสนองานครบทุกกลุ่มและมีบางกลุ่มที่เลือกแนวคิดหรือวิธีการแก้ปัญหาที่เหมือนกับกลุ่มที่ออกมานำเสนอแล้ว และพบว่านักเรียนในชั้นเรียนจะไม่สนใจฟังการนำเสนอเท่าที่ควร ดังนั้นผู้วิจัยจึงปรับบทบาทของครูด้วยการเลือกงานของนักเรียนที่ช่วยให้เกิดการอภิปรายตามวัตถุประสงค์ของบทเรียน โดยไม่ต้องให้นักเรียนนำเสนอผลงานครบทุกกลุ่ม โดยการสุ่มเลือกตัวแทนกลุ่มที่เลือกแนวคิดหรือวิธีการแก้ปัญหาที่แตกต่างกัน

ขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่

ผู้วิจัยได้พัฒนาแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการที่ 2 เรื่องวงรี ในขั้นปฏิบัติการที่ 5 โดยการเพิ่มบทบาทมีส่วนร่วมของนักเรียนในการอภิปรายทั้งชั้นเรียนมากขึ้น เช่น การใช้คำถามกระตุ้นความคิดของนักเรียนที่ฟังเพื่อนอภิปราย เพื่อให้นักเรียนได้แสดงแนวคิดผ่านการพูด ครูควรตั้งประเด็นคำถามที่ซับซ้อนเพื่อให้นักเรียนได้ใช้ความคิด เหตุผลและความรู้ทางคณิตศาสตร์มาอภิปรายร่วมกันในชั้นเรียน เช่น เห็นด้วยกับสิ่งที่เพื่อนอธิบายหรือไม่ เพราะเหตุใด มีกลุ่มไหนจะเพิ่มเติมสิ่งที่เพื่อนพูดไหม เป็นต้น และวางแผนการเพิ่มบทบาทของนักเรียนในการอภิปรายทั้งชั้นเรียนให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมมากขึ้น

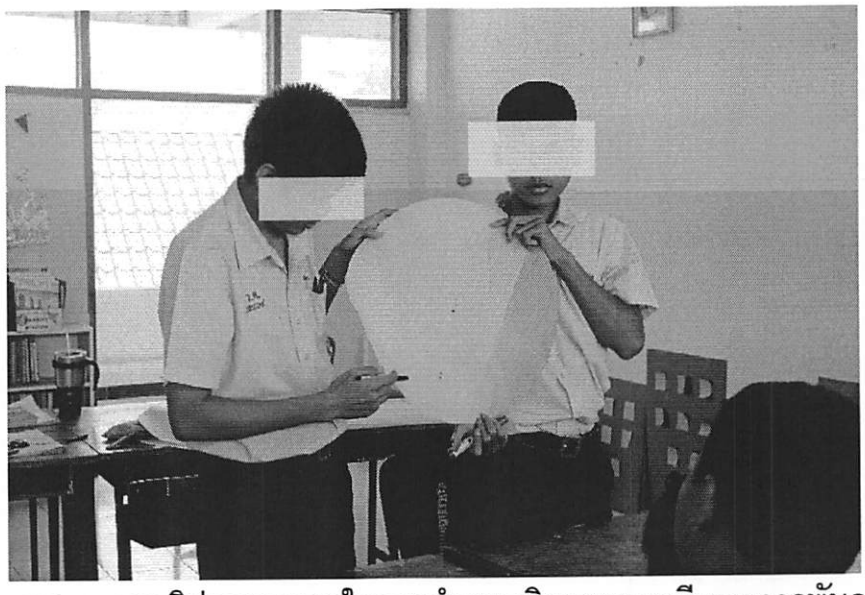
ขั้นที่ 2 ขั้นปฏิบัติการ (Action)

จากการวางแผนโดยนำผลการสะท้อนการจัดการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการที่ 1 มาปรับปรุงและพัฒนาการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัยในวงจรปฏิบัติการที่ 2 ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น

โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง วงรี ใช้เวลาจำนวน 5 ชั่วโมง ประกอบด้วยขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ ต่อไปนี้

ขั้นการปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์การเรียนรู้และการทำงานทางคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยได้ออกแบบและคัดเลือกงานทางคณิตศาสตร์ในใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง วงรี ให้เหมาะสมกับระยะเวลาในการจัดกิจกรรม เพื่อให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการแก้ปัญหามากที่สุด และเน้นงานที่ส่งเสริมให้เกิดการอภิปรายหรือแสดงแนวคิดที่หลากหลายในการแก้ปัญหา ให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติ ร่วมคิดร่วมแสดงความเห็นและเหตุผล และสรุปความรู้ด้วยตนเองจากการใช้คำถามหรือการชี้แนะจากครู เช่น กิจกรรมพับเพื่อรู้จักวงรี เป็นกิจกรรมที่ลงมือปฏิบัติ (Hand on) พับกระดาษตามที่และให้นักเรียนอภิปรายเพื่อร่วมกันกำหนดนิยามของวงรี ดังภาพ 10



ภาพ 10 แสดงการอภิปรายเหตุผลในการกำหนดนิยามของวงรี จากการพับกระดาษ

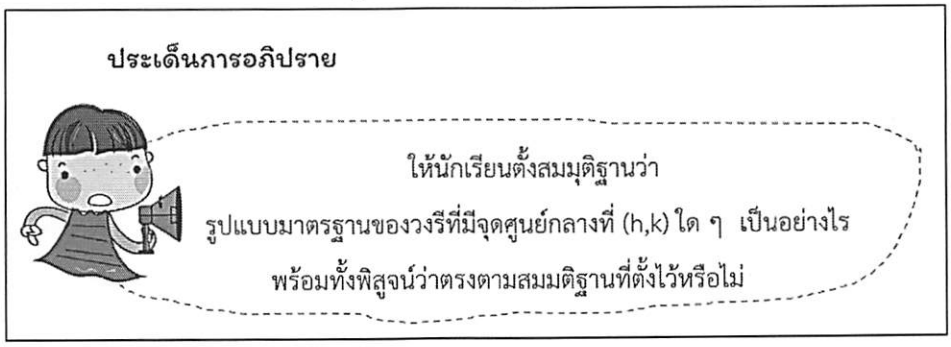
งานทางคณิตศาสตร์ เรื่องนิยามของวงรี

จากกิจกรรม "พับเพื่อรู้จักวงรี" และ การอภิปรายร่วมในกลุ่มย่อย ให้นักเรียนร่วมกันกำหนดนิยามของวงรี อธิบายว่าเพราะเหตุใดจึงให้ความหมายเช่นนั้น วาดภาพประกอบและนำมาอภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียน

นอกจากนี้ผู้วิจัยได้ออกแบบงานทางคณิตศาสตร์ที่ส่งเสริมให้เกิดการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ การแก้ปัญหา การให้เหตผลประกอบการทำงาน โดยให้นักเรียนได้ทดลองตั้งสมมติฐานขึ้น และร่วมกันตรวจสอบสมมติฐานที่สร้างขึ้นว่าจริงหรือไม่ เพื่อให้นักเรียนได้แสดง

แนวคิด แสดงการให้เหตุผลเพื่อทำความเข้าใจปัญหา การดำเนินการแก้ปัญหา และสรุปคำตอบ ได้อย่างชัดเจนมากยิ่งขึ้น ดังภาพ 11

งานทางคณิตศาสตร์ เรื่องรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h,k) ใด ๆ



ภาพ 11 ตัวอย่างงานทางคณิตศาสตร์ เรื่อง วงรี

ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยและนักเรียนร่วมกันทบทวนความรู้เดิมก่อนทำกิจกรรม ผู้วิจัยแจกใบกิจกรรมให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันศึกษางานทางคณิตศาสตร์หรือประเด็นในการอภิปรายให้เข้าใจ

ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

ผู้วิจัยแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4–5 คน โดยคละความสามารถและจะต้องมีสมาชิกใหม่ที่ไม่ซ้ำกับวงจรปฏิบัติการที่ผ่านมาอย่างน้อย 2 คน และให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันทำใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง วงรี ครูใช้คำถามหรือคำแนะนำเพื่อสนับสนุนช่วยเหลือการทำงานและการแก้ปัญหาของนักเรียน ในขณะที่นักเรียนลงมือทำงานทางคณิตศาสตร์ โดยคำนึงความรู้เดิมทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ หากพบว่าไม่ถูกต้องครูดำเนินการแก้ไข แนวคิดหรือวิธีการที่นำมาใช้ทำงาน และพฤติกรรมการเรียนรู้ที่นักเรียนแสดงออกต่องานทางคณิตศาสตร์

ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน

ผู้วิจัยใช้เทคนิคการเสริมแรงเพื่อสร้างบรรยากาศการแข่งขันในห้องเรียน โดยการให้คะแนนพิเศษแก่นักเรียนกลุ่มที่อาสามานำเสนอก่อนตามลำดับ เช่น กลุ่มที่อาสามานำเสนอลำดับแรกจะได้คะแนน 20 คะแนน ลำดับที่สองจะได้ 18 คะแนน และ ลำดับที่สามจะได้ 15 คะแนน เป็นต้น และสะสมคะแนนเพื่อแลกกับของรางวัลที่นักเรียนต้องการ เช่น เครื่องเขียน อุปกรณ์การเรียน โดยไม่จำเป็นต้องคัดเลือกและจัดลำดับการนำเสนอจากแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน เนื่องจาก

ในชั้นเรียนมีจำนวนกลุ่มไม่มาก และถ้าให้อภิปรายครบทุกกลุ่มจะทำให้เวลาไม่เพียงพอ อีกทั้งธรรมชาติของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ จะชอบบรรยากาศการแข่งขัน ทำให้การอภิปรายทั้งชั้นเรียนในขั้นการปฏิบัติที่ 5 เป็นไปอย่างราบรื่น และช่วยลดบทบาทการจัดลำดับของครู ทั้งนี้ถ้าไม่มีนักเรียนที่อาสาออกมาอภิปราย ผู้วิจัยสุ่มเลือกตัวแทนกลุ่มที่เลือกแนวคิดหรือวิธีการแก้ปัญหาที่แตกต่างกัน เพื่อออกมานำเสนอหน้าชั้นเรียนแนวคิดละ 1 กลุ่ม

ขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่

ผู้วิจัยจัดให้มีการร่วมกันอภิปรายสะท้อนผล โต้แย้ง และอธิบายถึงผลการแก้ปัญหาเพื่อแลกเปลี่ยนความรู้ และเหตุผลเพื่อหาข้อสรุปในแต่ละประเด็น แต่ถ้าในชั่วโมงที่นักเรียนไม่เกิดการโต้แย้งหรือการโต้ตอบกันระหว่างฝ่ายอภิปรายและฝ่ายฟัง ผู้วิจัยต้องใช้คำถามให้ผู้เรียนได้เปรียบเทียบความคล้ายคลึงหรือความแตกต่างของแนวคิดทางคณิตศาสตร์ เช่น เห็นด้วยกับสิ่งที่เพื่อนอธิบายหรือไม่ เพราะเหตุใด มีกลุ่มไหนจะเพิ่มเติมสิ่งที่เพื่อนพูดไหม เป็นต้น

ทั้งนี้ผู้วิจัยได้ใช้เทคนิคเพื่อนประเมินเพื่อน เพื่อให้เกิดการอภิปรายโต้แย้ง อย่างมีประสิทธิภาพ โดยจะให้นักเรียนกลุ่มที่ฟังเพื่อนพูดจบแล้ว ประเมินให้คะแนนผลการอภิปรายของเพื่อน โดยครูมีเงื่อนไขว่า นักเรียนจะให้คะแนนเท่าไรก็ได้ และไม่กำหนดเกณฑ์การประเมิน ให้นักเรียนสร้างเกณฑ์การประเมินขึ้นเอง แต่ห้ามให้คะแนนเต็ม (เต็ม 20 คะแนน) เมื่อนักเรียนให้คะแนนเพื่อนแล้ว ครูจะถามถึงว่าเหตุผลว่าทำไมถึงประเมินและให้คะแนนเช่นนั้น ทั้งนี้เพื่อให้เกิดความยุติธรรมและเป็นการสร้างบรรยากาศที่ท้าทายและแข่งขัน นักเรียนจะต้องหมุนเวียนกันประเมินและให้คะแนนเพื่อนทุกกลุ่ม พร้อมทั้งต้องระบุข้อบกพร่องของสิ่งที่เพื่อนอภิปราย บอกเหตุผลหรือเกณฑ์การให้คะแนนได้

ขั้นที่ 3 ขั้นสังเกตการณ์ (Observe)

ขั้นสังเกตการณ์เป็นการเก็บรวบรวมข้อมูลระหว่างการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง วงรี โดยเก็บรวบรวมข้อมูลจากแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัยและผู้ร่วมสังเกตการณ์ และเก็บรวบรวมข้อมูลจากการทำใบกิจกรรมเป็นรายกลุ่มของนักเรียน

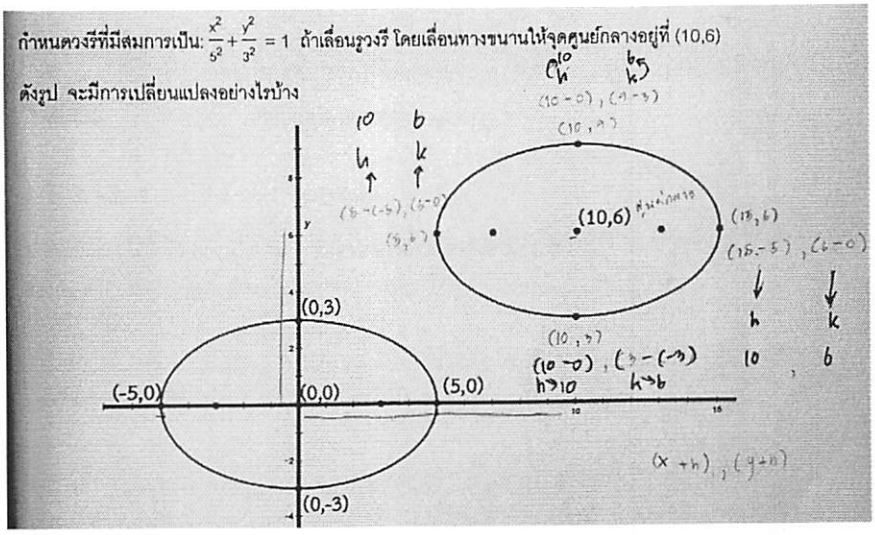
จากการสังเกตของผู้วิจัยขณะทำการจัดการเรียนรู้สามารถบรรยายถึงสภาพบรรยากาศในชั้นเรียน รวมทั้งปัญหาและอุปสรรคที่พบจากการจัดการเรียนรู้ โดยมีรายละเอียดแต่ละขั้นดังนี้

ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์

จากการสังเกตนักเรียนแต่ละกลุ่มขณะนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ โดยผู้วิจัยและนักเรียนร่วมกันทบทวนความรู้เดิมก่อนทำกิจกรรม และให้นักเรียนร่วมกันศึกษาใบกิจกรรมเรื่องวงรี พบว่านักเรียนทุกกลุ่มมีความตั้งใจและให้ความสนใจ เช่นเดียวกับชั่วโมงที่ผ่านมา นักเรียนแต่ละกลุ่มจะอ่านและขีดเขียนเน้นข้อความหรือนำเสนอตัวแทนความคิดลงในใบกิจกรรมและในกระดานไวท์บอร์ดที่ครูเตรียมให้ด้วย แสดงให้เห็นถึงความตั้งใจและสนใจในการทำกิจกรรมของนักเรียน

จากการวิเคราะห์การจัดการเรียนรู้ในขั้นตอนนี้ พบว่า นักเรียนมีคุ้นเคยกับการจัดกิจการเรียนรู้ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ในวงจรปฏิบัติการที่ 2 นี้ โดยมีนักเรียนบางกลุ่มถามผู้วิจัยทันทีหลังจากได้รับใบกิจกรรมว่า "คาบนี้ครูจะให้พูดเรื่องอะไรคะ..." พร้อมทั้งเปิดไปอ่านประเด็นคำถามหรือประเด็นการอภิปราย ก่อนที่ผู้วิจัยจะทบทวนความรู้และอธิบายงานทางคณิตศาสตร์เสร็จสิ้น และในชั่วโมงที่ 4 ของวงจรปฏิบัติการนี้ ผู้วิจัยพบว่า นักเรียนจะเริ่มเข้าใจงานทางคณิตศาสตร์ด้วยศึกษาใบกิจกรรมด้วยตนเอง ผ่านการอภิปรายในกลุ่มย่อย โดยครูไม่จำเป็นต้องทบทวนความรู้และอธิบายงานทางคณิตศาสตร์เพิ่มเติมอีก

แต่ถ้ากลุ่มไหนต้องการความช่วยเหลือ จะยกมือเรียกครูไปอธิบายงานเพิ่มเติมที่กลุ่ม ผู้วิจัยจึงเข้าไปสนทนาอย่างไม่เป็นทางการกับนักเรียนกลุ่มที่ 3 เพื่ออธิบายงานทางคณิตศาสตร์ เกี่ยวกับการเลื่อนขนานจุดในระบบพิกัดฉากกับสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี เนื่องจากการติดตามการทำงานพบว่านักเรียนกลุ่มนี้ ไม่สามารถทำงานได้ด้วยตนเอง ดังตัวอย่างบทสนทนาในขณะที่นักเรียนกำลังทำงานทางในภาพ 12 ดังนี้



ภาพ 12 ตัวอย่างงานทางคณิตศาสตร์ เรื่อง วงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h,k) ใด ๆ

ตัวอย่างบทสนทนาที่ผู้วิจัยคัดสรรมาตอนหนึ่ง ในขณะเข้าไปสนทนาอย่างไม่เป็นทางการกับนักเรียนกลุ่มที่ 3 เพื่ออธิบายงานทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

ผู้วิจัย : จุดศูนย์กลาง (0,0) ย้ายไปอยู่ตำแหน่งใด

นักเรียน : (10,6) ครับ

ผู้วิจัย : ถ้าเรามองเป็นการเลื่อนขนาน สมมุติว่าทุก ๆ จุดบนเส้นตรง x=0 หรือ ทุกจุดบนแกน y เลื่อนไปในแนวนอนตามแกน x เราจะได้ว่า จุด (0,0) เลื่อนไปกี่หน่วย

นักเรียน : 10 หน่วยครับ

ผู้วิจัย: อ่ะ ทีนี้ การเลื่อนตามแนวแกน y เราก็มองเหมือนกันเลยนะครับ จุด (0,0) เลื่อนขึ้นไปกี่หน่วยครับ

นักเรียน : 6 หน่วย ค่ะ

ผู้วิจัย : ทีนี้ ลองดูจุดอื่น ๆ ที่อยู่บนวงรีบ้างนะ ถ้าไม่ใช่จุด (0,0) ล่ะ ถ้าเป็นจุด (-5,0) ล่ะ ? / ถ้าเป็นจุด (0,3) ล่ะ จะมีการเลื่อนขนานไปอย่างไร ลองช่วยกันพิจารณาดู นะ

ผู้วิจัย : นักเรียนลองคุยกันต่อไปนี้ ถ้าครูให้ (10,6) ในโจทย์ แทนด้วย (h,k) แล้วสมการของวงรีรูปใหม่ จะมีความสัมพันธ์อย่างไรกับสมการของวงรีในรูปเดิม

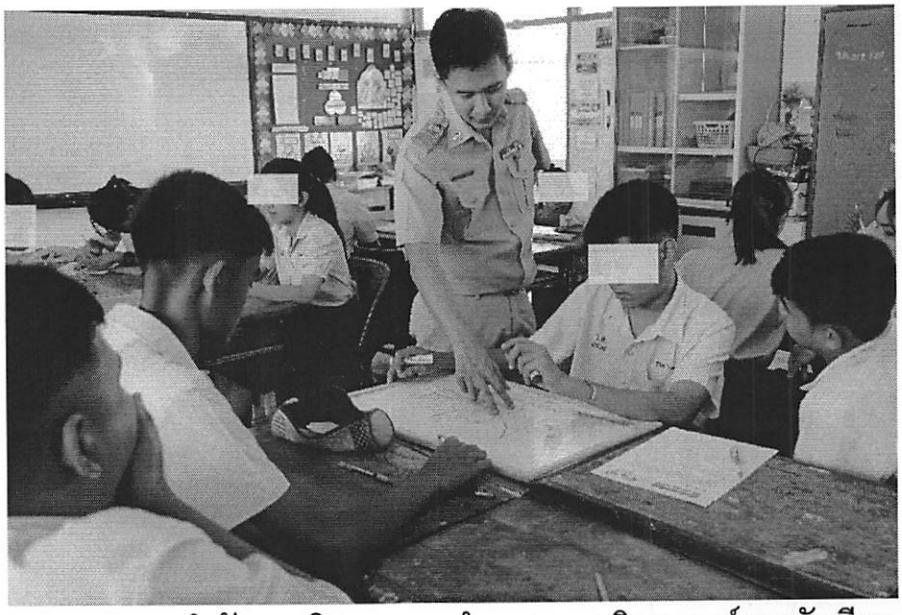
สรุปได้ว่า บทบาทของครูในการนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ จะลดลงเมื่อนักเรียนคุ้นเคยกับการเรียนรู้ที่เน้นการอภิปราย แต่ถ้ายังมีกลุ่มนักเรียนที่ไม่เข้าใจงานหรือไม่สามารถดำเนินการได้ด้วยตนเอง ครูต้องใช้คำถามเพื่อกระตุ้นหรือคำถามเพื่อให้ระลึกถึงข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ ทั้งนี้สิ่งที่สำคัญก็คือใบงานหรือใบกิจกรรมจะต้องใช้คำถามหรือตัวอย่างในลักษณะการอุปนัยเพื่อนำพานักเรียนไปสู่การฝึกการรู้คิด (Metacognition) ได้

ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันอภิปราย แสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับงานทางคณิตศาสตร์และหาแนวทางหรือวิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลาย โดยผู้วิจัยจะให้นักเรียนแต่ละกลุ่มแสดงแนวคิดอย่างอิสระผ่านการเขียนลงบนกระดานไวท์บอร์ด และการพูดอภิปรายในกลุ่ม ผู้วิจัยกำกับและ

ติดตามแนวคิดหรือวิธีการรวมถึงพฤติกรรมการเรียนรู้ต่าง ๆ ขณะที่นักเรียนลงมือทำงานทางคณิตศาสตร์ ได้อย่างทั่วถึงและจะให้คำแนะนำเพิ่มเติมและดำเนินการแก้ไขข้อผิดพลาดในการทำงานของนักเรียน ดังภาพ 13

จากการสังเกตการระดมความคิดของนักเรียนแต่ละกลุ่ม เพื่อหาแนวทางวิธีการแก้ปัญหา และการเรียบเรียงคำพูดสำหรับการอภิปราย พบว่า นักเรียนแต่ละสามารถทำความเข้าใจปัญหา ดำเนินการแก้ปัญหาได้และสรุปผลการแก้ปัญหา เพื่อนำไปอภิปราย ดังภาพ 14



ภาพ 13 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

ภาพ 14 การระดมความคิดของนักเรียนแต่ละกลุ่ม

ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน

จากการที่ผู้วิจัยใช้เทคนิคการเสริมแรงเพื่อสร้างบรรยากาศการแข่งขันในห้องเรียน โดยการให้คะแนนพิเศษแก่นักเรียนกลุ่มที่อาสามานำเสนอก่อน โดยไม่จำเป็นต้องคัดเลือกและจัดลำดับการนำเสนอจากแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน จากการสังเกตพบว่า นักเรียนทุกกลุ่มมีความกระตือรือร้นที่จะพัฒนางานทางคณิตศาสตร์ของตนเอง มีการเตรียมความพร้อมและวางแผนการอภิปราย เพราะมีการประเมินโดยเพื่อน และแย่งกันพูดเป็นลำดับต้นๆ เพราะนักเรียนชอบบรรยากาศการแข่งขัน ทำให้การอภิปรายทั้งชั้นเรียนในขั้นการปฏิบัติที่ 5 เป็นไปอย่างราบรื่น และช่วยลดบทบาทการจัดลำดับของครู เริ่มตั้งแต่ชั่วโมงที่ 3 ของวงจรปฏิบัติการที่ 2 เรื่อง วงรี

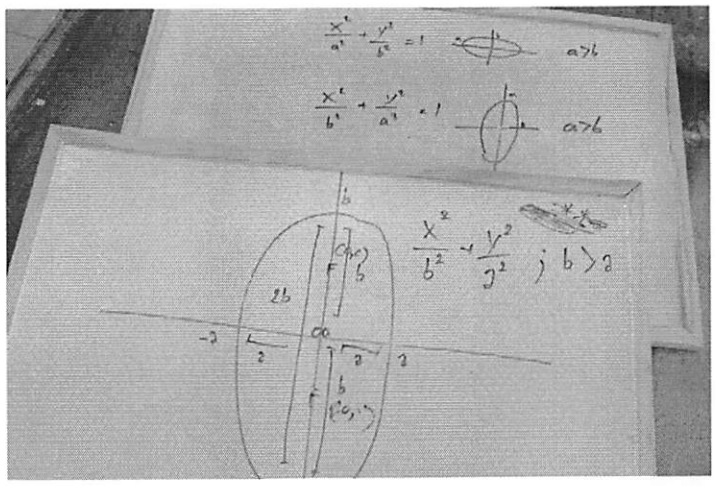
ขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่

จากการที่ผู้วิจัยเริ่มใช้เทคนิคเพื่อนประเมินเพื่อนนั้นผู้วิจัยพบว่าการอภิปรายของนักเรียนทั้งชั้นเรียนมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น ผู้วิจัยและผู้ร่วมสังเกตการณ์ได้สังเกตเห็นตรงกันว่านักเรียนมีส่วนร่วมในการอภิปรายครบทุกกลุ่ม และสิ่งที่นักเรียนอภิปรายนั้นเป็นการอภิปรายขั้นสูงกว่าการอธิบายผลการแก้โจทย์ปัญหาทั่วไป

โดยการโต้แย้ง ทำให้นักเรียนได้แสดงการให้เหตุผล ผ่านการพูด การที่นักเรียนได้ทราบแนวคิดและวิธีการที่แตกต่างหรือแนวคิดที่ช่วยเพิ่มเติมประเด็นการอภิปรายที่ยังไม่สมบูรณ์

การอธิบายเหตุผลในการให้คะแนนระดับต่าง ๆ ทำให้นักเรียนกลุ่มที่ประเมินเพื่อนได้พูดอธิบายแสดงเหตุผลในการแก้ปัญหาและสรุปคำตอบเพิ่มเติมจากที่เพื่อนอภิปราย เพื่อแลกเปลี่ยนความรู้ และแนวคิดเกี่ยวกับงานทางคณิตศาสตร์ ร่วมกัน

แต่ถ้าในชั่วโมงที่นักเรียนไม่เกิดการโต้แย้งหรือการโต้ตอบกันระหว่างทั้งสองฝ่าย ผู้วิจัยจะใช้คำถามให้ผู้เรียนได้เปรียบเทียบความคล้ายคลึงหรือความแตกต่างของแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ดังตัวอย่างใน ภาพ 15



ภาพ 15 ตัวอย่างผลงานที่แสดงแนวคิดที่แตกต่างกันของนักเรียน

หลังจากที่นักเรียนนำเสนอผลงานครบทั้งสองกลุ่มแล้ว ครูใช้คำถามให้ผู้เรียนได้เปรียบเทียบความแตกต่างของแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ของทั้งสองกลุ่ม ดังภาพ 15

ผู้วิจัย : กลุ่มของเอร์ธ นำเสนอ สมการวงรีที่มีแกนเอกขนานกับแกน y
คือ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ โดยที่ a > b
(พร้อมกับวาดรูปนำเสนอตัวแทนความคิดมาด้วย)
ส่วนกลุ่มของปักกิ่งนำเสนอ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ โดยที่ b > a
(พร้อมกับวาดรูปนำเสนอตัวแทนความคิดมาด้วย)
นักเรียนสังเกตเห็นไหมว่า สมการของเพื่อนทั้งสองกลุ่มต่างกันอย่างไร

นักเรียน : คือ วงรีที่มีแกนเอกขนานกับแกน y ตัวส่วนของ y^2
ไม่ว่าจะเป็นตัวแปร a หรือ b จะต้องมีค่ามากกว่า ตัวส่วนของ x^2
แน่นอนค่ะ

ขั้นที่ 4 ขั้นสะท้อนผลการปฏิบัติ (Reflect)

ในขั้นตอนนี้ ผู้วิจัยได้นำข้อมูลจากแบบสะท้อนการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัยและผู้ร่วมสังเกตการณ์ และใบกิจกรรมที่รวบรวมได้จากขั้นที่ 3 ขั้นสังเกตการณ์ มาทำการวิเคราะห์เพื่อหาแนวทางในการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งผลการสะท้อนสามารถสรุปได้ดังตาราง 15

ตาราง 15 สรุปปัญหาที่พบในชั้นเรียนและแนวทางการปรับปรุงในแต่ละขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ของวงจรปฏิบัติการที่ 2

ขั้นการปฏิบัติ	ปัญหาที่พบ	แนวทางการปรับปรุง
ขั้นการปฏิบัติที่ 1	-	-
ขั้นการปฏิบัติที่ 2	เนื่องจากในวงจรปฏิบัติการนี้พบว่านักเรียนสามารถเข้าสู่งานได้ด้วยตนเอง ทำความเข้าใจปัญหาได้ด้วยตนเอง ดังนั้น ครูควรลดบทบาทการอธิบายงาน แต่ยังคงต้องตรวจสอบความรู้พื้นฐานและความเข้าใจของนักเรียน ในการเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์	ครูควรกระตุ้นให้นักเรียนได้ทำความเข้าใจปัญหาด้วยตนเอง เพื่อที่ครูจะได้ตรวจสอบความรู้พื้นฐานและความเข้าใจของนักเรียนว่านักเรียนมีความรู้ความเข้าใจที่ถูกต้องและเพียงพอในการทำงานทางคณิตศาสตร์หรือไม่ หากพบว่านักเรียนมีความรู้พื้นฐานหรือความเข้าใจที่ผิดพลาด ครูจะดำเนินการแก้ไข
ขั้นการปฏิบัติที่ 3	นักเรียนบางคนไม่มีส่วนร่วมหรือไม่ได้ช่วยกันแก้โจทย์ปัญหา	ครูควรกระตุ้นให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการแก้โจทย์ปัญหาโดยอาจสุ่มตัวแทนนักเรียนในกลุ่มออกมานำเสนอ หรือเข้าร่วมสนทนากลุ่ม เพื่อให้นักเรียนตื่นตัวในการเรียนรู้อยู่เสมอ
	นักเรียนบางกลุ่มไม่สามารถทำงานจนสำเร็จได้ด้วยตนเอง เนื่องจากขาดความรู้พื้นฐานและความเข้าใจงาน	ครูควรกระตุ้นให้นักเรียนได้ใช้ความรู้ความเข้าใจของตนเองในการสำรวจงานทางคณิตศาสตร์ โดยใช้คำถาม การชี้แนะ หรือยกตัวอย่าง มากกว่าที่จะเป็นการบอกคำตอบเพื่อให้นักเรียนได้ใช้ความรู้ ความเข้าใจ และความคิดในการคำตอบได้ด้วยตนเอง

ตาราง 15 (ต่อ)

ขั้นการปฏิบัติ	ปัญหาที่พบ	แนวทางการปรับปรุง
ขั้นการปฏิบัติที่ 4	ในขณะที่ครูคัดเลือกและจัดลำดับการอภิปราย และแจ้งลำดับการนำเสนอนั้น จะมีกลุ่มนักเรียนที่ไม่ต้องนำเสนอจะหยุดทำงานทันที	ครูต้องแจ้งลำดับการนำเสนอภายหลังจากที่นักเรียนทำงานครบทุกกลุ่ม และแสดงถึงความพร้อมในการอภิปรายแล้ว
ขั้นการปฏิบัติที่ 5	นักเรียนเสนอแนวทางการแก้ปัญหาที่คลุมเครือ ไม่ชัดเจน	ครูอาจใช้คำถามประกอบการอภิปราย เพื่อให้นักเรียนแสดงแนวคิดและเล่าวิธีการแก้ปัญหาอย่างเป็นขั้นเป็นตอน
	นักเรียนใช้ตัวแทนคนเดิมออกมานำเสนอแนวคิดเกี่ยวกับการทำงานหรือการแก้ปัญหาของกลุ่ม	ครูสร้างข้อตกลงกับนักเรียนทั้งชั้นเรียน โดยให้แต่ละกลุ่มใช้ตัวแทนในการนำเสนอที่ไม่ซ้ำกัน แล้วเพิ่มคะแนนให้นักเรียน และกลุ่มที่เป็นตัวแทนออกมานำเสนอแนวคิด
	นักเรียนบางกลุ่มยังขาดการตั้งสมมติฐาน โดยลงมือแก้ปัญหาเลย และขาดการสรุปคำตอบที่ชัดเจน ว่าตรงกับสมมติฐานหรือไม่	ครูได้ใช้คำถามเพิ่มเติม และย้ำให้นักเรียนบันทึกสมมติฐานของปัญหา และสรุปคำตอบพร้อมอธิบายเหตุผล ในใบกิจกรรมด้วยโดยใช้ภาษาอย่างง่ายตามความเข้าใจของนักเรียนเอง

จากตาราง 15 สรุปปัญหาที่พบในขั้นเรียนขณะจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ และแนวทางการปรับปรุงแก้ไขปัญหาที่พบในแต่ละขั้นตอนสำหรับพัฒนาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการที่ 3 ให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

วงจรปฏิบัติการที่ 3 เรื่อง พาราโบลา

จากผลการสะท้อนการปฏิบัติในวงจรปฏิบัติการที่ 2 ทำให้ผู้วิจัยเห็นแนวทางการปรับปรุงและพัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยมีรายละเอียดดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นวางแผน (Plan)

ผู้วิจัยนำผลการสะท้อนการจัดการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการที่ 2 มาปรับปรุงแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง พาราโบลา เพื่อให้แผนการจัดการเรียนรู้บรรลุตามวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้ ซึ่งผู้วิจัยได้ปรับปรุงบทบาทของครูในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ต้องคอยกระตุ้นให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมระดมความคิด ร่วมเรียนรู้ และร่วมทำงานเพื่อแก้ปัญหาร่วมกัน จนเกิดแนวคิดหรือวิธีการในการแก้ปัญหาที่สามารถนำมาอธิบายให้เพื่อนฟังได้ และสรุปความรู้ด้วยตนเอง

ขั้นการปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์การเรียนรู้และการทำงานทางคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยเตรียมออกแบบงานทางคณิตศาสตร์ในใบกิจกรรม ให้เป็นงานที่ส่งเสริมให้เกิดการอภิปราย ให้นักเรียนได้ร่วมคิด ร่วมแสดงความคิดเห็นและเหตุผล ร่วมค้นคว้า และสรุปความรู้ด้วยตนเอง ในชั่วโมงที่ 1 – 4 ผู้วิจัยได้เตรียมงานทางคณิตศาสตร์ทำนองเดียวกับเรื่องวงรี และปรับคำชี้แจงให้มีความชัดเจนมากขึ้น ให้นักเรียนเข้าใจได้ง่านหลังจากอ่านคำชี้แจงแล้ว ส่วนในชั่วโมงที่ 5 ผู้วิจัยได้เตรียมคลิปวีดีโอ [ย่างไก่ ไม่ใช้ไฟ ไม่ใช้ถ่าน ย่างได้ยังไง? (พาราโบลา) | มัน MATH มาก [by We Mahidol]] (จาก https://www.youtube.com/watch?v=DEVL3peUeZM) ให้นักเรียนดู และทำกิจกรรมการอภิปรายเพื่อออกแบบร้านขายของตามเงื่อนไขของพาราโบลา อีกทั้งยังได้เตรียมกิจกรรมสืบสอบทางคณิตศาสตร์เรื่อง "ลุงเหลือ ยอดนักประดิษฐ์สติเฟื่อง" ให้นักเรียนได้อภิปรายให้เหตุผลว่า ทำไมลุงเหลือจึงสร้างจานรับสัญญาณดาเทียมจากกระทะได้

ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยได้ปรับบทบาทของครูในแผนการจัดการเรียนรู้ เป็นนำเข้าสู่ปัญหาด้วยวิธีการเดิมกับวงจรปฏิบัติการที่ 1 คือการให้นักเรียนร่วมกันอ่านและศึกษาในงานด้วยตนเอง ครูจะช่วยอธิบายและทบทวนความรู้เดิมที่จำเป็นต้องใช้ในการทำงานทางคณิตศาสตร์เฉพาะกลุ่มที่ขอความช่วยเหลือจากครูเท่านั้น เนื่องจากในวงจรปฏิบัติการที่ 2 พบว่า นักเรียนสามารถเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ด้วยศึกษาใบกิจกรรมด้วยตนเอง และครูควรตรวจสอบความรู้พื้นฐานและความเข้าใจของนักเรียนว่านักเรียนมีความรู้ความเข้าใจที่ถูกต้องและเพียงพอในการทำงานทางคณิตศาสตร์หรือไม่

ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

ผู้วิจัยได้ปรับปรุงบทบาทขอครูในแผนการจัดการเรียนรู้ให้มีความชัดเจนมากขึ้น มุ่งเน้น 4 บทบาทการ คือ 1) การใช้คำถามหรือคำแนะนำเพื่อสนับสนุนช่วยเหลือการทำงานและการแก้ปัญหาของนักเรียน 2) การสังเกตการนำความรู้เดิมทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ถูกต้องหรือไม่ 3) พิจารณาแนวคิดหรือวิธีการที่นำมาใช้เหมาะสมหรือไม่ หากพบว่าไม่ถูกต้องหรือไม่เหมาะสมครูดำเนินการแก้ไข และ 4) สังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ที่นักเรียนแสดงออกต่องานทางคณิตศาสตร์

ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน

เนื่องจากในวงจรปฏิบัติการที่ผ่านมาพบว่าในขณะที่ครูคัดเลือกและจัดลำดับการอภิปราย และแจ้งลำดับการนำเสนอนั้น จะมีกลุ่มนักเรียนที่ไม่ต้องนำเสนอ จะหยุดทำงานทันทีเกิดจากครูให้นักเรียนได้อภิปรายเพียงมีบางกลุ่มที่เลือกแนวคิดหรือวิธีการแก้ปัญหาที่เหมือนกับกลุ่มที่ออกมานำเสนอแล้ว และพบว่านักเรียนในชั้นเรียนจะไม่สนใจฟังการนำเสนอเท่าที่ควร ดังนั้นผู้วิจัยจึงปรับบทบาทของครู โดยแจ้งลำดับการนำเสนอภายหลังจากที่นักเรียนทำงานครบทุกกลุ่ม และแสดงถึงความพร้อมในการอภิปรายแล้ว

ขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่

ผู้วิจัยได้พัฒนาแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการที่ 3 เรื่องพาราโบลา ในขั้นปฏิบัติการที่ 5 โดยการเพิ่มบทบาทมีส่วนร่วมของนักเรียนในการอภิปรายทั้งชั้นเรียนมากขึ้น เช่น การใช้คำถามกระตุ้นความคิดของนักเรียนที่ฟังเพื่อนอภิปราย เพื่อให้นักเรียนได้แสดงแนวคิดผ่านการพูด เช่น เห็นด้วยกับสิ่งที่เพื่อนอธิบายหรือไม่ เพราะเหตุใด มีกลุ่มไหนจะเพิ่มเติมสิ่งที่เพื่อนพูดไหม เป็นต้น และวางแผนการเพิ่มบทบาทการมีส่วนร่วมระหว่างของนักเรียนกับครูในการอภิปรายทั้งชั้นเรียนให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

2. ขั้นปฏิบัติการ (Action)

จากการวางแผนโดยนำผลการสะท้อนการจัดการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการที่ 2 มาปรับปรุง และพัฒนาการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัยในวงจรปฏิบัติการที่ 3 ให้มีประสิทธิภาพขึ้น โดยจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ใช้ระยะเวลา 5 ชั่วโมง ประกอบด้วยขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ต่อไปนี้

ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยได้นำเข้าสู่ปัญหาด้วยการให้นักเรียนร่วมกันอ่านและศึกษาในงานที่ 3 เรื่อง พาราโบลา ด้วยตนเอง โดยครูคอยควรกระตุ้นให้นักเรียนได้ทำความเข้าใจปัญหาด้วยตนเอง เพื่อที่ครูจะได้ตรวจสอบความรู้พื้นฐานและความเข้าใจของนักเรียนว่านักเรียนมีความรู้ความเข้าใจที่ถูกต้องและเพียงพอในการทำงานทางคณิตศาสตร์หรือไม่ โดยจะช่วยอธิบายและทบทวนความรู้เดิมที่จำเป็นต้องใช้ในการทำงานทางคณิตศาสตร์เฉพาะกลุ่มที่ขอความช่วยเหลือจากครูเท่านั้น

ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

ผู้วิจัยเดินสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ที่นักเรียนแสดงออกต่องานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนทุกกลุ่ม เพื่อการกำกับและติดตามการทำงานของนักเรียน คอยกระตุ้นให้นักเรียนได้ใช้ความรู้ความเข้าใจของตนเองในการสำรวจงานทางคณิตศาสตร์ โดยใช้คำถามหรือคำแนะนำเพื่อสนับสนุนช่วยเหลือการทำงานและการแก้ปัญหาของนักเรียน หรือยกตัวอย่าง มากกว่าที่จะเป็นการบอกคำตอบเพื่อให้นักเรียนได้ใช้ความรู้ความเข้าใจ และความคิดในการหาคำตอบได้ด้วยตนเอง เน้นการสังเกตการนำความรู้เดิมทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ พิจารณาแนวคิดหรือวิธีการที่นำมาใช้ หากพบว่าความรู้เดิมที่นักเรียนนำมาใช้ไม่ถูกต้องหรือไม่เหมาะสม ครูดำเนินการแก้ไขโดยการใช้คำถามเพื่อระลึกถึงกระบวนการทำงานทางคณิตศาสตร์

ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน

ผู้วิจัยจะคอยควบคุมเวลาที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ให้เพียงพอกับภาระงานที่นักเรียนจะต้องอภิปรายและคอยสังเกตพฤติกรรมการทำงานของนักเรียนควบคู่กันว่าพร้อมนำเสนอแล้วหรือยัง ถ้าพร้อมแล้วครูจะแจ้งให้นักเรียนทราบและมีนักเรียนที่อาสาเป็นผู้นำอภิปรายหรือในชั่วโมงที่ไม่มีนักเรียนอาสาในการอภิปราย ครูจะคัดเลือกกลุ่มอภิปรายเองและต้องแจ้งลำดับการนำเสนอภายหลังจากที่นักเรียนทำงานครบทุกกลุ่ม

ขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่

ผู้วิจัยได้เพิ่มบทบาทมีส่วนร่วมของนักเรียนในการอภิปรายทั้งชั้นเรียนมากขึ้น เช่น การใช้คำถามกระตุ้นความคิดของนักเรียนที่ฟังเพื่อนอภิปราย เพื่อให้นักเรียนได้แสดงแนวคิดผ่านการพูด เช่น เห็นด้วยกับสิ่งที่เพื่อนอธิบายหรือไม่ เพราะเหตุใด มีกลุ่มไหนจะเพิ่มเติมสิ่งที่เพื่อนพูดไหม เป็นต้น และครูช่วยอธิบายให้นักเรียนเกิดการเชื่อมโยงในการอภิปรายในชั้นเรียน โดยนำเสนอแนวคิดวิธีการหรือกลวิธีการแก้ปัญหาจากง่ายไปยาก หรือหากมีหลายแนวคิดหลาย

เหตุผล ครูจะเน้นการอธิบายเปรียบเทียบความเหมือน ความต่างเหล่านั้น จนนักเรียนสามารถสรุปเป็นความรู้ใหม่ด้วยตนเอง .

ขั้นที่ 3 ขั้นสังเกตการณ์ (Observe)

ขั้นสังเกตการณ์เป็นการเก็บรวบรวมข้อมูลระหว่างการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง พาราโบลา โดยเก็บรวบรวมข้อมูลจากแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัยและผู้ร่วมสังเกตการณ์ และเก็บรวบรวมข้อมูลจากการทำใบกิจกรรมเป็นรายกลุ่มของนักเรียน

จากการสังเกตของผู้วิจัยขณะทำการจัดการเรียนรู้สามารถบรรยายถึงสภาพบรรยากาศในชั้นเรียน รวมทั้งปัญหาและอุปสรรคที่พบจากการจัดการเรียนรู้ โดยมีรายละเอียดแต่ละขั้นดังนี้

ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์

จากการสังเกตนักเรียนแต่ละกลุ่มขณะนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ โดยผู้วิจัยและนักเรียนร่วมกันทบทวนความรู้เดิมก่อนทำกิจกรรม และให้นักเรียนร่วมกันศึกษาใบกิจกรรมเรื่องพาราโบลา พบว่านักเรียนทุกกลุ่มมีความตั้งใจและให้ความสนใจ โดยนักเรียนบางกลุ่มร่วมกันอ่านสถานการณ์ปัญหา นักเรียนบางกลุ่มมอบหมายให้ตัวแทนอ่านสถานการณ์ให้สมาชิกในกลุ่มฟัง นักเรียนแต่ละกลุ่มจะขีดเขียนเน้นข้อความหรือขีดเส้นใต้ข้อเท็จจริงและคำสำคัญ (Keyword) ลงในใบกิจกรรมด้วย แสดงให้เห็นถึงความตั้งใจและสนใจในการทำกิจกรรมของนักเรียน

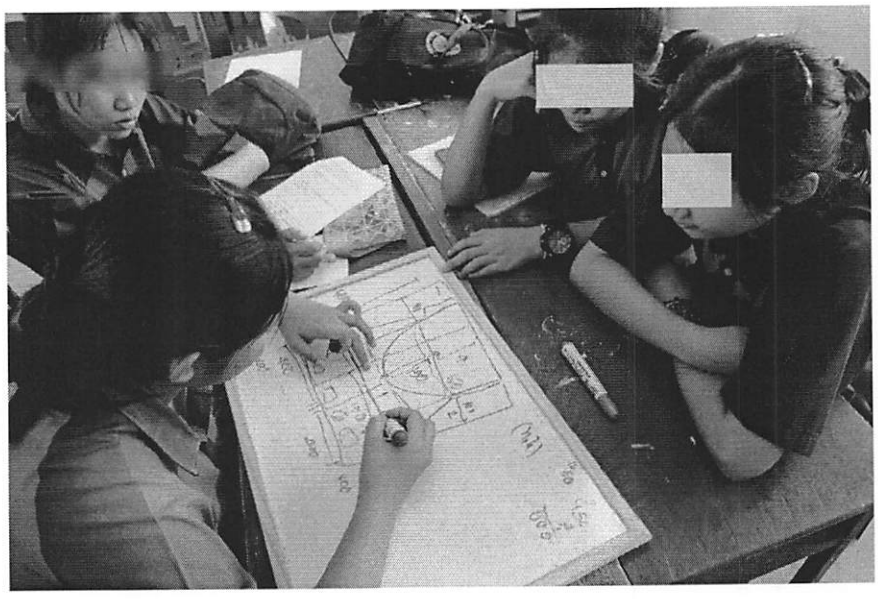
จากการวิเคราะห์การจัดการเรียนรู้ในขั้นตอนนี้ พบว่า นักเรียนมีคุ้นเคยกับการจัดกิจการเรียนรู้ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ หลังจากที่ครูลดบทบาทของครูในขั้นลง นักเรียนก็ยังคงเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ได้โดยการศึกษาใบกิจกรรมด้วยตนเอง ผ่านการอภิปรายในกลุ่มย่อย โดยที่ผู้วิจัยไม่ต้องทบทวนความรู้และอธิบายงานทางคณิตศาสตร์ แต่ถ้ากลุ่มไหนต้องการความช่วยเหลือ จะยกมือเรียกครูไปอธิบายงานเพิ่มเติมที่กลุ่ม ดังภาพ 16

ภาพ 16 นักเรียนเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ได้ด้วยตนเอง ผ่านการอภิปรายในกลุ่มย่อย

ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันอภิปราย แสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับงานทางคณิตศาสตร์และหาแนวทางหรือวิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลาย โดยผู้วิจัยจะให้นักเรียนแต่ละกลุ่มแสดงแนวคิดอย่างอิสระผ่านการเขียนลงบนกระดานไวท์บอร์ด และการพูดอภิปรายในกลุ่ม ผู้วิจัยกำกับและติดตามแนวคิดหรือวิธีการรวมถึงพฤติกรรมการเรียนรู้ต่าง ๆ ขณะที่นักเรียนลงมือทำงานทางคณิตศาสตร์ ได้อย่างทั่วถึงและจะให้คำแนะนำเพิ่มเติมและดำเนินการแก้ไขข้อผิดพลาดในการทำงานของนักเรียน

จากการสังเกตการระดมความคิดของนักเรียนแต่ละกลุ่ม เพื่อหาแนวทางวิธีการแก้ปัญหา และการเรียบเรียงคำพูดสำหรับการอภิปราย พบว่า นักเรียนแต่ละกลุ่มสามารถใช้การนำเสนอตัวแทนความคิดในการทำความเข้าใจปัญหา ดำเนินการแก้ปัญหาได้และสรุปผลการแก้ปัญหา เพื่อนำไปอภิปรายได้ ดังภาพ 17



ภาพ 17 นักเรียนใช้การนำเสนอตัวแทนความคิดในการทำความเข้าใจปัญหา และดำเนินการแก้ปัญหา

ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน

นักเรียนทุกกลุ่มมีความกระตือรือร้นที่จะพัฒนางานทางคณิตศาสตร์ของตนเอง มีการเตรียมความพร้อมและวางแผนการอภิปราย เพราะมีการประเมินโดยเพื่อน และแย่งกันพูดเป็น

กลุ่มแรกๆ เพราะนักเรียนชอบบรรยากาศการแข่งขัน ทำให้การอภิปรายทั้งชั้นเรียนในขั้นการปฏิบัติที่ 5 เป็นไปอย่างราบรื่น และช่วยลดบทบาทการจัดลำดับของครู

ขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่

ผู้วิจัยและผู้ร่วมสังเกตการณ์ ได้สังเกตเห็นตรงกันว่า นักเรียนมีส่วนร่วมในการอภิปรายครบทุกกลุ่ม และสิ่งที่นักเรียนอภิปรายนั้นเป็นการอภิปรายขั้นสูงกว่าการอธิบายผลการแก้โจทย์ปัญหาทั่วไป แต่ยังตัวแทนบางกลุ่มที่ออกมานำเสนอแนวคิดเกี่ยวกับการแก้สถานการณ์ปัญหาหน้าชั้นเรียน อธิบายไม่ชัดเจนในบางประเด็น ผู้วิจัยได้ให้กำลังใจตัวแทนที่ออกมานำเสนอและใช้ประเด็นที่อธิบายไม่ชัดเจน มาตั้งข้อสังเกตและอภิปรายร่วมกันกับนักเรียนทั้งชั้นเรียน เพื่อแลกเปลี่ยนเรียนรู้ซึ่งกันและกัน

จากการสังเกตผลการใช้เทคนิคเพื่อนประเมินเพื่อ พบว่า การโต้แย้งของฝ่ายประเมินและฝ่ายที่ถูกประเมิน ทำให้นักเรียนได้แสดงการให้เหตุผล ผ่านการพูด ได้ทราบแนวคิดและวิธีการที่แตกต่างหรือแนวคิดที่ช่วยเพิ่มเติมประเด็นการอภิปรายที่ยังไม่สมบูรณ์

การอธิบายเหตุผลในการให้คะแนนระดับต่าง ๆ ทำให้นักเรียนกลุ่มที่ประเมินเพื่อนได้พูดอธิบายแสดงเหตุผลในการแก้ปัญหาและสรุปคำตอบเพิ่มเติมจากที่เพื่อนอภิปราย เพื่อแลกเปลี่ยนความรู้ และแนวคิดเกี่ยวกับงานทางคณิตศาสตร์ ร่วมกัน แต่ถ้าในชั่วโมงที่นักเรียนไม่เกิดการโต้แย้งหรือการโต้ตอบกันระหว่างทั้งสองฝ่าย ผู้วิจัยจะใช้คำถามให้ผู้เรียนได้เปรียบเทียบความคล้ายคลึงหรือความแตกต่างของแนวคิดทางคณิตศาสตร์

ขั้นที่ 4 ขั้นสะท้อนผลการปฏิบัติ (Reflect)

จากการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ที่ได้ปรับปรุงจากปัญหาที่พบในวงจรปฏิบัติการที่ 2 เพื่อนำมาวางแผนการจัดการเรียนรู้ในวงจรปฏิบัติการที่ 3 เรื่อง พาราโบลา พบว่า สามารถแก้ไขปัญหาที่พบในชั้นเรียนได้ทุกขั้น นอกจากนี้ผู้วิจัยพบปัญหาระหว่างจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียนและได้เสนอแนะแนวทางการปรับปรุงในแต่ละขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ของวงจรปฏิบัติการที่ 3 สรุปได้ดังตาราง 16

ตาราง 16 สรุปปัญหาที่พบในชั้นเรียนและแนวทางการปรับปรุงในแต่ละขั้นตอน การจัดการเรียนรู้ของวงจรปฏิบัติการที่ 3

ขั้นการปฏิบัติ	ปัญหาที่พบ	แนวทางการปรับปรุง
ขั้นการปฏิบัติที่ 1		
ขั้นการปฏิบัติที่ 2		
ขั้นการปฏิบัติที่ 3	นักเรียนบางคนไม่มีส่วนร่วมหรือไม่ได้ช่วยกันแก้โจทย์ปัญหา	ครูควรชี้แนะให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการแก้โจทย์ปัญหาโดยอาจสุ่มตัวแทนนักเรียนออกมานำเสนอ หรือเข้าร่วมสนทนากลุ่มเพื่อให้นักเรียนตื่นตัวในการเรียนรู้อยู่เสมอ
ขั้นการปฏิบัติที่ 4		
ขั้นการปฏิบัติที่ 5	นักเรียนเสนอแนวทางการแก้ปัญหาที่คลุมเครือ ไม่ชัดเจน และขาดความมั่นใจในแนวคิดของตนเอง	ครูอาจใช้คำถามประกอบการอภิปราย เพื่อให้นักเรียนแสดงแนวคิดและเล่าวิธีการแก้ปัญหาอย่างเป็นขั้นเป็นตอน และฝึกให้นักเรียนนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์เป็นประจำ ให้กล้าอธิบายแนวคิดทางคณิตศาสตร์

จากปัญหาที่พบในชั้นเรียนนำมาสู่บทบาทของครูในการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ในแต่ละขั้นการปฏิบัติเพื่อให้เกิดประสิทธิภาพในการจัดการเรียนรู้ ซึ่งทั้ง 3 วงจรปฏิบัติการพบว่ามีประเด็นที่ครูผู้สอนควรเน้นเมื่อนำแนวทางดังกล่าวไปใช้ในการจัดการเรียนรู้ ดังนี้

1. **ก่อนการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์** ครูผู้สอนควรวางแผนและจัดเตรียมความพร้อมในการจัดการเรียนรู้ รวมทั้งขั้นตอนการนำเข้าสู่บทเรียน เพื่อเร้าความสนใจของนักเรียนมาอยู่ที่การจัดการเรียนรู้ของครู และแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ ดังนั้นก่อนการจัดการเรียนรู้ครูผู้สอนควรเน้นและคำนึงถึงประเด็นต่อไปนี้

1.1 ออกแบบหรือคัดเลือกงานทางคณิตศาสตร์ที่ท้าทายความสามารถของนักเรียน

การออกแบบหรือคัดเลือกงานทางคณิตศาสตร์เป็นหนึ่งในขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ คือ ขั้นการปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์การเรียนรู้และการทำงานทางคณิตศาสตร์ โดยเริ่มจากงานที่เชื่อมโยงกับความรู้และทักษะเดิมของนักเรียน ให้งานที่ง่ายก่อน และเพิ่มระดับความซับซ้อนขึ้นเรื่อย ๆ ทั้งนี้สิ่งสำคัญก็คือ งานนั้นจะต้องสามารถทำให้เกิดการการอภิปรายและเปรียบเทียบร่วมกันทั้งชั้นเรียนได้อย่างเหมาะสม ซึ่งลักษณะของงานที่เป็นโจทย์ปัญหา ควรเป็นปัญหาปลายเปิดเชิงกระบวนการ หรือ เป็นสถานการณ์ปัญหาทางเรขาคณิตวิเคราะห์ที่ให้นักเรียนอธิบายเหตุผลสนับสนุนหรือโต้แย้งแนวคิดของเพื่อน อาจเป็นปัญหาที่มีคำตอบมาให้หลายทางเลือก ทำให้นักเรียนอภิปรายเพื่อเลือกคำตอบที่เห็นด้วย พร้อมทั้งแสดงเหตุผลในการเลือกคำตอบนั้น และครูควรคัดเลือกเนื้อหาและออกแบบงานทางคณิตศาสตร์ให้เหมาะสมกับระยะเวลาในการจัดกิจกรรม เพื่อให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการแก้ปัญหามากที่สุด

1.2 จัดเตรียมอุปกรณ์ในห้องเรียนให้พร้อมสำหรับการอภิปราย

ก่อนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ครูต้องเตรียมอุปกรณ์ในห้องเรียนให้พร้อม สำหรับให้นักเรียนได้นำเสนอตัวแทนความคิดในขณะการถกเถียงหรืออภิปรายเกี่ยวกับงานภายในกลุ่ม เช่น ใบงาน กระดาษขนาดใหญ่เพื่อให้นักเรียนนำเสนองานได้ กระดานไวท์บอร์ดขนาดเล็ก และอุปกรณ์สำหรับการอภิปรายเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดในการทำงานทางคณิตศาสตร์ในขั้นการปฏิบัติที่ 5 เช่น ไมโครโฟน กระดาษชาร์ต โปรเจกเตอร์ เป็นต้น และครูควรสร้างบรรยากาศในห้องเรียนที่เอื้อให้นักเรียนเกิดการโต้เถียงกันในการอภิปรายในชั้นเรียน

2. ระหว่างการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ครูผู้สอนควรสังเกตพฤติกรรมนักเรียนระหว่างการจัดการเรียนรู้ สำรวจการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นของนักเรียน ในขณะที่นักเรียนอภิปรายและเปรียบเทียบแนวคิดร่วมกันในชั้นเรียน เพื่อให้สามารถจัดการเรียนรู้และแก้ไขปัญหาที่พบในชั้นเรียนได้ทันที จนส่งผลให้นักเรียนสามารถบรรลุจุดประสงค์การเรียนรู้ตามที่กำหนดไว้ได้ ดังนั้นในระหว่างการจัดการเรียนรู้ครูผู้สอนควรเน้นและคำนึงถึงประเด็นต่อไปนี้

2.1 กระตุ้นความรู้เดิมและการตรวจสอบความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน

ก่อนการนำเสนองานทางคณิตศาสตร์ เนื่องจากในวงจรปฏิบัติการแรกนักเรียน ไม่คุ้นเคยกับการเรียนรู้โดยการมีส่วนร่วมในงานทางคณิตศาสตร์ ร่วมแสดงความคิดเห็นและเหตุผลและสรุปความรู้ด้วยตนเอง ทำให้นักเรียนไม่เข้าใจบทบาทของตนเอง ไม่กล้าถกเถียงกันในกลุ่ม อีก

ทั้งยังเป็นช่วงเริ่มต้นของบทเรียน ทำให้นักเรียนยังขาดความรู้เดิมเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ ครูจึงต้องกระตุ้นความรู้เดิมและการตรวจสอบความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน ก่อนมอบหมายงานให้นักเรียนให้นักเรียนคุ้นเคยกับบทบาทของตนเอง เมื่อนักเรียนคุ้นเคยกับบทบาทของตนเองแล้วครูทำหน้าที่เพียงคอยกำกับติดตามการทำงานของนักเรียน คอยกระตุ้นให้นักเรียนได้ทำความเข้าใจปัญหาด้วยตนเองและตรวจสอบความรู้พื้นฐาน ความเข้าใจ แนวคิดหรือวิธีการที่นักเรียนนำมาใช้ ว่านักเรียนมีความรู้ความเข้าใจที่ถูกต้องและเพียงพอในการทำงานทางคณิตศาสตร์หรือไม่ และสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ที่นักเรียนแสดงออกต่องานทางคณิตศาสตร์ เพื่อนำมาเป็นคำถามหรือประเด็นเสนอแนะในการอภิปรายทั้งชั้นเรียน

2.2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์โดยใช้รูปแบบที่เหมาะสมกับผู้เรียน

จากผลการวิจัยจะเห็นว่าในวงจรปฏิบัติการที่ 1 ขั้นการปฏิบัติการที่ 2 ครูนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ โดยเน้นการให้นักเรียนร่วมกันอ่านและศึกษาใบกิจกรรมด้วยตนเอง และในวงจรต่อไป ครูจึงวางแผนใหม่ โดยเพิ่มบทบาทของครูในการนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ โดยใช้การอธิบายรายละเอียดของงานควบคู่กันไป ซึ่งหลังจากนั้นพบว่านักเรียนเกิดความคุ้นเคยกับแนวปฏิบัติการในจัดการเรียนรู้ โดยสามารถเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ได้ด้วยตนเอง ทำให้บทบาทการมีส่วนร่วมของครูลดลง แต่ครูก็ยังคงต้องติดตามกระตุ้นความรู้เดิมและคอยสังเกตพฤติกรรมการเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เพราะว่ามีบางกลุ่มก็ไม่สามารถเข้าสู่งานได้ด้วยตนเอง ดังนั้นบทบาทของครูในการนำเข้าสู่บทเรียนจึงควรปรับเปลี่ยนไปตามสภาพจริงของผู้เรียน ทั้งนี้ สำหรับนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์นี้ เมื่อมีความคุ้นเคยกับแนวปฏิบัติที่ผู้วิจัยใช้ในการจัดการเรียนรู้นี้แล้ว บทบาทของครูที่เหมาะสมในการนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ก็คือ การให้นักเรียนเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง ครูควรกระตุ้นให้นักเรียนได้ทำความเข้าใจปัญหาด้วยตนเองโดยการศึกษารายละเอียดของงานผ่านการอภิปรายในกลุ่ม สิ่งที่ครูควรให้ความสำคัญอย่างยิ่งก็คืองานหรือใบงาน ที่มีคำถามหรือกิจกรรมเชิงสืบสอบ

2.3 การใช้คำถามเพื่อสนับสนุนช่วยเหลือการทำงานของผู้เรียน

ครูควรอำนวยการอภิปรายในชั้นเรียน ในขณะการติดตามผู้เรียนในขณะที่ผู้เรียนทำงานเป็นกลุ่มสังเกตการทำงานอย่างระมัดระวัง และพยายามที่จะเข้าใจการคิดของผู้เรียน เข้าใจวิธีการที่ผู้เรียนใช้ และเข้าใจแนวคิดที่คลาดเคลื่อนของผู้เรียน เมื่อผู้เรียนเกิดความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนในขณะทำงานหรือไม่สามารถใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์ในการดำเนินการแก้ปัญหาต่อไปได้ ครูไม่ควรเฉลยหรือบอกวิธีการแก้ปัญหานั้นโดยตรง ครูต้องใช้คำถามเพื่อสนับสนุนช่วยเหลือการทำงานของผู้เรียน เช่น นักเรียนมีข้อมูลอะไรและจะต้องหาอะไรบ้าง นักเรียนเดาหรือตรวจสอบได้อย่างไร ทำไมนักเรียนจึงเลือกใช้วิธีการนี้ นักเรียนได้คำตอบมาได้อย่างไร เป็นต้น

2.4 การแก้ปัญหาด้วยตนเองหรือการมีส่วนร่วมของนักเรียนอย่างกระตือรือร้น

การแก้ปัญหาด้วยตนเองหรือการมีส่วนร่วมแก้ปัญหาของนักเรียนผ่านการอภิปรายในกลุ่ม การนำเสนอแนวคิดในชั้นเรียนและมีส่วนร่วมในการอภิปราย โดยเปรียบเทียบความเหมือนและความแตกต่างของความคิดเพื่อที่จะพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ในเชิงเนื้อหาและเชิงกระบวนการ และการที่นักเรียนมีส่วนร่วมอย่างกระตือรือร้นซึ่งเกิดจากการสร้างบรรยากาศในชั้นเรียนของครูและการใช้เทคนิคการสอนที่หลากหลาย ทำให้นักเรียนมั่นใจในคำตอบหรือแนวคิดของตนเองอย่างอิสระ สามารถนำเสนอตัวแทนความคิดจากการแก้ปัญหาที่หลากหลาย ทั้งนี้ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของนักเรียน ถือว่าเป็นสิ่งที่มีคุณค่า สามารถนำไปเป็นประเด็นการอภิปรายได้อย่างมีประสิทธิภาพ

2.5 การสรุปบทเรียนโดยการอำนวยการอภิปรายของครู

ในการสรุปบทเรียนอาจเกิดขึ้นระหว่างหรือหลังการจัดการเรียนรู้ในขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่ ขึ้นอยู่กับเนื้อหาในบทเรียน บทบาทที่สำคัญของครูคือการอำนวยการอภิปรายและช่วยทำให้สิ่งที่อภิปรายเกิดความชัดเจนเพื่อนำพาผู้เรียนไปสู่เป้าหมายของบทเรียน อาจเริ่มจากการระบุสิ่งที่เรียนรู้โดยใช้คำพูดของนักเรียน จากนั้นจึงนำผู้เรียนให้ทำแนวคิดให้เป็นแนวคิดโดยทั่วไปโดยยังคงใช้คำพูดของนักเรียน การใช้คำพูดของนักเรียนจะช่วยให้ผู้เรียนให้ความสำคัญกับการอภิปรายแนวคิด การใช้คำศัพท์ทางคณิตศาสตร์มากเกินไปอาจไม่ส่งเสริมในการพัฒนาแนวคิด

ทั้งนี้ ครูอาจใช้คำถามในการอภิปรายสรุป เพื่อแลกเปลี่ยนเรียนรู้และเปรียบเทียบวิธีการคิดและหาคำตอบซึ่งกันและกัน ซึ่งถือว่าเป็นสิ่งสำคัญในการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ โดยที่นักเรียนจะได้มีส่วนร่วมในการแสดงความคิดเห็นแล้วได้เสียงตอบกลับจากคนอื่น ๆ ว่าสิ่งที่คิดหรืองานที่ทำนั้นเป็นอย่างไร อีกทั้งยังส่งเสริมให้นักเรียนได้ประเมินผลงานของตนเอง ตัวอย่างคำถามที่ครูสามารถนำไปใช้ในการอภิปรายสรุป เช่น ใครได้คำตอบเหมือนเพื่อนกลุ่มนี้บ้าง ทุกกลุ่มได้คำตอบเหมือนกันหรือไม่ ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น ทำไมจึงไม่เป็นเช่นนั้น เราได้ค้นพบทุกคำตอบที่เป็นไปได้หรือยัง เป็นต้น

ผู้วิจัยนำข้อมูลจากตาราง 14 – 16 รวมถึงประเด็นที่ควรเน้นมาสรุปรวมเป็นแนวทางการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ โดยจำแนกตามบทบาทของครูและนักเรียนในแต่ละขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ เพื่อประโยชน์ต่อผู้ที่สนใจนำการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ไปประยุกต์ใช้ในห้องเรียนคณิตศาสตร์ ดังแสดงในตาราง 17

ตาราง 17 สรุปแนวทางการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ จำแนกตามบทบาทของครูและนักเรียนในแต่ละแนวปฏิบัติ

ขั้นการปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์การเรียนรู้และการทำงานทางคณิตศาสตร์	
บทบาทครู	**บทบาทนักเรียน**
ออกแบบหรือคัดเลือกงานทางคณิตศาสตร์ส่งเสริมให้เกิดการเรียนรู้เชิงรุก ให้งานที่ง่ายก่อน และค่อยๆ เพิ่มระดับความซับซ้อนขึ้นเรื่อย ๆ ซึ่งงานนั้นจะต้องทำให้เกิดการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ได้อย่างเหมาะสม ซึ่งลักษณะของงานที่เป็นโจทย์ปัญหา ควรเป็นปัญหาปลายเปิดเชิงกระบวนการ หรือ เป็นสถานการณ์ปัญหาทางเรขาคณิตวิเคราะห์ที่มีคำตอบมาให้หลายทางเลือก และให้นักเรียนอภิปรายเพื่อเลือกคำตอบที่เห็นด้วย พร้อมทั้งแสดงเหตุผลในการเลือกคำตอบนั้น	-
ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์	
บทบาทครู	**บทบาทนักเรียน**
นำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์โดยใช้รูปแบบที่เหมาะสมกับผู้เรียน ควรปรับเปลี่ยนไปตามสภาพจริงของผู้เรียน กระตุ้นความรู้เดิมและการตรวจสอบความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน สำหรับนักเรียนที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง (กลุ่มเก่ง) เมื่อมีความคุ้นเคยกับแนวปฏิบัติ 5 ขั้น ที่ผู้วิจัยใช้ในการจัดการเรียนรู้นี้แล้ว บทบาทของครูที่เหมาะสม คือ แจกในงานแนะนำการใช้ใบงานหรือสื่อการเรียนรู้ต่าง ๆ โดยการให้นักเรียนเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง ลดบทบาทของครูใน	นักเรียนแบ่งกลุ่ม 4 – 5 คน โดยคละความสามารถ จากนั้นร่วมกันศึกษางานทางคณิตศาสตร์จากใบกิจกรรมที่ครูแจกให้ โดยทำความเข้าใจปัญหาผ่านการขีดเขียน วาดรูป เน้นข้อความหรือขีดเส้นใต้ข้อมูลข้อเท็จจริงและคำสำคัญ (Keyword) ลงในใบกิจกรรมเพื่อให้เกิดความเข้าใจที่ชัดเจนขึ้น จากนั้นนักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันตอบคำถามและอภิปรายในกลุ่มย่อยถึงข้อมูลหรือข้อเท็จจริงที่มีอยู่ในงานทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งจัดแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

ตาราง 17 (ต่อ)

บทบาทครู	บทบาทนักเรียน
ขั้นนี้ให้เหลือน้อยที่สุด ครูคอยกระตุ้นให้นักเรียนได้ทำความเข้าใจปัญหาด้วยตนเอง สำหรับนักเรียนที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำ (กลุ่มกลาง – อ่อน) ครูควรนำเข้าสู่งานควบคู่กับการใช้ประเด็นคำถามตรวจสอบความรู้พื้นฐานและความเข้าใจของนักเรียนว่านักเรียน เช่น 1) ปัญหานี้เป็นปัญหาเกี่ยวกับอะไร 2) นักเรียนเข้าใจปัญหานี้อย่างไร 3) นักเรียนจะแก้ปัญหานี้ได้อย่างไร	สอดคล้องและเหมาะสมกับปัญหา
ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน	
บทบาทครู	**บทบาทนักเรียน**
ทำหน้าที่อำนวยการเรียนรู้ในชั้นเรียน ในขณะการติดตามผู้เรียนในขณะที่ผู้เรียนทำงานเป็นกลุ่มสังเกตการทำงานอย่างระมัดระวัง และพยายามที่จะเข้าใจการคิดของผู้เรียน เมื่อผู้เรียนเกิดความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนในขณะทำงานหรือไม่สามารถใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์ในการดำเนินการแก้ปัญหาต่อไปได้ ครูต้องใช้คำถามเพื่อสนับสนุนช่วยเหลือการทำงานของผู้เรียน คอยกระตุ้นให้นักเรียนได้ใช้ความรู้ความเข้าใจของตนเองในการสำรวจงานทางคณิตศาสตร์ โดยใช้คำถาม ชี้แนะ หรือยกตัวอย่าง เพื่อให้นักเรียนได้ใช้ความเข้าใจ ในการหาคำตอบได้ด้วยตนเอง	นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันพิจารณางานทางคณิตศาสตร์ โดยระดมสมอง ทำความเข้าใจ และเลือกแนวคิดหรือวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นนำไปแก้ปัญหา รวมทั้งหาคำตอบและอภิปรายเกี่ยวกับประเด็นการอภิปรายที่ครูกำหนด

ตาราง 17 (ต่อ)

ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน	
บทบาทครู	**บทบาทนักเรียน**
โดยทั่วไปครูจะจัดลำดับการอภิปราย โดยให้นักเรียนกลุ่มที่มีแนวคิดหรือวิธีการทั้งที่ถูกต้องและมีข้อผิดพลาดน้อย ได้นำอภิปรายก่อน ทำให้นักเรียนกลุ่มหลัง ๆ ได้มีโอกาสพัฒนาแนวคิดหรือคำตอบของกลุ่มให้มีความสมบูรณ์มากขึ้น แต่เพื่อส่งเสริมการเรียนรู้แบบเชิงรุก ครูอาจใช้เทคนิคการเสริมแรงเพื่อสร้างบรรยากาศการแข่งขันในห้องเรียน โดยการให้คะแนนพิเศษแก่นักเรียนกลุ่มที่อาสามานำเสนอก่อนตามลำดับ ทั้งนี้ ถ้าไม่มีนักเรียนที่อาสาออกมาอภิปราย ผู้วิจัยสุ่มเลือกตัวแทนกลุ่มที่เลือกแนวคิดหรือวิธีการแก้ปัญหาที่แตกต่างกัน เพื่อออกมานำเสนอหน้าชั้นเรียนแนวคิดละ 1 กลุ่ม	เมื่อนักเรียนคุ้นเคยกับการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ นักเรียนจะมีความกระตือรือร้นที่จะพัฒนางานทางคณิตศาสตร์ของตนเอง มีการเตรียมความพร้อมและวางแผนการอภิปราย เพราะมีการประเมินโดยเพื่อน และแย่งกันพูดเป็นกลุ่มแรก ๆ เพราะนักเรียนชอบบรรยากาศการแข่งขัน ทำให้การอภิปรายทั้งชั้นเรียนในขั้นการปฏิบัติที่ 5 เป็นไปอย่างราบรื่น และช่วยลดบทบาทการจัดลำดับของครู
ขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่	
บทบาทครู	**บทบาทนักเรียน**
ครูให้นักเรียนพิจารณาเปรียบเทียบแนวคิดหรือวิธีการจากข้อสรุปต่าง ๆ และเชื่อมโยงไปสู่การสรุปเป็นความรู้ใหม่ ผ่านการใช้คำถามอภิปรายสรุป เช่น "ใครได้คำตอบที่แตกต่างจากนี้บ้าง" "เราได้ค้นพบทุกคำตอบที่เป็นไปได้หรือยัง" "เห็นด้วยกับแนวคิดของเพื่อนหรือไม่" "สิ่งที่เพื่อนพูด มีอะไรขาดหายไปไหม" "ถ้าจะเพิ่มเติมแนวคิดของเพื่อนให้ดีขึ้นจะเพิ่มเติมอย่างไร" ทำให้นักเรียนฝ่ายที่เป็น	นำเสนอและอธิบายแนวคิดหรือวิธีการของตนเอง นักเรียนได้อภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียนเพื่อแลกเปลี่ยนความรู้ แนวคิดหรือวิธีการ และเหตุผลเพื่อหาข้อสรุปในแต่ละประเด็น

ตาราง 17 (ต่อ)

บทบาทครู	บทบาทนักเรียน
ผู้ฟังได้แสดงแนวคิดสนับสนุนหรือโต้แย้งกับผู้อภิปราย อาจใช้เทคนิคเพื่อนประเมินเพื่อน ในขณะที่นักเรียนนำเสนองานเสร็จแล้ว ครูให้ผู้ฟังการอภิปรายประเมินการพูดของเพื่อน และให้บอกเหตุผลของการให้คะแนนนั้น บอกข้อเสนอแนะเพิ่มเติม เพื่อแลกเปลี่ยนความรู้ แนวคิดหรือวิธีการและเหตุผลในการอภิปราย	เพื่อให้เกิดการอภิปรายโต้แย้ง อย่างมีประสิทธิภาพ นักเรียนกลุ่มที่ฟังเพื่อนพูดจบแล้ว ประเมินให้คะแนนผลการอภิปรายของเพื่อน โดยครูมีเงื่อนไขว่า นักเรียนจะให้คะแนนเท่าไรก็ได้ และไม่กำหนดเกณฑ์การประเมิน ให้นักเรียนสร้างเกณฑ์การประเมินขึ้นเอง แต่ห้ามให้คะแนนเต็ม เมื่อนักเรียนให้คะแนนเพื่อนแล้ว ครูจะถามถึงว่าเหตุผลว่าทำไมถึงประเมินและให้คะแนนเช่นนั้น ทั้งนี้เพื่อให้เกิดความยุติธรรมและเป็นการสร้างบรรยากาศที่ท้าทายและแข่งขัน นักเรียนจะต้องหมุนเวียนกันประเมินและให้คะแนนเพื่อนทุกกลุ่ม พร้อมทั้งต้องระบุข้อบกพร่องของสิ่งที่เพื่อนอภิปราย บอกเหตุผลหรือเกณฑ์การให้คะแนน

ตอนที่ 2 ผลการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ผู้วิจัยวิเคราะห์ความสามารถในการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียน ทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพ จากเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ ใบกิจกรรม และแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ โดยระหว่างการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ในแต่ละวงจรปฏิบัติการ นักเรียนจะได้เรียนรู้จากการอภิปรายและทำใบกิจกรรมเป็นรายกลุ่ม และนำผลมาวิเคราะห์เชิงคุณภาพ หลังจากที่ดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ครบ 3 วงจรปฏิบัติการ นักเรียนจะได้ทำแบบทดสอบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นรายบุคคล และนำผลมาวิเคราะห์เชิงปริมาณและเชิงคุณภาพ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.1 ผลการเปรียบเทียบคะแนนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 70 ของคะแนนเต็ม (เต็ม 54 คะแนน) แสดงผลดังตาราง 18

ตาราง 18 แสดงค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (sd.) และค่าการทดสอบที (t – test) ของคะแนนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังการจัดการเรียนรู้เทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 70 (คะแนนเต็ม 54 คะแนน)

การทดสอบ	จำนวนคน (N)	คะแนนเต็ม	คะแนนผ่านเกณฑ์	ค่าเฉลี่ย ($\bar{x}$)	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)	t	sig
หลังเรียน	25	54	38	41.64	7.16	29.06*	.000

* มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากตาราง 18 แสดงให้เห็นว่า คะแนนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนในหลังการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) เท่ากับ 41.64 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (sd.) เท่ากับ 7.16 คิดเป็นร้อยละ 77.11 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 ของคะแนนเต็ม (คิดเป็น 37.8 คะแนน จาก 24 คะแนน) อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2.2 ระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์

ในระหว่างการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ผู้วิจัยวิเคราะห์ระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้ใบกิจกรรมและแบบประเมินใบกิจกรรมในแต่ละวงจรปฏิบัติการ โดยพิจารณาจากความสัมพันธ์ระหว่างรายการประเมินใบกิจกรรมและองค์ประกอบ รายด้านของทักษะการคิดเชิงคณิตศาสตร์ มีรายละเอียดจำแนกตามวงจรปฏิบัติการ ดังต่อไปนี้

2.2.1 วงจรปฏิบัติการที่ 1

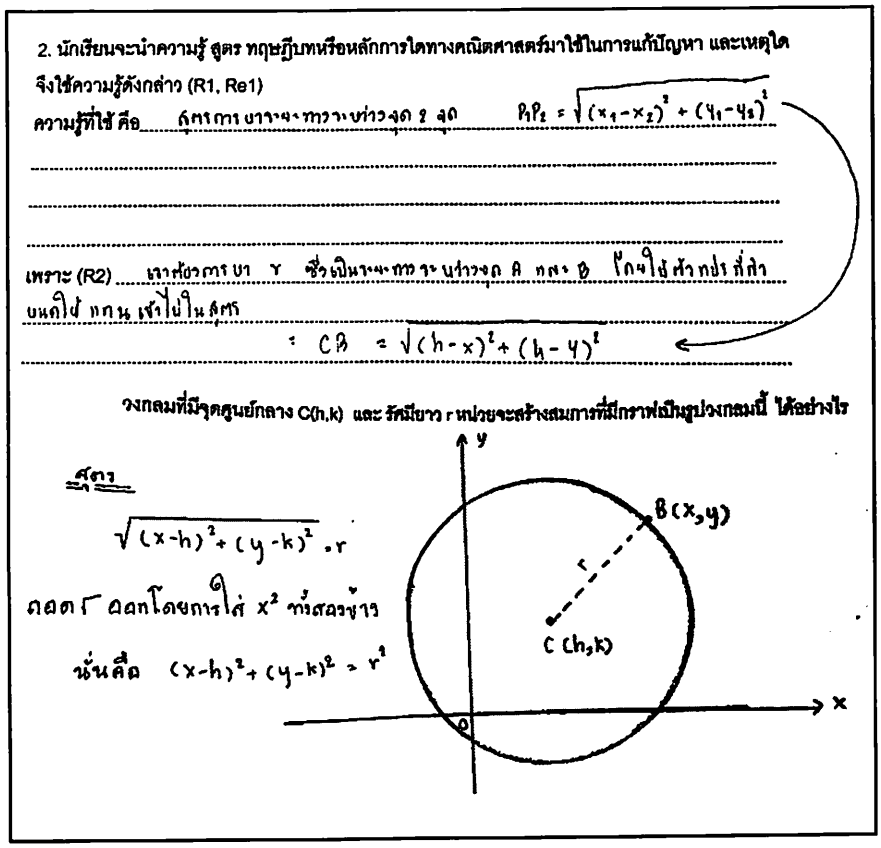
ผลการวิเคราะห์ข้อมูลจากใบกิจกรรม

ผู้วิจัยแสดงผลการวิเคราะห์จำนวนนักเรียนตามระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์จากใบกิจกรรมของวงจรปฏิบัติการที่ 1 เรื่อง วงกลม ดังตาราง 19

ตาราง 19 แสดงจำนวนกลุ่มนักเรียนตามระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์จาก ใบกิจกรรมของวงจรปฏิบัติการที่ 1

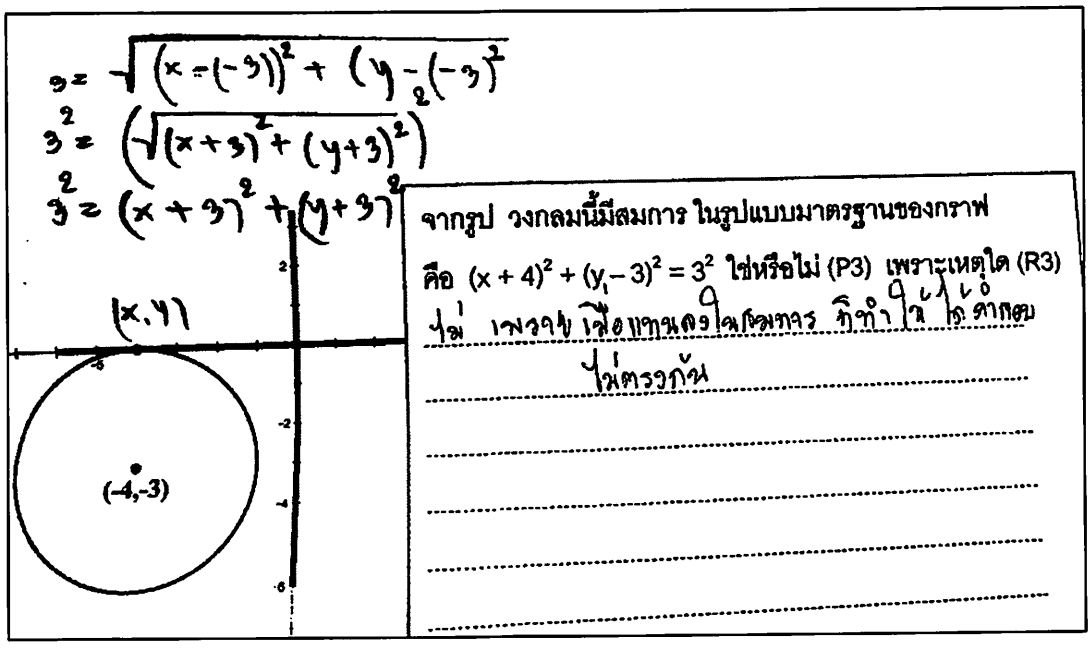
	องค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์	จำนวนกลุ่มนักเรียนจำแนกตามระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ (ร้อยละ)			
		ดีมาก	ดี	พอใช้	ปรับปรุง
วงจรปฏิบัติการที่ 1	การแก้ปัญหา	-	2 (40)	2 (40)	1 (20)
	การให้เหตุผล	-	2 (40)	2 (40)	1 (20)
	การนำเสนอตัวแทนความคิด	-	3 (60)	2 (40)	-
	ในภาพรวม	-	3 (60)	2 (40)	-

จากตาราง 19 เมื่อพิจารณาระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนเป็นรายกลุ่มโดยรวม พบว่า กลุ่มนักเรียนส่วนใหญ่มีระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์อยู่ในระดับดี จำนวน 3 กลุ่ม คิดเป็นร้อยละ 60 และเมื่อพิจารณาการคิดเชิงคณิตศาสตร์รายด้าน พบว่า ด้านการนำเสนอตัวแทนความคิดของกลุ่มนักเรียนส่วนใหญ่อยู่ในระดับดี ส่วนด้านการแก้ปัญหา และด้านการให้เหตุผล ของกลุ่มนักเรียนส่วนใหญ่อยู่ในระดับดี และ พอใช้ ระดับละเท่า ๆ กัน ทั้งนี้ผู้วิจัยได้นำตัวอย่างการเขียนตอบและแสดงแนวคิดที่แสดงให้เห็นถึงความสามารถบางด้าน ดังภาพ 18 – 19



ภาพ 18 ตัวอย่างผลงานในใบกิจกรรมที่แสดงการอธิบายเหตุผลของการดำเนินการแก้ปัญหา และ และการนำเสนอตัวแทนความคิดในการดำเนินการแก้ปัญหา

จากภาพ 18 แสดงความสามารถในการอธิบายเหตุผลของการดำเนินการแก้ปัญหา และ และการนำเสนอตัวแทนความคิดในการดำเนินการแก้ปัญหา ในใบกิจกรรมที่ 1 เรื่องวงกลม ซึ่งจัดอยู่ในระดับดี เนื่องจากนักเรียนอธิบายเหตุผลในการแก้สมการที่อยู่ในรูปกรณฑ์ได้อย่างสมเหตุสมผล และใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ วาดรูปวงกลมและเขียนข้อความ แสดงการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม และสื่อความหมายได้ชัดเจน แต่ระบุเหตุผลในการใช้สูตรการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดไม่ชัดเจน ว่าสัมพันธ์กับนิยามของวงกลมอย่างไร



ภาพ 19 ตัวอย่างผลงานในใบกิจกรรมที่แสดงการสรุปคำตอบของปัญหา และการอธิบายความสมเหตุสมผลของคำตอบของปัญหา

จากภาพ 19 แสดงความสามารถในการสรุปคำตอบของปัญหา และการอธิบายความสมเหตุสมผลของคำตอบของปัญหา ในใบกิจกรรมที่ 1 เรื่องวงกลม ซึ่งจัดอยู่ในระดับพอใช้ เนื่องจากนักเรียนสรุปคำตอบได้ถูกต้อง ว่าวงกลมที่กำหนดให้ไม่ใช่วงกลมที่มีรูปแบบมาตรฐานของกราฟ คือ $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 32$ แต่นักเรียนสรุปผลจากการดำเนินแทนค่า h และ ค่า k ที่ไม่ถูกต้องลงในสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h,k) ใด ๆ ทำให้คำตอบที่ได้จึงไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของปัญหา

2.2.2 วงจรปฏิบัติการที่ 2

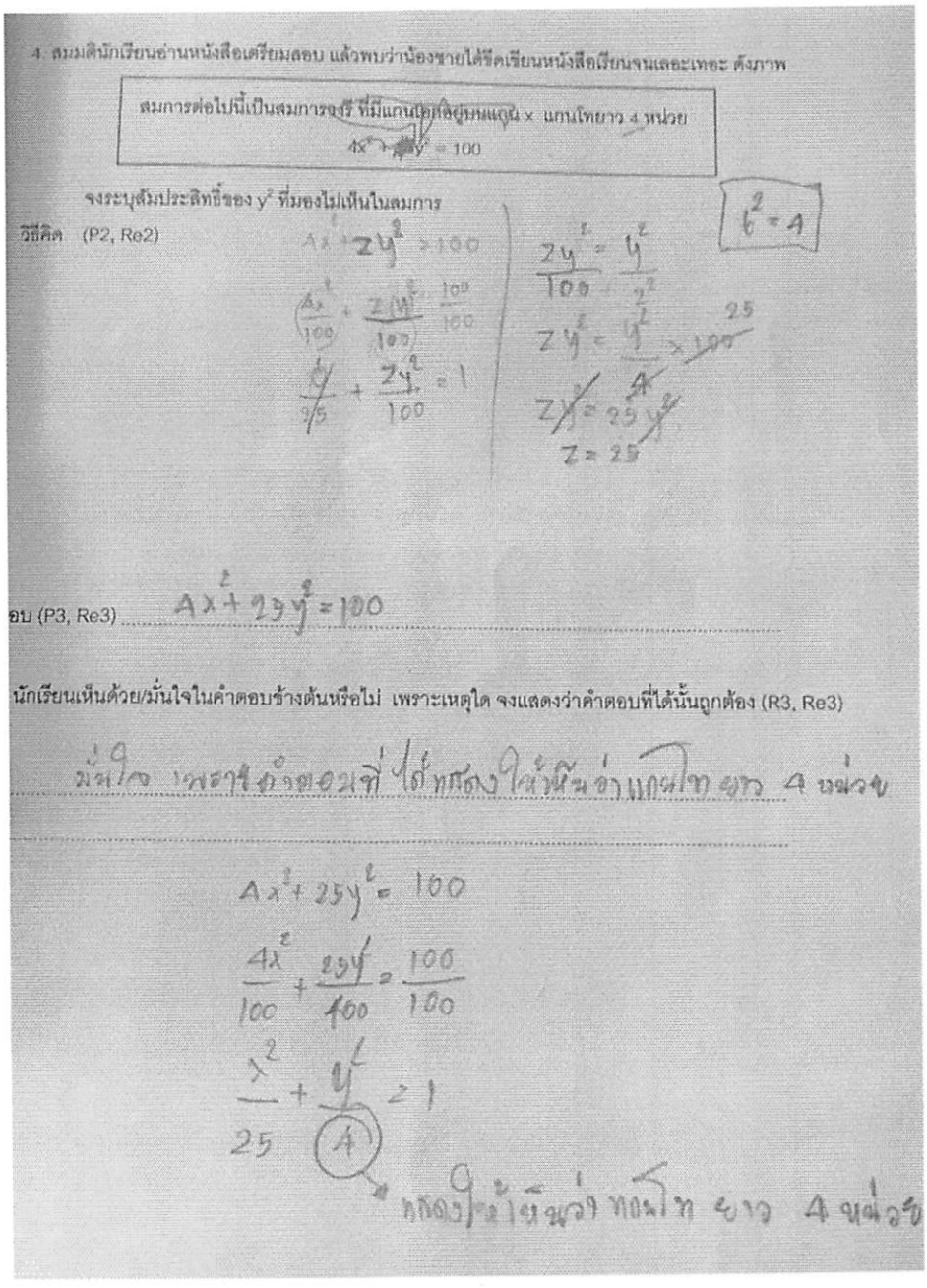
ผลการวิเคราะห์ข้อมูลจากใบกิจกรรม

ผู้วิจัยแสดงผลการวิเคราะห์จำนวนนักเรียนตามระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์จากใบกิจกรรมของวงจรปฏิบัติการที่ 2 เรื่อง วงรี ดังตาราง 20

ตาราง 20 แสดงจำนวนกลุ่มนักเรียนตามระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์จาก ใบกิจกรรมของวงจรปฏิบัติการที่ 2

	องค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์	จำนวนกลุ่มนักเรียนจำแนกตามระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ (ร้อยละ)			
		ดีมาก	ดี	พอใช้	ปรับปรุง
วงจรปฏิบัติการที่2	การแก้ปัญหา	1 (20)	3 (60)	1 (20)	-
	การให้เหตุผล	2 (40)	2 (40)	1 (20)	
	การนำเสนอตัวแทนความคิด	3 (60)	1 (20)	1 (20)	-
	ในภาพรวม	2 (40)	3 (60)	-	-

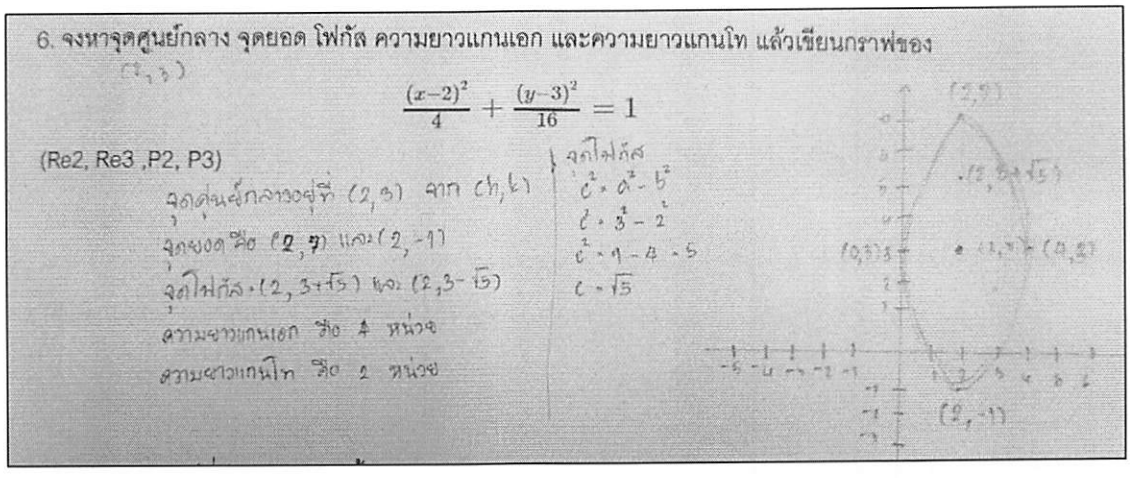
จากตาราง 20 เมื่อพิจารณาระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนเป็นรายกลุ่มโดยรวม พบว่า กลุ่มนักเรียนส่วนใหญ่มีระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์อยู่ในระดับดี จำนวน 3 กลุ่ม คิดเป็นร้อยละ 60 และเมื่อพิจารณาการคิดเชิงคณิตศาสตร์รายด้าน พบว่า ด้านการนำเสนอตัวแทนความคิดของกลุ่มนักเรียนส่วนใหญ่อยู่ในระดับดีมาก ด้านการแก้ปัญหาของกลุ่มนักเรียนส่วนใหญ่อยู่ในระดับดี และด้านการให้เหตุผลของกลุ่มนักเรียนส่วนใหญ่อยู่ในระดับดี และ พอใช้ ระดับละเท่า ๆ กัน ทั้งนี้ผู้วิจัยได้นำตัวอย่างการเขียนตอบและแสดงแนวคิดที่แสดงให้เห็นถึงความสามารถบางด้าน ดังภาพ 20 และ ภาพ 21



ภาพ 20 แสดงความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความมคิด

จากภาพ 20 แสดงความสามารถในการดำเนินการแก้ปัญหา (P2) การสรุปคำตอบของปัญหา (P3) อยู่ในระดับดีมาก เนื่องจากนักเรียนสามารถดำเนินการคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของ y^2 ได้ถูกต้อง และตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบได้ถูกต้อง สมบูรณ์ การอธิบายความสมเหตุสมผลของคำตอบ (R3) อยู่ในระดับดีมาก เนื่องจากสามารถเขียนอธิบายข้อสรุป โดยใช้

ข้อมูลจากการแสดงวิธีคิด ได้ถูกต้องและสมเหตุสมผล การนำเสนอตัวแทนความคิดในการดำเนินการแก้ปัญหา (Re2) และเพื่อสรุปคำตอบของปัญหา (Re3) ซึ่งจัดอยู่ในระดับดีมาก เนื่องจากนักเรียนใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ในการคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของ y^2 ได้ถูกต้อง และเขียนข้อความสรุปคำตอบได้อย่างเหมาะสม และสื่อความหมายได้อย่างชัดเจน



ภาพ 21 แสดงความสามารถในการแก้ปัญหา และการนำเสนอตัวแทนความมคิด

จากภาพ 21 แสดงความสามารถในการดำเนินการแก้ปัญหา (P2) การสรุปคำตอบของปัญหา (P3) อยู่ในระดับดีพอใช้ เนื่องจากนักเรียนระบุจุดศูนย์กลางของวงรี จากสมการที่กำหนดให้ได้ ใช้สูตรหรือหลักการในการคำนวณหาจุดโฟกัสถูกต้อง แต่นำค่า a และ b ที่ไม่ถูกต้องไปแทนในสูตรการคำนวณหาจุดโฟกัส รวมทั้งทำให้ระบุพิกัดของจุดยอดวงรี ไม่ถูกต้องตามไปด้วย จึงทำให้สรุปคำตอบได้ถูกต้องเพียงบางส่วน ไม่ครบถ้วนตามประเด็นที่ปัญหาต้องการทราบ การนำเสนอตัวแทนความคิดในการดำเนินการแก้ปัญหา (Re2) และเพื่อสรุปคำตอบของปัญหา (Re3) ซึ่งจัดอยู่ในระดับดี เนื่องจากนักเรียนใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ในการคำนวณหาจุดโฟกัสได้ แต่ระบุค่าของตัวแปร a และ b ไม่ถูกต้อง และวาดรูปวงรีเพื่อหาจุดยอด จุดโฟกัส ความยาวแกนเอก และความยาวแกนโทได้ และเลือกแทนค่า a และ b ที่ถูกต้อง (โดยพิจารณาจากสมการที่กำหนดให้) ทำให้สรุปคำตอบที่ถูกต้องเพียงบางส่วน คือ จุดศูนย์กลาง ความยาวแกนเอกและความยาวแกนโท แต่ระบุจุดโฟกัสไม่ถูกต้อง

2.2.3 วงจรปฏิบัติการที่ 3

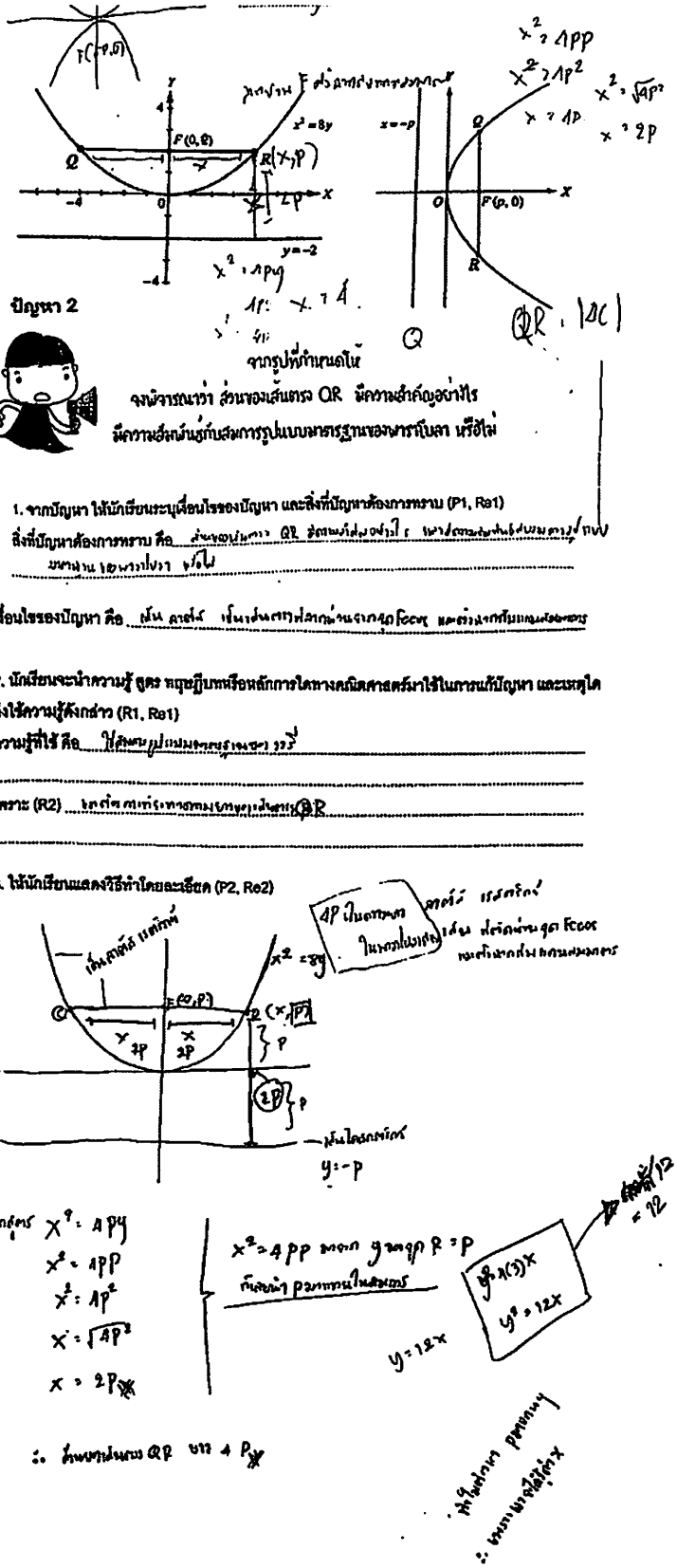
ผลการวิเคราะห์ข้อมูลจากใบกิจกรรม

ผู้วิจัยแสดงผลการวิเคราะห์จำนวนนักเรียนตามระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์จากใบกิจกรรมของวงจรปฏิบัติการที่ 3 เรื่อง พาราโบลา ดังตาราง 21

ตาราง 21 แสดงจำนวนกลุ่มนักเรียนตามระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์จาก ใบกิจกรรมของวงจรปฏิบัติการที่ 3

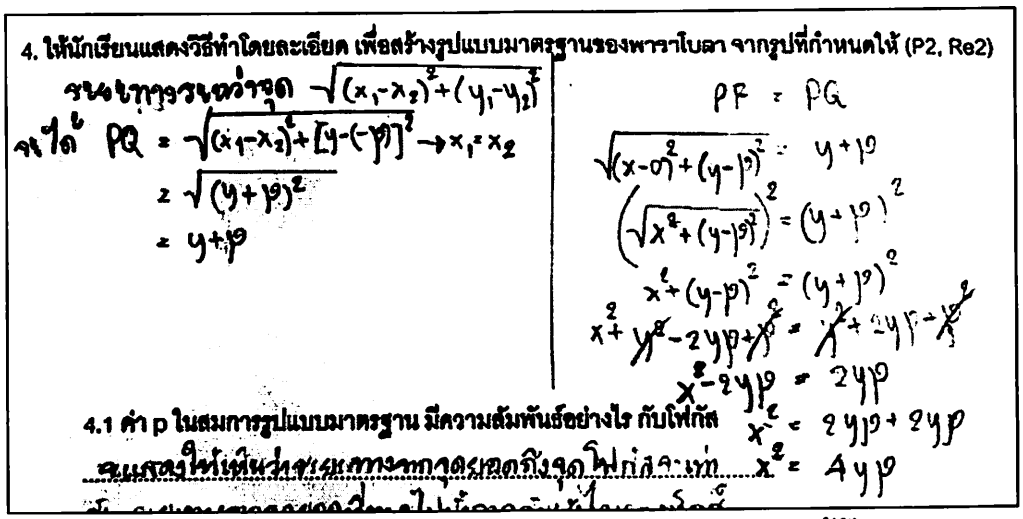
องค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์		จำนวนกลุ่มนักเรียนจำแนกตามระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ (ร้อยละ)			
		ดีมาก	ดี	พอใช้	ปรับปรุง
วงจรปฏิบัติการที่ 3	การแก้ปัญหา	2 (40)	2 (40)	1 (20)	-
	การให้เหตุผล	3 (60)	1 (20)	1 (20)	-
	การนำเสนอตัวแทนความคิด	4 (80)	1 (20)	-	-
ในภาพรวม		4 (80)	1(20)	-	-

จากตาราง 21 เมื่อพิจารณาระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนเป็นรายกลุ่มโดยรวม พบว่า กลุ่มนักเรียนส่วนใหญ่มีระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์อยู่ในระดับดีมาก จำนวน 4 กลุ่ม คิดเป็นร้อยละ 80 และเมื่อพิจารณาการคิดเชิงคณิตศาสตร์รายด้าน พบว่า ด้านการนำเสนอตัวแทนความคิดของกลุ่มนักเรียนส่วนใหญ่อยู่ในระดับดีมาก คิดเป็นร้อยละ 80 ด้านการให้เหตุผลของกลุ่มนักเรียนส่วนใหญ่อยู่ในระดับดีมาก คิดเป็นร้อยละ 60 และด้านการแก้ปัญหาของกลุ่มนักเรียนส่วนใหญ่อยู่ในระดับดี และ พอใช้ ระดับละเท่า ๆ กัน ทั้งนี้ผู้วิจัยได้นำตัวอย่างการเขียนตอบและแสดงแนวคิดที่แสดงให้เห็นถึงความสามารถบางด้าน ดังภาพ 22



ภาพ 22 แสดงความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความมคิด

จากภาพ 22 แสดงการทำความเข้าใจปัญหา (P1) ซึ่งอยู่ในระดับดีมาก เนื่องจากนักเรียนระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบและเงื่อนไขของปัญหาได้ถูกต้องและครบถ้วน การดำเนินการแก้ปัญหา (P2) ซึ่งอยู่ในระดับดีมาก เนื่องจากนักเรียนสามารถใช้สูตร ทฤษฎีบท หรือหลักการทางคณิตศาสตร์เพื่อแสดงการแก้ปัญหาได้ถูกต้อง และครบทุกขั้นตอน การสรุปคำตอบของปัญหา (P3) ซึ่งอยู่ในระดับดีมาก เนื่องจากนักเรียนสรุปคำตอบได้ถูกต้องและครบถ้วนตามประเด็นที่ปัญหาต้องการทราบ การอธิบายเหตุผลของการนำความรู้หรือข้อมูลมาใช้เพื่อทำความเข้าใจปัญหา (R1) ซึ่งอยู่ในระดับดีมาก เนื่องจากนักเรียนระบุความสอดคล้องระหว่างสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบกับเงื่อนไขของปัญหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องได้ถูกต้อง การอธิบายเหตุผลของการดำเนินการแก้ปัญหา (R2) ซึ่งอยู่ในระดับดีมาก เนื่องจากนักเรียนอธิบายเหตุผลของการดำเนินการแก้ปัญหาได้อย่างสมเหตุสมผล การอธิบายความสมเหตุสมผลของคำตอบของปัญหา (R3) ซึ่งอยู่ในระดับดีมาก เนื่องจากนักเรียนระบุความสอดคล้องระหว่างคำตอบและเงื่อนไขของปัญหาได้ถูกต้อง การใช้ตัวแทนความคิดเพื่อทำความเข้าใจปัญหา (Re1) ซึ่งอยู่ในระดับดีมาก เนื่องจากนักเรียนเขียนแผนภาพ หรือกำหนดสัญลักษณ์จากปัญหาเพื่อระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบและเงื่อนไขของปัญหาได้อย่างเหมาะสม และสื่อความหมายได้อย่างชัดเจน การใช้ตัวแทนความคิดในการดำเนินการแก้ปัญหา (Re2) ซึ่งอยู่ในระดับดีมาก เนื่องจากนำสัญลักษณ์ รูปภาพ หรือข้อความมาแสดงการดำเนินการการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม และสื่อความหมายได้อย่างชัดเจน การใช้ตัวแทนความคิดเพื่อสรุปคำตอบของปัญหา (Re3) ซึ่งอยู่ในระดับดีมาก เนื่องจากนักเรียนนำสัญลักษณ์ แผนภาพ รูปภาพ กราฟ หรือข้อความมาใช้สรุปคำตอบได้อย่างเหมาะสม และสื่อความหมายได้อย่างชัดเจน



ภาพ 23 แสดงความสามารถในการดำเนินการแก้ปัญหา

จากภาพ 23 แสดงความสามารถในการดำเนินการแก้ปัญหาและใช้ตัวแทนความคิดในการดำเนินการแก้ปัญหา ในใบกิจกรรมที่ 3 เรื่องพาราโบลา ซึ่งจัดอยู่ในระดับดีมาก เนื่องจากนักเรียนดำเนินการสร้างรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาตามแผนที่วางไว้หรือคิดคำนวณได้ถูกต้อง และใช้สูตรการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด ร่วมกับนิยามของพาราโบลา เพื่อแสดงการสร้างรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาได้ถูกต้อง และครบทุกขั้นตอน

นอกจากนี้ ผู้วิจัยวิเคราะห์ระดับของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ (รายด้าน) จากการเขียนคำตอบในใบกิจกรรมของนักเรียน ในภาพรวม ทั้ง 3 ใบกิจกรรม เมื่อสิ้นสุดการจัดการเรียนรู้ พบว่านักเรียนมีพัฒนาการในระดับที่ดีขึ้นในทุกองค์ประกอบย่อย รายละเอียดดังตาราง 22

ตาราง 22 แสดงจำนวนนักเรียนตามระดับของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ (รายด้าน) จากทั้ง 3 ใบกิจกรรม

วงจรปฏิบัติการที่	องค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์	ระดับคุณภาพ			
		ดีมาก	ดี	พอใช้	ปรับปรุง
1	การแก้ปัญหา	-	2 (40)	2 (40)	1 (20)
	การให้เหตุผล	-	2 (40)	2 (40)	1 (20)
	การนำเสนอตัวแทนความคิด	-	3 (60)	2 (40)	-
2	การแก้ปัญหา	1 (20)	3 (60)	1 (20)	-
	การให้เหตุผล	3 (60)	1 (20)	1 (20)	-
	การนำเสนอตัวแทนความคิด	3 (60)	1 (20)	1 (20)	-
3	การแก้ปัญหา	2 (40)	2 (40)	1 (20)	-
	การให้เหตุผล	3 (60)	1 (20)	1 (20)	-
	การนำเสนอตัวแทนความคิด	4 (80)	1 (20)	-	-

จากตาราง 22 แสดงจำนวนนักเรียนตามระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ (รายด้าน) จากทั้ง 3ใบกิจกรรม เมื่อพิจารณาตามระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์รายด้าน พบว่า

ด้านการแก้ปัญหา ในใบกิจกรรมที่ 1 นักเรียนส่วนใหญ่มีระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการแก้ปัญหา อยู่ระดับ 0–1 คือ ควรปรับปรุงและพอใช้ สำหรับใบกิจกรรมที่ 2 นักเรียนส่วนใหญ่มีระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการแก้ปัญหาอยู่ในระดับ 2 และในใบกิจกรรมที่ 3 นักเรียน

มีระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการแก้ปัญหา อยู่ในระดับ 2 – 3 ซึ่งจากสิ่งที่กล่าวมา แสดงให้เห็นถึงว่าการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการแก้ปัญหา ได้รับการพัฒนาขึ้น และในขณะเดียวกัน นักเรียนที่อยู่ในระดับปรับปรุงและพอใช้ ก็ลดลงตามลำดับ และเมื่อพิจารณาในภาพรวมทั้ง 3 ใบกิจกรรม พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการแก้ปัญหาอยู่ในระดับ ดี

ด้านการให้เหตุผล ในใบกิจกรรมที่ 1 นักเรียนส่วนใหญ่มีระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการให้เหตุผล อยู่ระดับ 0–1 คือ ควรปรับปรุงและพอใช้ สำหรับใบกิจกรรมที่ 2 นักเรียนส่วนใหญ่มีระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการให้เหตุผลอยู่ในระดับ 2 และในใบกิจกรรมที่ 3 นักเรียนมีระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการให้เหตุผล อยู่ในระดับ 3 ซึ่งจากสิ่งที่กล่าวมา แสดงให้เห็นถึงว่าการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการให้เหตุผล ได้รับการพัฒนาขึ้น และในขณะเดียวกัน นักเรียนที่อยู่ในระดับปรับปรุงและพอใช้ ก็ลดลงตามลำดับ และเมื่อพิจารณาในภาพรวมทั้ง 3 วงจร พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการให้เหตุผลอยู่ในระดับ ดี

ด้านการนำเสนอตัวแทนความคิด ในใบกิจกรรมที่ 1 นักเรียนส่วนใหญ่มีระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการนำเสนอตัวแทนความคิด อยู่ระดับ 2 สำหรับใบกิจกรรมที่ 2 และใบกิจกรรมที่ 3 นักเรียนส่วนใหญ่มีระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการนำเสนอตัวแทนความคิด ในระดับ 3 คือ ระดับดีมาก ซึ่งจากสิ่งที่กล่าวมา แสดงให้เห็นถึงว่าการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการนำเสนอตัวแทนความคิด ได้รับการพัฒนาขึ้น และในขณะเดียวกัน นักเรียนที่อยู่ในระดับปรับปรุงและพอใช้ ก็ลดลงตามลำดับ และเมื่อพิจารณาในภาพรวมทั้ง 3 วงจร พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการให้เหตุผลอยู่ในระดับ ดีมาก

จากที่กล่าวมาข้างต้นเมื่อเปรียบเทียบระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์รายด้าน ที่ได้วิเคราะห์จากใบกิจกรรม พบว่าจำนวนนักเรียนมากขึ้นในระดับที่ดีขึ้น ตามใบกิจกรรมที่ได้จากวงจรปฏิบัติการที่ 1, 2 และ 3 แสดงให้เห็นว่านักเรียนได้มีการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้น และแสดงให้เห็นว่าการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นสามารถพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนได้

2.3 การคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์

ผู้วิจัยเสนอผลคะแนนจากการทำแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนตามองค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย 1) การแก้ปัญหา 2) การให้เหตุผล และ 3) การนำเสนอตัวแทนความคิด เพื่อแสดงความสอดคล้องระหว่างระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนในวงจรปฏิบัติการที่ 3 และผลการทำแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

ตาราง 23 ระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการแก้ปัญหาของนักเรียนในวงจรปฏิบัติการที่ 3 และแบบทดสอบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์

องค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์	วงจรปฏิบัติการที่ 3				แบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์			
	จำนวนกลุ่มนักเรียน (ร้อยละ)				จำนวนนักเรียน (ร้อยละ)			
	ดีมาก	ดี	พอใช้	ปรับปรุง	ดีมาก	ดี	พอใช้	ปรับปรุง
การแก้ปัญหา	2 (40)	2 (40)	1 (20)	-	9 (36)	12 (48)	4 (16)	-
การให้เหตุผล	3 (60)	1 (20)	1 (20)	-	9 (36)	13 (52)	-	3 (12)
การนำเสนอตัวแทนความคิด	4 (80)	1 (20)	-	-	7 (28)	6 (24)	7 (28)	5 (20)

จากตาราง 23 พบว่า นักเรียนมีการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการแก้ปัญหาในใบกิจกรรมที่ 3 อยู่ในระดับดี และดีมาก เป็นสัดส่วนที่เท่ากัน ส่วนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการแก้ปัญหาจากแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ ดี

ด้านการให้เหตุผล นักเรียนส่วนใหญ่มีการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการให้เหตุผลในใบกิจกรรมที่ 3 อยู่ในระดับ ดีมาก ส่วนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการให้เหตุผลจากแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ ดี

การนำเสนอตัวแทนความคิด นักเรียนส่วนใหญ่มีการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการนำเสนอตัวแทนความคิดในใบกิจกรรมที่ 3 อยู่ในระดับ ดีมาก ส่วนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการนำเสนอตัวแทนความคิดจากแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ ดีมาก ดี พอใช้ และปรับปรุง ในจำนวนที่ใกล้เคียงกัน

บทที่ 5

บทสรุป

การวิจัยเชิงปฏิบัติการในชั้นเรียน เรื่อง การจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีจุดมุ่งหมายเพื่อ 1) ศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 2) เพื่อศึกษาผลการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ โดยใช้รูปแบบการวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียนสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562 จำนวน 25 คนของโรงเรียนมัธยมศึกษาแห่งหนึ่งในจังหวัดกำแพงเพชร ดำเนินการจัดการเรียนรู้ทั้งหมด 3 แผนการจัดการเรียนรู้ ได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง วงกลม แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง วงรี และแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง พาราโบลา ใช้เวลาจัดการเรียนรู้แผนละ 5 ชั่วโมง รวมทั้งหมด 15 ชั่วโมง โดยมีเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ดังนี้ แผนการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ ใบกิจกรรม และแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ โดยมีผลการวิจัย ดังนี้

สรุปผลการวิจัย

1. แนวทางการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ผู้วิจัยได้ดำเนินการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ มีประเด็นที่ควรเน้น ดังต่อไปนี้

ขั้นการปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์การเรียนรู้และการทำงานทางคณิตศาสตร์ (Anticipating)

ครูควรออกแบบหรือคัดเลือกงานทางคณิตศาสตร์ส่งเสริมให้เกิดการเรียนรู้เชิงรุก เน้นงานทางคณิตศาสตร์แบบใช้ขั้นตอนวิธีและมีการเชื่อมโยง เพื่อให้นักเรียนได้ใช้แนวคิดหรือกลวิธีใน

การแก้ปัญหา ให้งานที่ง่ายก่อน และค่อย ๆ เพิ่มระดับความซับซ้อนขึ้นเรื่อย ๆ ซึ่งลักษณะของงานที่เป็นโจทย์ปัญหา ควรเป็นปัญหาปลายเปิดเชิงกระบวนการ หรือ เป็นสถานการณ์ปัญหาทางเรขาคณิตวิเคราะห์ที่มีคำตอบมาให้หลายทางเลือก และให้นักเรียนอภิปรายเพื่อเลือกคำตอบที่เห็นด้วย พร้อมทั้งแสดงเหตุผลในการเลือกคำตอบนั้น และควรคัดเลือกและออกแบบงานให้เหมาะสมกับระยะเวลาในการจัดกิจกรรม เพื่อให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการแก้ปัญหามากที่สุด

ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ (Launching)

นำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์โดยใช้รูปแบบที่เหมาะสมกับผู้เรียน ควรปรับเปลี่ยนไปตามสภาพจริงของผู้เรียน ร่วมกับกระตุ้นความรู้เดิมและการตรวจสอบความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน

สำหรับนักเรียนที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง (กลุ่มเก่ง) เมื่อมีความคุ้นเคยกับแนวปฏิบัติ 5 ขั้น ที่ผู้วิจัยใช้ในการจัดการเรียนรู้นี้แล้ว บทบาทของครูที่เหมาะสม คือแจกในงานแนะนำการใช้ใบงานหรือสื่อการเรียนรู้ต่าง ๆ โดยการให้นักเรียนเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง ลดบทบาทของครูในขั้นนี้ให้เหลือน้อยที่สุด และต้องกระตุ้นให้นักเรียนได้ทำความเข้าใจปัญหาด้วยตนเอง

สำหรับนักเรียนที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำ (กลุ่มกลาง – อ่อน) ครูควรเริ่มต้นจากงานหรือกิจกรรมที่เชื่อมโยงกับความรู้และทักษะเดิมของนักเรียน และอธิบายปัญหาและทำความเข้าใจ ชี้แจงงานให้ชัดเจนเพื่อให้ผู้เรียนคิดเกี่ยวกับงานในระยะแรก และช่วยเหลือนักเรียนจนกระทั่งนักเรียนสามารถเข้าใจงานและมีแนวคิดเกี่ยวกับงาน

ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน (Monitoring)

ครูทำหน้าที่อำนวยการอภิปรายในชั้นเรียน ใส่ใจแนวคิดและวิธีการแก้ปัญหาของนักเรียนในขณะที่ นักเรียนกำลังแก้ปัญหาหรืออภิปรายภายในกลุ่ม ใช้เวลาส่วนใหญ่ในการสังเกตการพูดและการเขียนเพื่อประเมินนักเรียนในขณะทำงานหรือการอภิปรายในกลุ่มเล็ก การใช้คำถามเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจตัวปัญหาและงานที่ต้องทำ โดยเน้นการใช้คำถามที่ถามเพื่อชี้แนะให้นักเรียนได้ทราบวัตถุประสงค์ในคาบเรียน

ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน (Selecting and Sequencing)

ครูเลือกงานของนักเรียนที่ช่วยให้ชั้นเรียนเกิดการอภิปรายเชิงคณิตศาสตร์และนำไปสู่วัตถุประสงค์ของบทเรียน โดยไม่ต้องให้นักเรียนนำเสนอผลงานครบทุกกลุ่ม และการจัดลำดับควรพิจารณาจากผลการทำงานทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอตัวแทนความคิดในการดำเนินการแก้ปัญหาและสรุปคำตอบของปัญหาตามความเหมาะสม ซึ่งเมื่อนักเรียนคุ้นเคยกับแนวทางการ

จัดการเรียนรู้ที่เน้นการอภิปรายนี้แล้วนักเรียนจะอาสานำเสนอด้วยตนเอง โดยที่ครูลดบทบาทการจัดลำดับเพื่อกระชับเวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ทั้งนี้ ถ้าไม่มีนักเรียนที่อาสาออกมาอภิปราย ผู้วิจัยสุ่มเลือกตัวแทนกลุ่มที่เลือกแนวคิดหรือวิธีการแก้ปัญหาที่แตกต่างกัน เพื่อออกมานำเสนอหน้าชั้นเรียนแนวคิดละ 1 กลุ่ม

ขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่ (Connecting)

ขั้นนี้เป็นขั้นการปฏิบัติที่สำคัญเพราะว่าเป็นขั้นสรุปรวบยอดแนวคิดเชิงคณิตศาสตร์ ครูควรกำหนดสิ่งที่นักเรียนควรอภิปรายใช้ชัดเจน ให้นักเรียนพิจารณาเปรียบเทียบแนวคิดหรือวิธีการจากข้อสรุปต่าง ๆ และเชื่อมโยงไปสู่การสรุปเป็นความรู้ใหม่ ผ่านการใช้คำถามอภิปรายสรุป เช่น "ใครได้คำตอบที่แตกต่างจากนี้บ้าง" "เราได้ค้นพบทุกคำตอบที่เป็นไปได้หรือยัง" "เห็นด้วยกับแนวคิดของเพื่อนหรือไม่" "สิ่งที่เพื่อนพูด มีอะไรขาดหายไปไหม" "ถ้าจะเพิ่มเติมแนวคิดของเพื่อนให้ดีขึ้น จะเพิ่มเติมอย่างไร" ทำให้นักเรียนฝ่ายที่เป็นผู้ฟังได้แสดงแนวคิดสนับสนุนหรือโต้แย้งกับผู้อภิปราย

2. ผลการเปรียบเทียบคะแนนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 70 ของคะแนนเต็ม (เต็ม 54 คะแนน) แสดงผลดังตาราง 18

จากผลการวิจัยพบว่า คะแนนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนในหลังการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) เท่ากับ 41.64 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (sd.) เท่ากับ 7.16 คิดเป็นร้อยละ 77.11 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 ของคะแนนเต็ม (คิดเป็น 37.8 คะแนน จาก 54 คะแนน) อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

3. ผลการศึกษาพัฒนาการของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ระหว่างวงจรปฏิบัติการทั้ง 3 วงจร

จากผลการวิจัย เมื่อเปรียบเทียบระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์รายด้าน พบว่าจำนวนนักเรียนมากขึ้นในระดับที่ดีขึ้น ตามใบกิจกรรมที่ได้จากวงจรปฏิบัติการที่ 1, 2 และ 3 แสดงให้เห็นว่านักเรียนได้มีการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้น และแสดงให้เห็นว่าการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นสามารถพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนได้

4. การคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์

จากผลการวิจัย พบว่าระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนในวงจรปฏิบัติการที่ 3 ไม่สอดคล้องกับผลการทำแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ กล่าวคือ ผลการคิดเชิงคณิตศาสตร์มีความน่าเชื่อถือของข้อมูลด้านวิธีการรวบรวมข้อมูล พบว่าข้อมูลจากการวิเคราะห์ใบกิจกรรม นักเรียนส่วนใหญ่มีระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการให้เหตุผลและด้านการนำเสนอตัวแทนความคิดอยู่ในระดับดีมาก และด้านการแก้ปัญหาอยู่ในระดับดีและดีมากในสัดส่วนที่เท่ากัน

แต่ข้อมูลจากแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านการแก้ปัญหาและด้านการให้เหตุผลอยู่ในระดับ ดี และด้านการนำเสนอตัวแทนความคิดอยู่ในระดับ ดีมาก ดี พอใช้ และปรับปรุง ในจำนวนที่ใกล้เคียงกัน

อภิปรายผลการวิจัย

ผลการวิจัยปฏิบัติการเพื่อพัฒนาการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สามารถอภิปรายผลการวิจัยได้ดังต่อไปนี้

แนวทางการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

การจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ นั้นเป็นการจัดการเรียนรู้ที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้สนทนา อภิปราย และถ่ายทอดความรู้ มีโอกาสได้แสดงความคิดของตนเอง รวมถึงมีโอกาสได้ฝึกการเขียนโดยใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง ดังนั้นกิจกรรมส่วนใหญ่จะต้องเน้นให้นักเรียนทำกิจกรรมกลุ่มและมีส่วนร่วมอย่างกระตือรือร้น ผู้วิจัยได้สำรวจและวิเคราะห์ปัญหาที่เกิดขึ้นในชั้นเรียน ทำให้เข้าใจถึงสภาพปัญหาในชั้นเรียน โดยแต่ละขั้นตอนมีประเด็นในเรื่องปัญหาและอุปสรรครวมถึงแนวทางพัฒนาการจัดการเรียนรู้ดังต่อไปนี้

ขั้นการปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์การเรียนรู้และการทำงานทางคณิตศาสตร์ (Anticipating) ในการปฏิบัตินี้ แนวทางการออกแบบงานทางคณิตศาสตร์จากงานวิจัยนี้ ได้แสดงให้เห็นการให้ความสำคัญต่อการคัดเลือกงานทางคณิตศาสตร์ ต้องเป็นงานที่เปิดโอกาสให้นักเรียนสามารถเลือกใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาที่หลากหลายและแตกต่างกันส่งผลให้นักเรียนสามารถ

ค้นหาวิธีการแก้ปัญหาด้วยตนเอง ซึ่งสอดคล้องกับ Cai และ Lester (2010) ที่ได้นำเสนอว่า งานทางคณิตศาสตร์ที่ครูมอบหมายให้นักเรียนเพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ควรเป็นงานทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนสามารถใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาที่แตกต่างกัน นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2546) ที่ได้นำเสนอลักษณะงานที่นักเรียนได้รับมอบหมาย ต้องเป็นงานที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้เรียนรู้จากการค้นหาวิธีการแก้ปัญหาด้วยตนเอง ซึ่งทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างมีความหมายและเป็นการแสดงถึงความรู้ ประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ (Launching) ในการปฏิบัตินี้ปัญหาที่พบในช่วงแรกคือ นักเรียนไม่สามารถเข้าใจงานที่ต้องทำได้ ครูจึงพัฒนางานทางคณิตศาสตร์ในวงจรปฏิบัติการต่อมาให้มีความชัดเจน จัดลำดับการมอบหมายงานที่ง่าย ๆ ให้กับนักเรียนเพื่อเร้าความสนใจของนักเรียนเสียก่อน ซึ่งควรจะคำนึงถึงประสบการณ์และทักษะเดิมที่นักเรียนมีอยู่ รวมทั้งการปรับบทบาทของครูโดยใช้การนำเสนองานทางคณิตศาสตร์ควบคู่กับการใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนทำความเข้าใจปัญหาและหายุทธวิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลาย เมื่อมีกลุ่มที่ไม่เข้าใจปัญหา แต่ทั้งนี้ผู้วิจัยยังคงมุ่งเน้นที่การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ โดยให้นักเรียนร่วมกันอ่านใบกิจกรรมและอภิปรายร่วมกันในกลุ่มเล็ก และใช้คำถามกระตุ้นเฉพาะกลุ่มที่ไม่สามารถทำความเข้าใจงานได้ ดังนั้นบทบาทหลักของนักเรียนในขั้นนี้คือการให้นักเรียนอ่านใบกิจกรรม แล้วเข้าสู่ปัญหาด้วยตนเอง แล้วให้นักเรียนอภิปรายในกลุ่มเล็กเพื่อหายุทธวิธีในการแก้ปัญหาอย่างหลากหลายในการแก้ปัญหา ตามความสามารถของนักเรียนที่มีอยู่ ทั้งนี้สิ่งสำคัญที่ช่วยให้นักเรียนเข้าสู่ปัญหาเองได้ก็คือ คำสั่งหรือปัญหาเชิงปลายเปิดที่สนับให้นักเรียนหายุทธวิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลาย นำไปสู่การอภิปรายทั้งชั้นเรียนได้ สอดคล้องกับ คำกล่าวของ Wilson (1996, p. 18–20) ที่ได้กล่าวว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ผ่านการลงมือปฏิบัติจริงเป็นการเรียนรู้ที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้สร้างความรู้ด้วยตนเอง โดยอาศัยการใช้ความรู้เดิมที่มีมาก่อน และจากการที่นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติจริง เพื่อนำไปสู่การสร้างความรู้ใหม่ ทำให้นักเรียนได้คิดวิธีแก้ปัญหาด้วยตนเอง ได้ทดสอบแนวคิดใหม่ ๆ ร่วมกับผู้อื่น และได้เสนอวิธีแก้ปัญหาที่ดีที่สุดที่ตนเองสามารถคิดค้น ขึ้นมาได้ และยังสอดคล้องกับงานวิจัยของสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2014) ที่ได้นำเสนอการใช้งานทางคณิตศาสตร์ในการส่งเสริมการให้เหตุผลและการแก้ปัญหา โดยการใช้งานทางคณิตศาสตร์ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่ทำให้การเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนมีประสิทธิภาพขึ้น และก็เป็นอีกวิธีหนึ่งที่สามารถกระตุ้นให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้และสร้าง

ความรู้ทางคณิตศาสตร์ใหม่ ๆ ผ่านการลงมือปฏิบัติจริง โดยครูจะเป็นผู้คอยกระตุ้นให้นักเรียนได้คิดแนวทาง และสามารถแก้ปัญหาด้วยตนเอง

ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน (Monitoring) ในการปฏิบัตินี้ บทบาทที่สำคัญของครูคือส่งเสริมให้นักเรียนได้เรียนรู้วิธีการด้วยตนเอง ครูพยายามทำความเข้าใจและตรวจสอบความรู้เดิม/แนวคิดหรือวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ โดยการสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ที่นักเรียนแสดงออกต่องานทางคณิตศาสตร์ และส่งเสริมให้เกิดการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ สนับสนุนให้เกิดการคิดเชิงคณิตศาสตร์โดยใช้คำถามนักเรียนสามารถแสดงวิธีการคิด สรุปวิธีการคิดลงในใบกิจกรรม ทำให้ครูนำเอาแนวคิดที่นักเรียนได้รับไปใช้ในการออกแบบงานทางคณิตศาสตร์ในบทเรียนต่อไปเพื่อพัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์ให้ดีขึ้น แสดงให้เห็นการให้ความสำคัญกับการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในเชิงการสอนจนทำให้ชั้นเรียนเกิดการเปลี่ยนแปลง สอดคล้องกับ Stenberg et al. (2004) ได้ศึกษาเกี่ยวกับ การใช้วิธีการสืบเสาะในการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกับการเปลี่ยนแปลงครู พบว่าปัจจัยนั้นเกิดจากการมีส่วนร่วมในการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการสื่อสาร การทำให้เกิดการสนทนา การสื่อสารระหว่างครูกับนักเรียนและนักเรียนกับนักเรียนในขณะที่มีการแก้ปัญหา เป็นกระบวนการเพื่อทำให้เกิดการสะท้อนกลับ การโต้แย้งและการวัดความรู้ใหม่

ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน (Selecting and Sequencing) เป็นขั้นการปฏิบัติที่มีความสำคัญไม่ต่างจากแนวปฏิบัติอื่น เนื่องจากการที่ครูได้คัดเลือกแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน จัดลำดับการนำเสนอและอภิปรายอย่างเหมาะสม ทำให้นักเรียนสร้างแนวคิดใหม่จากการขยายและพัฒนาแนวคิดผ่านการเรียบเรียงที่หลากหลายของผู้อื่น การเปรียบเทียบความเหมือนหรือความต่างของแนวคิด ซึ่งสอดคล้องกับ Namiki and Shimizu (2012) ได้กล่าวถึง ธรรมชาติของงานทางคณิตศาสตร์ในลำดับการสอน บทบาทและความสัมพันธ์ของการนำเสนองานทางคณิตศาสตร์ต้องพิจารณาเกี่ยวกับเนื้อหาของประสบการณ์ในชั้นเรียนที่เกิดขึ้นก่อนหน้าของบทเรียน และยังสอดคล้องกับ คำกล่าวของ ยุพิน พิพิธกุล (2539) ที่ได้กล่าวไว้ว่า กิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ควรเปิดโอกาสให้นักเรียนได้เรียนรู้จากเรื่องง่ายไปสู่เรื่องยาก เปลี่ยนจากรูปธรรมไปสู่นามธรรม ใช้ความสนใจของนักเรียนเป็นจุดเริ่มต้น

ขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่ (Connecting) เป็นกิจกรรมที่เน้นการพูดแลกเปลี่ยนอภิปรายความคิด และข้อสรุปจากการทำงานทางคณิตศาสตร์ จากการเขียนโดยใช้สัญลักษณ์ รูปภาพ สมการ เพื่อสรุปเป็นความรู้ใหม่ และให้นักเรียนได้นำเสนอและอภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียนเกี่ยวแนวคิดหรือวิธีการของตนเองและเพื่อน

เพื่อให้ได้ข้อสรุปของแนวคิดหรือวิธีการในประเด็นต่าง ๆ รวมถึงเชื่อมโยงแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่ ทำให้นักเรียนได้เห็นถึงแนวคิดหรือวิธีการที่หลากหลายของเพื่อนทั้งที่ถูกต้องและมีข้อผิดพลาด ได้ตรวจสอบความถูกต้องของแนวคิดหรือวิธีการทั้งของตนเองและเพื่อน ทำให้นักเรียนเกิดความรู้ความเข้าใจในแนวคิดหรือวิธีการที่ชัดเจนยิ่งขึ้น และได้ใช้ความรู้ความเข้าใจในการทำความเข้าใจแนวคิดหรือวิธีการของเพื่อน รวมถึงนักเรียนได้ฝึกเชื่อมโยงข้อมูลและข้อสรุปต่าง ๆ มาสร้างเป็นความรู้ใหม่ด้วยตนเองและได้ฝึกใช้ความรู้ที่สร้างขึ้นอย่างเป็นระบบ ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของ Lloyd (1999) ได้กล่าวว่า ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ครูต้องเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงแนวคิด ขั้นตอนวิธีการในการแก้ปัญหาร่วมกัน รวมทั้งการตั้งคำถามที่เกี่ยวข้องกับยุทธวิธีแก้ปัญหาของนักเรียนแต่ละคน นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับแนวคิดของ Stigler, Gallimore and Hiebert (1999) ที่ได้กล่าวว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์นักเรียนควรได้มีโอกาสแลกเปลี่ยนแนวคิด การอธิบายแสดงแนวคิด และร่วมกันวิเคราะห์เกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการดำเนินการแก้ปัญหา จะทำให้นักเรียนเกิดการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และยังทำให้นักเรียนค้นพบด้วยตนเองได้ดีกว่าการจัดการเรียนรู้ในแบบเดิมที่ครูเน้นการอธิบาย และสาธิตขั้นตอนวิธีการก่อนลงมือแก้ปัญหา

2. ผลการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์

ผลการวิจัยเพื่อพัฒนาทักษะการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้วยการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ สำหรับนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แสดงให้เห็นว่าขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์สามารถพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ได้ เมื่อพิจารณาคะแนนการคิดเชิงคณิตศาสตร์หลังเรียน เทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 70 ของคะแนนเต็ม เป็นผลมาจากการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เป็นการจัดการเรียนรู้ที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้สนทนา อภิปราย และถ่ายทอดความรู้ มีโอกาสได้แสดงความคิดของตนเอง รวมถึงมีโอกาสได้ฝึกการเขียนโดยใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง ทำให้นักเรียนมีความเข้าใจในเนื้อหาอย่างถูกต้อง ชัดเจนและเป็นระบบ โดยขั้นการปฏิบัติที่ 2 3 และ 5 เป็นขั้นที่เน้นให้นักเรียนได้ฝึกใช้ความรู้ความเข้าใจเพื่อนำไปสร้างความรู้ใหม่ด้วยตนเอง และสรุปความรู้นั้นด้วยความเข้าใจของตนเอง ส่งผลให้นักเรียนมีความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้น สอดคล้องกับแนวคิดของ Bruner (1960) ที่กล่าวว่า การให้นักเรียนค้นพบความรู้ด้วยตนเองเป็นวิธีการที่ช่วยสนับสนุน

1. **ด้านการแก้ปัญหา** นักเรียนสามารถทำความเข้าใจปัญหาโดยการระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการ ทราบและเงื่อนไขของปัญหาได้ สามารถดำเนินการแก้สถานการณ์ปัญหาด้วยการการนำสูตร ทฤษฎี หรือ หลักการทางคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้ และสามารถสรุปคำตอบได้ตรงประเด็นตามสิ่งที่ปัญหาต้องการ ทราบและสอดคล้องกับเงื่อนไขของปัญหา เพราะนักเรียนได้วางแผนและดำเนินการแก้ปัญหาด้วยตนเองผ่านการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ซึ่งสอดคล้องกับ ณัฐวุฒิ พันธุลี (2559) ที่กล่าวว่า การใช้การอำนวยการวาทกรรมชั้นเรียนเพื่อพัฒนายุทธวิธีการเรียนรู้โดยการกำกับตนเองของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่เน้นการแก้ปัญหานั้นเป็นสิ่งที่จำเป็นและสำคัญ เนื่องด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วย การคาดการณ์แนวคิด การคอยกำกับติดตามแนวคิด การเลือกแนวคิด การเรียงลำดับแนวคิด และการเชื่อมโยงแนวคิดของนักเรียน จะเป็นสิ่งที่ช่วยให้ครูสามารถทำความเข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นสำหรับใช้ในการแก้ปัญหาของนักเรียนได้อย่างมีประสิทธิภาพ

2. **ด้านการให้เหตุผล** นักเรียนสามารถให้เหตุผลในการระบุความรู้ที่ใช้เพื่อกำหนดแนวทางการแก้ปัญหา พร้อมทั้งสามารถดำเนินการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบได้อย่างสมเหตุสมผล เนื่องจากนักเรียนได้รับการแนะนำโดยการตั้งคำถามเกี่ยวกับที่มาและเหตุผลของการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ซึ่งช่วยฝึกการให้เหตุผลรองรับวิธีการดำเนินการและได้มีโอกาสตรวจสอบความสมเหตุสมผลของวิธีการแก้ปัญหาของตน ซึ่งสอดคล้องกับ Baroody et al. (2015) ที่พบว่า จำนวนครั้งในการแนะแนวทางของครูแปรผันตรงกับระดับของการให้เหตุผลของนักเรียน และยังสอดคล้องกับ วรนารถ อยู่สุข (2555) ที่กล่าวว่าแนวทางการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์นั้น ครูควรจัดบรรยากาศแวดล้อมให้นักเรียนได้คิดวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ร่วมกับการให้เหตุผลผ่านการอธิบายและเขียนบรรยายเกี่ยวกับข้อคาดการณ์หรือข้อสรุปไปสู่การตัดสินใจหรือยืนยันข้อสรุปได้อย่างสมเหตุสมผล

3. **ด้านการเสนอตัวแทนความคิด** แม้ว่านักเรียนจะสามารถใช้การขีดเส้นใต้ การคัดลอก ข้อความ ตัวแปรหรือสัญลักษณ์ และรูปภาพเพื่อทำความเข้าใจปัญหา แสดงการดำเนินการแก้ปัญหา และสรุปคำตอบได้ แต่กระนั้นสถานการณ์ปัญหาก็ต้องเอื้อต่อการใช้ตัวแทนความคิด เช่น สถานการณ์ปัญหา “ช่วยเหลือนักท่องเที่ยว” และ “พับเพื่อรู้จักวงรี” ที่กระตุ้นให้นักเรียนจำเป็นต้องใช้รูปภาพในการแก้ปัญหา ซึ่งสอดคล้องกับ Allen (2013) ที่กล่าวว่า ปัญหาเป็นส่วนสำคัญในการขับเคลื่อนความสามารถในการแก้ปัญหาและการนำเสนอตัวแทนความคิด ปัญหาที่หลากหลายจึงจะบีบคั้นให้นักเรียนแสดงวิธีการ แก้ปัญหาที่หลากหลาย

นอกจากนี้การศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังการจัดการเรียนรู้ด้วยขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนในวงจรปฏิบัติการที่ 3 ไม่สอดคล้องกับผลการทำแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ กล่าวคือ จากการวิเคราะห์ใบกิจกรรมที่ 3 พบว่านักเรียนมีระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่สูงกว่าผลจากการวิเคราะห์แบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ทั้งสามองค์ประกอบ เป็นผลมาจากการทำใบกิจกรรมนั้น นักเรียนได้ร่วมกันคิดร่วมกันทำ ได้สนทนา อภิปราย และถ่ายทอดความรู้ มีโอกาสได้แสดงความคิดของตนเอง เป็นกลุ่มเน้นให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติในการสำรวจอภิปราย และสรุปเป็นความรู้ใหม่ด้วยตนเอง จึงส่งผลให้นักเรียนมีการคิดเชิงคณิตศาสตร์ อยู่ในระดับที่ดีกว่าการทำแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นรายบุคคล สอดคล้องกับ The Centre for Teaching Excellence (n.d.) ที่กล่าวว่าการทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มจะช่วยให้ได้รับข้อเสนอแนะ เพื่อนำไปใช้ในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย ซึ่งจะช่วยให้มีการพัฒนาและกลยุทธ์ไปถึงเป้าหมายได้สำเร็จ และยังสอดคล้องกับ Hesse et al. (Hesse et al. 2015, as cited in Care and Griffin, 2015) ที่กล่าวว่าเมื่อผู้เรียนมีปฏิสัมพันธ์กับสังคม และสามารถร่วมกันแก้ปัญหาร่วมกับผู้อื่นจะช่วยให้ผู้เรียนเกิดสมรรถนะการแก้ปัญหาแบบร่วมมือขึ้น

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะในการนำไปใช้ในการจัดการเรียนรู้

1.1 การจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เป็นกิจกรรมที่เน้นการแก้ปัญหาผ่านการทำงานทางคณิตศาสตร์ และเน้นการใช้แนวคิดที่หลากหลายในการแก้ปัญหา และจากการวิจัยพบว่างานทางคณิตศาสตร์บางงานไม่ส่งเสริมให้เกิดการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เช่น สถานการณ์ปัญหาที่ต้องการคำตอบเชิงตัวเลข ปัญหาที่มีวิธีการหาคำตอบเพียงวิธีการเดียว ดังนั้นครูผู้สอนควรออกแบบและคัดเลือกงานแบบอาศัยการใช้ขั้นตอนวิธีดำเนินการ หรืองานแบบการใช้ความคิดขั้นสูงที่เน้นการลงมือทำและใช้ความรู้ประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้ปัญหา เพื่อให้ค้นพบและเรียนรู้แนวคิดที่หลากหลายในการแก้ปัญหา

1.2 การจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการจัดการเรียนรู้ที่มุ่งเน้นให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ผ่านการทำงานทางคณิตศาสตร์ การอภิปรายและเชื่อมโยงความรู้และประสบการณ์เดิม เพื่อสร้างความรู้ใหม่ด้วยตนเอง ดังนั้น งานทางคณิตศาสตร์ ใบกิจกรรม หรือ สื่อประกอบการจัดการเรียนรู้

จะต้องมีลักษณะของการสืบสอบ หรือ เป็นโจทย์ปัญหา/คำถามเชิงอุปนัย เพื่อทำให้นักเรียนได้สรุปและสร้างข้อค้นพบหรือความรู้ใหม่ด้วยตนเองได้

1.3 การจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ครูผู้สอนต้องมีบทบาทสำคัญที่จะนำนักเรียนไปสู่การคิด ทำความเข้าใจปัญหา และการแก้ปัญหา โดยเฉพาะการเลือกใช้คำถามกระตุ้นการคิดในแต่ละขั้น จะช่วยให้นักเรียนเกิดการคิด การอภิปราย การแลกเปลี่ยนเรียนรู้ และการทำงานร่วมกันจนบรรลุวัตถุประสงค์ของการจัดการเรียนรู้

2. ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

2.1 การจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการจัดการเรียนรู้ที่มุ่งเน้นให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ผ่านการทำงานทางคณิตศาสตร์ การอภิปรายและเชื่อมโยงความรู้และประสบการณ์เดิม เพื่อสร้างความรู้ใหม่ด้วยตนเอง พบว่าในระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยการทำงานทางคณิตศาสตร์ร่วมกันและบันทึกผลต่าง ๆ ลงในใบกิจกรรม ซึ่งนักเรียนได้เรียนรู้ร่วมกันเป็นกลุ่ม นักเรียนมีระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ สูงกว่าระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่วัดด้วยแบบวัดหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ดังนั้น ในการวิจัยครั้งต่อไป ผู้วิจัยควรศึกษาทักษะของผู้เรียน ที่เน้นการทำงานและการมีปฏิสัมพันธ์ร่วมกัน เช่น ทักษะการแก้ปัญหาแบบร่วมมือ

2.2 การจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เป็นแนวทางปฏิบัติที่เน้นบทบาทของครู ดังนั้น ในการวิจัยครั้งต่อไป ผู้วิจัยควรศึกษาการใช้แนวทางการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ร่วมกับรูปแบบการจัดการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญรูปแบบอื่นเช่น การจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐาน การจัดการเรียนรู้โดยใช้บริบทเป็นฐาน หรือการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการสืบสอบหาความรู้

2.3 การจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เป็นวิธีการจัดการเรียนรู้ที่มีศักยภาพในการพัฒนากระบวนคิดของนักเรียนเป็นอย่างมาก โดยเฉพาะในขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่ ที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้พูด แลกเปลี่ยนอภิปรายความคิด และข้อสรุปจากการทำงานทางคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงกับการใช้เหตุผลเพื่อสรุปเป็นความรู้ใหม่ ดังนั้นในการวิจัยครั้งต่อไปอาจนำรูปแบบการสอนนี้ไปใช้เพื่อพัฒนาทักษะที่เกี่ยวข้องกับการคิดอื่น ๆ เช่น การคิดวิเคราะห์ การคิดแบบมีวิจารณญาณ และการคิดแก้ปัญหา

2.4 ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยใช้กระดานไวท์บอร์ดเป็นสื่อในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ในขณะที่นักเรียนทำงานทางคณิตศาสตร์ หรืออภิปรายแลกเปลี่ยนความคิด นักเรียนจะร่วมกันเขียน วาดภาพ นำเสนอตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ลงในกระดาษนี้ ทำให้ผู้วิจัยได้ศึกษาแนวคิด/กระบวนการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ได้เป็นอย่างดี รวมไปถึงการอภิปรายเชื่อมโยงความรู้ของนักเรียน ทำให้นักเรียนนำเสนอผลงานและอภิปรายได้อย่างมีประสิทธิภาพ ดังนั้น ในการศึกษาวิจัยครั้งต่อไป ผู้วิจัยควรเก็บรวบรวมข้อมูล การนำเสนอตัวแทนความคิด/การแก้ปัญหาของนักเรียน กระดานไวท์บอร์ด หรือ กำหนดสื่อชิ้นนี้เป็นเครื่องมือในการวิจัย เพื่อความน่าเชื่อถือของข้อมูล

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

กระทรวงศึกษาธิการ. (2551). **หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.

กระทรวงศึกษาธิการ. **แผนการศึกษากระทรวงศึกษาธิการ ฉบับที่ 12 พ.ศ. 2560–2564.** [ออนไลน์]. 2559. สืบค้น 8 มีนาคม 2562 , จาก http://www.mua.go.th/users/bpp/main/download/plan/EducationPlan12.pdf

กระทรวงศึกษาธิการ. (2560). **ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.

กิตติ พัฒนตระกูลสุข. (2546). การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาของประเทศไทย ล้มเหลวจริงหรือ. **วารสารคณิตศาสตร์.** 46 (มกราคม 2546), 54 – 58.

คฑาไชย ทักษ์สิทธา. (2560). **การวิจัยเชิงปฏิบัติการเพื่อพัฒนาการจัดการเรียนรู้แบบค้นพบด้วยการแนะแนวทาง เรื่อง การประยุกต์ตรีโกณมิติ ที่ส่งเสริมการคิดเชิงคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.** วิทยานิพนธ์ กศ.ม. , มหาวิทยาลัยนเรศวร, พิษณุโลก .

เคน เคย์. (2554). **ทักษะแห่งอนาคตใหม่ การศึกษาเพื่อศตวรรษที่ 21: 21ST Century Skills Rethinking How Students Learn.** วรพจน์ วงศ์กิจรุ่งเรือง และอธิป จิตตฤกษ์ แปล กรุงเทพฯ: โอเพ่นเวิลด์ส.

จรรยา ภูอุดม. (2543). **การพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เน้นผู้เรียนเป็นผู้สร้างความรู้.** วิทยานิพนธ์ดุษฎีบัณฑิต. การศึกษา (คณิตศาสตร์ศึกษา), มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. กรุงเทพฯ.

จิตติรัตน์ แสงเลิศอุทัย และ ชัยยุธ มณีรัตน์. (2562).**การวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียนเพื่อพัฒนาการเรียนการสอน.** *วารสารวิจัยและพัฒนาหลักสูตร*, 9(2), 1 – 11.

ฉัตรศิริ ปิยะพิมลสิทธิ์. (2554). **เกณฑ์การให้คะแนน (Scoring Rubrics).** สืบค้น 26 กุมภาพันธ์ 2562, จาก http://www.watpon.com/Elearning/mea5.htm

ชาตรี ฝ่ายคำตา, ชลิตตา เจริญสุข, ดวงพร ศรีครินทร์, และภาวินี บริบูรณ์. (2559). **การวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียนวิทยาศาสตร์.** กรุงเทพฯ: พัฒนาคุณภาพวิชาการ.

ชนาธิป พรกุล. (2554). **การสอนกระบวนการคิดทฤษฎีและการนำไปใช้**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬากรณ์มหาวิทยาลัย.

ณัฐวุฒิ พันธุลี. (2562). **การอำนวยการวาทกรรมชั้นเรียนเพื่อพัฒนายุทธวิธีการเรียนรู้โดยการกำกับตนเอง ของนักเรียนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่เน้นการแก้ปัญหา.** *วารสารศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร*, 21(2), 80 – 93.

ทรรศมน วินัยโกศล. (2562). ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามโมเดลของสไตน์ที่มีต่อความรู้และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3. **วารสารอิเล็กทรอนิกส์ทางการศึกษา**. 14(1), 1 – 16.

ทิศนา แขมมณี. (2534). การพัฒนากระบวนการคิด. **วารสารครุศาสตร์**. 20 (ตุลาคม – ธันวาคม 2534), 19 – 13.

นิยม กิมานุวัฒน์ วิชิต สุรัตน์เรืองชัย และ สุนทร บำเรอราช. (2559). การพัฒนารูปแบบการสอนเพื่อพัฒนากระบวนการคิดเชิงระบบสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษา. **วารสารศึกษาศาสตร์**, 27 (1), 61 – 73.

เบญจมาศ ฉิมมาลี. (2550). **ผลของการจัดกิจกรรมคณิตศาสตร์ โดยใช้คำถามระดับสูงประกอบแนวทางพัฒนาความคิดทางคณิตศาสตร์ของพรายวิลลิก ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ และการคิดอย่างมีวิจารณญาณของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่** 3. วิทยานิพนธ์ ค.ม. , จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.

ผลาดร สุวรรณโพธิ์. (2560). **การพัฒนาการคิดด้วยกิจกรรมคณิตศาสตร์**. ชุลบุรี: บริษัท เท็กกู๊ดครีเอชั่น จำกัด.

พัชรินทร์ ชูกลิ่น. (2554). **การใช้วิจัยเชิงปฏิบัติการในการพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้แบบใช้ปัญหาเป็นฐาน วิชาชีววิทยา เรื่องเคมีพื้นฐานของสิ่งมีชีวิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่** 4. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. , มหาวิทยาลัยขอนแก่น, ขอนแก่น.

พิเชาวน์ องค์อนุรักษ์. (2552). **บทบาทของครูที่ใช้วิธีการแบบเปิดในการส่งเสริมการคิดทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียน**. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

แพรไหม สามารถ. (2555). **การพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์**. วิทยานิพนธ์ ค.ม. , จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,กรุงเทพฯ.

ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์ และคณะ. (2546). **การปฏิรูปกระบวนการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ในโรงเรียนโดยเน้นกระบวนการทางคณิตศาสตร์**. ขอนแก่น: ขอนแก่นการพิมพ์.

ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์. (2557). **กระบวนการแก้ปัญหาในคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียน.** ขอนแก่น: ศูนย์วิจัยคณิตศาสตรศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

ยุพิน พิพิธกุล. (2539). **การเรียนการสอนคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: บพิธการพิมพ์.

รุ่งทิวา นาบำรุง. (2550). **วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี**. ปริญญานิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตรศึกษา). , มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ,กรุงเทพฯ.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2553). **คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2555). **ครูคณิตศาสตร์มืออาชีพ เส้นทางสู่ความสำเร็จ**. กรุงเทพฯ: 3–คิว มีเดีย.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2556ก). **ผลการประเมิน PISA 2012 คณิตศาสตร์ การอ่าน และ วิทยาศาสตร์ บทสรุปสำหรับผู้บริหาร**. กรุงเทพฯ: แอดวานซ์ พริ้นติ้ง เซอร์วิส.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2556ข). **การประเมินความสามารถในการคิดทางคณิตศาสตร์**. สืบค้น 21 มีนาคม 2562 , จาก https://drive.google.com/file/d/0BwqFSkq5b7zSSXhTRmgtUHBMSGM/view

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2557). **การติดตามผลการจัดการเรียนการสอนด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีของครู ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3**. สืบค้น 20 มีนาคม 2562 , จาก https://drive.google.com/file /d/0BwqFSkq5b7zSSXhTRmgtUHBMSGM/view

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2560ก). **คู่มือการใช้หลักสูตรรายวิชาพื้นฐานวิทยาศาสตร์ สาระเทคโนโลยี (วิทยาการคำนวณ) กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา**. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2560ข). **คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ตามผลการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2560ค). **กรอบโครงสร้างการประเมินผลนักเรียนโครงการ PISA 2015**. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. สืบค้น 10 กรกฎาคม 2562, จาก https://library.ipst.ac.th/bitstream/ handle/ipst/5534/32.PISA-2015-Framwrok.pdf?sequence=1&isAllowed=y

สำนักงานคณะกรรมการสถานศึกษาแห่งชาติ. (2540). **ทฤษฎีการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะการคิด: ต้นแบบการเรียนรู้ทางด้านหลักทฤษฎีและแนวปฏิบัติ**. กรุงเทพฯ: โครงการพัฒนาการเรียนการสอน สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ.

สำนักงานคณะกรรมการพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ. (2549). **แผนพัฒนาเศรษฐกิจและ สังคมแห่งชาติ ครั้งที่9** (พ.ศ. 2545 – 2549). กรุงเทพฯ: สำนักงานคณะกรรมการพัฒนา เศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ.

สำนักงานส่งเสริมสังคมแห่งการเรียนรู้และคุณภาพเยาวชน. (2557). **โพลชี้เด็กโอดเรียนหนักสุดในโลก แต่ใช้จริงไม่ได้ แถมต้องเรียนพิเศษ จี้ปฏิรูป**. สืบค้น 10 ตุลาคม 2559, จาก http://www.manager.co.th/qol/viewnews.aspx?NewsID=9570000045187

สุพิชฌาย์ สีหะวงษ์ และ คณะ. (2562). การพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมการคิดเชิงคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. **วารสารศึกษาศาสตร์ มสธ.**. ปีที่ 12 ฉบับที่ 1 (ม.ค. – มิ.ย. 2562), 134 – 146.

สุวิทย์ มูลคำ. (2548). **ครบเครื่องเรื่องการคิด**. กรุงเทพฯ : ภาพพิมพ์.

สุวิมล ว่องวาณิช. (2555). **การวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียน** (พิมพ์ครั้งที่ 16). กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬากรณ์มหาวิทยาลัย.

ศิริชัย กาญจนวาสี. (2551). **รายงานการวิจัยการพัฒนาเครื่องมือวัดและประเมินการคิดของผู้เรียนระดับ การศึกษาขั้นพื้นฐาน**. คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ศิรินธร วิทยะสิรินันท์. (2544). **ทักษะการคิดในวิทยาการด้านการคิด**. กรุงเทพฯ: เดอะมาสเตอร์กรุ๊ป แมนเนจเม้นท์.

อัมพร ม้าคนอง. (2553). **ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์: การพัฒนาเพื่อพัฒนาการ**. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อัมพร ม้าคนอง. (2557). **คณิตศาสตร์สำหรับครูมัธยม**. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อนุพร วิชามล. (2560). การตั้งคำถามที่ส่งเสริมการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแบบเปิด. **วารสารวิจัยมหาวิทยาลัยขอนแก่น (ฉบับบัณฑิตศึกษา) สาขามนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์**. 5(3), 1 – 12.

อุษณีย์ อนุรุทธ์วงศ์ (โพธิสุข). (2545). **ฝึกเด็กให้เป็นนักคิด**. มูลนิธิสดศรี-สฤษดิ์วงศ์

Aleixandre, M.P. & Erduran, S. (2007). **Argumentation in Science Education: An overview. Argumentation in science education.** Voorburg, The Netherlands: Springer.

Driver, R., Newton, P., & Osborne, J. (2000). **Establishing the norms of scientific argumentation in classrooms.** Science Education.

Evans, S. & Dawson, C. (2016). Orchestrating productive whole class discussions: The role of designed student responses. **Journal of Mathematics Teacher Education and Development.** MERGA,19(2), pp. 159 – 179.

Greenwood, J.J. (1993). On the Nature of Teaching and Assessing "Mathematical Power" and "Mathematical Thinking", **Arithmetic Teacher** 41, 3 (November 1993): 144 – 152.

Henderson, P. B. (2002). **Materials Development in Support of Mathematical Thinking.** Indiana: Department of Computer Science and Software Engineering Bulter University.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). **Mathematical tasks and student cognition: Classroom based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning.** 524-549.

Hesse, F., Care, E,.Buder, J., Sassenberg, K., & Griffin,P. (2015). A Framework for Teachable Collaborative Problem Solving Skills. In P.Griffin & E Care (Eds.), **Assessment and teaching of 21st century skills.** Natherland : Springer.

Hyde, Au. A., and Hyde, P. R. (1991). **Mathwise: Teaching Mathematical Thinking and Problem Solving.** Portsmouth, NH: Heinemann.

Jackson, A. L., et al. (1994). **Mathematics in Action Macmillan.** McGraw-Hill School Publishing.

Jacobs, H.H. (2010). **Curriculum 2: Essential education for a changing world.** Virginia: ASCD.

Kriegler, S. (2004). **Just what is algebraic thinking?** Retrieved September 9, 2019, from www.math.ucla.edu/~kriegler/pub/algebrat.html.

Lam, T.T. (2012). **Reason Communication and Connection in Mathematics: Reasoning and Justification in the secondary Mathematics Classroom.** Singapore: World Scientific; 2012.

Langrall, Cynthia W. & Rumsey, Chepina. (2016). **Teaching Children Mathematics.** PROMOTING MATHEMATICAL ARGUMENTATION. NCTM.

Larsson, M. (2015). **Orchestrating mathematical whole-class discussions in the problem solving classroom: Theorizing challenges and support for teachers.** Mälardalen University,

Lutfiyya, A. L. Mathematical thinking of high school students in Nebraska. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology** [Online]. 1998. Available from: http://dx.doi.org/10.1080/0020739980290106 [2019, July 12]

Margaret S. Smith & Mary Kay Stein. (2011). **5 Practices for Orchestrating Productive Math Discussions.** NCTM & Corwin Press,

Mason, J., and Stacey, K. (1994). **Thinking Mathematically.** Revised ed. London: Addison Wesley.

Mats Brunström & Maria Fahlgren. (2017). **Orchestration of mathematical discussions drawing on students' computer – based work.** Proceedings of Madif 10; Sweden.

Manouchehri. (2005).**Lecture Notes: Math 461** [online]. Available from: http://www.cst.cmich.edu/users/manoula/461/461.day2.ppt#1 [2012, September 21]

National Council of Teachers of Mathematics, NCTM. (1991). **Professional Standards for Teaching Mathematics.** Reston, Virginia: NCTM.

O'Daffer, Ph. G., and Thornquist, Br. A. (1993). Critical Thinking, Mathematical Reasoning, and Proof. **In Research Ideas for the Classroom High School Mathematics.** Wilson, Patricia S., editor. pp. 39-56. New York: Macmillan,

Reys, R. E. et al. (2004). **Helping Children Learn Mathematics.** Seventh Edition. New York: Wiley & Sons

Rickart, C. (1996). Structuralism and Mathematical Thinking. **The Nature of Mathematical Thinking.** Sternberg. Robert J.; & Ben – Zeev, Talia., editors. pp. 258 –300. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Romberg, T.A., & Kaput, J.J. (1999). **Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding.** New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Schielack, et al. (2001). Designing Question to Encourage Children's Mathematical Thinking. **Teaching Children Mathematics 6,** 6(2001): 398 – 420.

Schmuck, R. (2006). **Practical action research for change.** California: Corwin Press.

Schoenfeld, A.H. (1992). **Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics.** New York: MacMilian.

Swan, M. and Ridgway, J. (2005). **Mathematical Thinking CATs. Retrieved April 5** [Online]. Available from: http://www.flagoide.org/extra/download/cat/math/math/ mathw97.doc.2005

Stacey, K. **WHAT IS MATHEMATICAL THINKING AND WHY IS IT IMPORTANT?** [Online]. 2007. Available from: http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2007/ progress_report/symposium/Kaye_Stacey.pdf [2019,July 26]

Sternberg, R. J. (1996). What is Mathematical Thinking. **In The Nature of Mathematical Thinking.** Sternberg, Robert J.; & Ben-Zeev, Talia., editors. pp. 303-318. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). **The Teaching Gap: Best Ideas from the world's Teachers for Improving Education in the Classroom.** New York: The Free Press.; 1999.

Wen-Haw Chen. (2013). **Applying problem-based learning model and creative design to conic sections teaching.** Retrieved October 10, 2016, from http://www.naun.org/ main/NAUN/educationinformation/c012008-099.pdf

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก รายชื่อผู้เชี่ยวชาญในการตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ผู้เชี่ยวชาญในการตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย เรื่อง การจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีรายชื่อผู้เชี่ยวชาญ ดังนี้

1. **ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาคณิตศาสตร์**
   รองศาสตราจารย์ ดร.จักรกฤษ กลิ่นเอี่ยม
   อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

2. **ผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์/คณิตศาสตร์ศึกษา**
   ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วนินทร พูนไพบูลย์พิพัฒน์
   อาจารย์ประจำภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

3. **ผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย**
   นางนันซลี ทรัพย์ประเสริฐ
   ครูชำนาญการพิเศษ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
   โรงเรียนวัชรวิทยา จังหวัดกำแพงเพชร

ภาคผนวก ข เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
2. ตัวอย่างแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้
3. ตัวอย่างใบกิจกรรม
4. แบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์

ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์ **ระดับชั้น** มัธยมศึกษาปีที่ 4

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ **เวลา** 40 ชั่วโมง

เรื่องที่ 8 วงกลม **เวลาเรียน** 5 ชั่วโมง

สาระ สาระการวัดและเรขาคณิต

ผลการเรียนรู้ เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ในการแก้ปัญหา

สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

วงกลม คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า **จุดศูนย์กลาง** (center) ของวงกลม และส่วนของเส้นตรงที่มีจุดศูนย์กลางและจุดบนวงกลมเป็นจุดปลาย เรียกว่า **รัศมี** (radius) ของวงกลม

สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k) และรัศมียาว r หน่วย คือ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ เรียกสมการนี้ว่า **รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม**

รูปทั่วไปของสมการวงกลม คือ $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

จุดศูนย์กลางคือ $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ และรัศมีคือ $r=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4C}$

สาระการเรียนรู้

- นิยามของวงกลม
- รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม
- รูปทั่วไปของสมการวงกลม
- โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับวงกลม

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

1) อธิบายความหมายของวงกลมได้

2) บอกส่วนประกอบที่สำคัญของวงกลมได้

ด้านทักษะและกระบวนการ

1) การแก้ปัญหา : นักเรียนสามารถระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบและเงื่อนไขของปัญหาได้ รวมถึงการนำความรู้เกี่ยวกับวงกลมมาใช้ในการแก้ปัญหาและสรุปคำตอบ
2) การให้เหตุผล : นักเรียนสามารถบอกเหตุผลของการนำสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม และข้อมูลจากปัญหามาใช้ในการแก้ปัญหา
3) การนำเสนอตัวแทนความคิด : นักเรียนสามารถเขียนสัญลักษณ์ แผนภาพ รูปภาพ กราฟ หรือข้อความในการทำความเข้าใจปัญหา การแก้ปัญหา และการสรุปคำตอบ

ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์

1) การมีส่วนร่วมในการเรียน : นักเรียนตอบคำถามของครูและร่วมแสดงความคิดเห็นระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้
2) การตรงต่อเวลาในการส่งงาน : นักเรียนส่งงานที่ได้รับมอบหมายตรงตามเวลาที่ครูกำหนด

สื่อการเรียนรู้และแหล่งเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรมย่อยที่ 1 "นาฬิกาของเรขา"
2. ใบกิจกรรมย่อยที่ 2 "ห่างเท่าไหร่"
3. ใบกิจกรรมย่อยที่ 3 "จากรูปแบบมาตรฐาน สู่รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม "
4. ใบกิจกรรมย่อยที่ 4 สถานการณ์ปัญหา "ช่วยเหลือนักท่องเที่ยว"
5. ใบกิจกรรมย่อยที่ 5 สถานการณ์ปัญหา "ระบบสปริงเกอร์ของโรงเรียน" (ทุกใบกิจกรรมเป็นชิ้นงานกลุ่ม)

การวัดและการประเมินผลการเรียนรู้

จุดประสงค์	วิธีวัด	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
อธิบายความหมายของวงกลมได้	ตรวจใบกิจกรรม	ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่องวงกลม	เกณฑ์การประเมิน 4 ระดับคุณภาพดังนี้ 4 = ดีมาก 3 = ดี 2 = พอใช้ 1 = ปรับปรุง
บอกส่วนประกอบที่สำคัญของวงกลมได้	ตรวจใบกิจกรรม	ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่องวงกลม	
นักเรียนสามารถระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบและเงื่อนไขของปัญหาได้ รวมถึงการนำความรู้เกี่ยวกับวงกลมมาใช้ในการแก้ปัญหาและสรุปคำตอบ	ตรวจใบกิจกรรม	ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่องวงกลม	
นักเรียนสามารถบอกเหตุผลของการนำสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม และข้อมูลจากปัญหามาใช้ในการแก้ปัญหา	ตรวจใบกิจกรรม	ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่องวงกลม	
นักเรียนสามารถเขียนสัญลักษณ์ แผนภาพ รูปภาพ กราฟ หรือข้อความในการทำความเข้าใจปัญหา การแก้ปัญหา และการสรุปคำตอบ	ตรวจใบกิจกรรม	ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่องวงกลม	
นักเรียนตอบคำถามของครูและร่วมแสดงความคิดเห็นระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้	สังเกตพฤติกรรม	แบบสังเกตพฤติกรรมนักเรียน	
นักเรียนส่งงานที่ได้รับมอบหมายตรงตามเวลาที่ครูกำหนด	สังเกตพฤติกรรม	แบบสังเกตพฤติกรรมนักเรียน	

ชั่วโมงที่ 1 ที่มาของวงกลม

ก่อนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

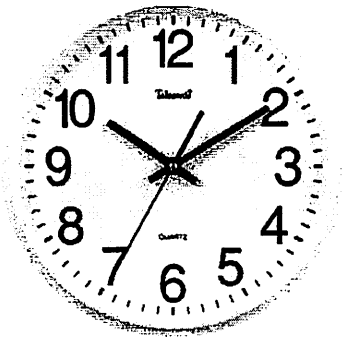
ขั้นการปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์การเรียนรู้และการทำงานทางคณิตศาสตร์

1.1 งานทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในการสำรวจและสรุปสาระสำคัญเกี่ยวกับนิยามของวงกลม

สถานการณ์ "นาฬิกาของเรขา"

นาฬิกาแขวนผนังที่ใช้บอกเวลาส่วนใหญ่ จะมีเข็มนาฬิกา 3 เข็ม ประกอบด้วย เข็มสั้นบอกเวลาเป็นชั่วโมง เข็มยาวบอกเวลาเป็นนาที และเข็มยาวบอกเวลาเป็นวินาที

เช้าวันหนึ่งที่บ้านของนางสาวเรขา มีนาฬิกาแขวนผนังเสียใช้งานไม่ได้ เธอจึงนำนาฬิกาที่เสียให้ช่างแถวบ้านซ่อมแซม ปรากฏว่าช่างได้ถอดกลไกพร้อมเข็มนาฬิกาออกมาตรวจสอบและซ่อมแซมเรียบร้อยแล้ว แต่ไม่สามารถใส่กลไกพร้อมทั้งเข็มนาฬิกาในตำแหน่งตรงกลางหน้าปัดนาฬิกาได้ดังเดิม จึงเปลี่ยนตำแหน่งของกลไกหรือจุดหมุนของเข็มนาฬิกา ให้ห่างจากรูเดิมประมาณ 3 เซนติเมตร



เมื่อถึงเวลานัดรับนาฬิกาคืน

นางสาวเรขาจึงไม่พอใจ เธอจึงพูดว่า : "...นี่ช่างคะ ถ้าช่างทำแบบนี้ เข็มนาฬิกาของดิฉันจะไม่เดินเป็นวงกลมเหมือนเดิม น่ะสิคะ แบบนี้หนูจะใช้ดูเวลาได้อย่างไร ? "

ช่างซ่อมนาฬิกา : " ได้สิ ก็ในเมื่อกลไกและเฟืองของนาฬิกามันเป็นวงกลม ฉะนั้นเข็มนาฬิกาก็ต้องเดินเป็นวงกลมด้วยสิ ตัวเลขที่หน้าปัดก็ยังจัดเรียงเป็นวงกลมด้วย แค่เปลี่ยนตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของเข็มเอง ไม่น่าจะทำให้ดูเวลาไม่ได้ นะ ...."

นักเรียนเห็นด้วยกับ นางสาวเรขาหรือช่างซ่อมนาฬิกา และคิดว่านาฬิกาของนางสาวเรขายังใช้งานได้ตามปกติหรือไม่ เพราะเหตุใด

1.2 พฤติกรรมการเรียนรู้และวิธีคิดของนักเรียนที่อาจจะนำมาใช้ในการทำงานทางคณิตศาสตร์

1) เข้าใจว่า นาฬิกาไม่สามารถใช้งานได้ตามปกติเช่นเดิม ถึงแม้ว่ากลไกยังคงหมุนเป็นรูปวงกลมก็ตาม เพราะ
   - เมื่อเข็มนาฬิกาเปลี่ยนตำแหน่งไป ทำให้เข็มยาวมาความยาวเกินหน้าปัดนาฬิกา
   - เมื่อจุดศูนย์กลางของการหมุนเปลี่ยนตำแหน่งไป ทำให้เกิดวงกลมวงใหม่ที่ซ้อนทับกับวงกลม (หน้าปัดเดิม)
2) เข้าใจว่า วงกลม คือ เส้นโค้งปิดบนระนาบ ซึ่งจุดทุกจุดบนเส้นโค้งมีระยะจากจุดตรึงจุดหนึ่งเท่ากัน เรียกจุดตรึงนั้นว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม
3) เข้าใจว่า วงกลม คือ อาณาบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง ซึ่งจุดทุกจุดบนเส้นโค้งมีระยะจากจุดตรึงจุดหนึ่งเท่ากัน เรียกจุดตรึงนั้นว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม
4) เข้าใจว่า วงกลม คือ (1) เส้นโค้งปิดบนระนาบ ซึ่งจุดทุกจุดบนเส้นโค้งมีระยะจากจุดตรึงจุดหนึ่งเท่ากัน เรียกจุดตรึงนั้นว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม และ อาณาบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้งใน (1) แยกจากกันไม่ได้

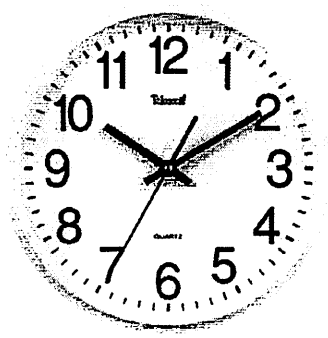
1.3 ข้อผิดพลาดหรือความเข้าใจผิดของนักเรียนที่อาจจะเกิดขึ้นเกี่ยวกับนิยามของวงกลม

1) เกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนว่า วงกลม เป็นฟังก์ชัน
2) เข้าใจว่า นาฬิกาไม่สามารถใช้งานได้ตามปกติเช่นเดิม ถึงแม้ว่ากลไกยังคงหมุนเป็นรูปวงกลมก็ตาม เพราะ เข็มนาฬิกาไม่ได้หมุนเป็นรูปวงกลม
3) เข้าใจว่า นาฬิกาสามารถใช้งานได้ตามปกติเช่นเดิม
4) เข้าใจว่าวงกลมที่ไม่มีจุดศูนย์กลาง เป็นวงกลมที่สมบูรณ์ ในการศึกษาเรขาคณิตวิเคราะห์

เริ่มกิจกรรมการเรียนรู้ในชั้นเรียน

ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์

1. นักเรียนจับกลุ่ม กลุ่มละ 5 – 6 คน โดยคละความสามารถ
2. ครูนำเสนอรูปภาพนาฬิกาแขวนผนังที่มีหน้าปัดเป็นวงกลม หน้าชั้นเรียน



3. นักเรียนแต่ละคนร่วมกันสืบสอบ และอภิปรายภายในกลุ่ม ตามประเด็น ดังนี้

1) โดยปกติ เข็มของนาฬิกาแขวนผนังจะเดินเป็นลักษะอย่างไร เพราะเหตุใด

2) การหมุนของนาฬิกา มีส่วนประกอบสำคัญคืออะไรบ้าง

3) กลไกการหมุนของเข็มนาฬิกา ควรอยู่ตำแหน่งใด เพราะเหตุใด

4) เข็มนาฬิกาทั้งสามเข็ม เดินเป็นวงกลมที่มีขนาดเท่ากันหรือไม่ และขนาดที่ต่างกันนั้น เกิดจากอะไร

4. ครูใช้คำถามให้นักเรียนได้ตรวจสอบข้อมูลและเงื่อนไขสำคัญต่าง ๆ ร่วมกันทั้งชั้นเรียน เพื่อให้นักเรียนมีความเข้าใจเบื้องต้นที่ตรงกันก่อนลงมือสำรวจงานทางคณิตศาสตร์

5. ครูนำเสนอสถานการณ์ปัญหา "นาฬิกาของเรขา" หน้าชั้นเรียน

ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

1. นักเรียนลงมือสำรวจใบกิจกรรมที่ 1 เพื่อค้นหาแนวคิดหรือความหมายของวงกลม ตามความเข้าใจของตนเอง

2. นักเรียนแต่ละคนร่วมกันสืบเสาะหาความรู้และอภิปรายภายในกลุ่ม เกี่ยวกับสถานการณ์ปัญหา "นาฬิกาของเรขา" และร่วมกันตอบคำถามดังนี้

- **นักเรียนเห็นด้วยกับ นางสาวเรขาหรือช่างซ่อมนาฬิกา เพราะเหตุใด**
- **นักเรียนคิดว่านาฬิกาของนางสาวเรขายังใช้งานได้ตามปกติหรือไม่ เพราะเหตุใด**

4. ครูคอยกำกับติดตามพฤติกรรมการเรียนรู้และการทำงานของนักเรียน แต่ละกลุ่ม

(หากพบว่านักเรียนไม่สามารถสำรวจงานทางคณิตศาสตร์ได้ ครูจะกระตุ้นโดยใช้การพูดคุยซักถาม ให้นักเรียนนำข้อมูลที่ได้จากการทำความเข้าใจปัญหามาวิเคราะห์และเชื่อมโยงกับความรู้ทางคณิตศาสตร์)

5. ครูตั้งคำถามถ้าทาย จากสถานการณ์ข้างต้น

- **เราจะให้ความหมายหรือกำหนดนิยามของ "วงกลม" ว่าอย่างไร**
  (แนวทางการตอบ : วงกลม หมายถึง เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบเดียวกัน เป็นระยะทางเท่าๆ กัน)
- **ส่วนประกอบที่สำคัญของวงกลมประกอบด้วยอะไรบ้าง**
  (แนวทางการตอบ : จุดศูนย์กลาง , ขอบ, และรัศมี)

6. ครูเดินสำรวจรอบห้องเรียนเกี่ยวกับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียนแต่ละกลุ่มและใช้คำถามเพื่อตรวจสอบความรู้เดิมของนักเรียนโดยให้นักเรียนอธิบายที่มาและเหตุผลเกี่ยวกับที่แนวคิดหรือวิธีการที่ตนเองนำมาใช้ พร้อมกับใช้คำถามให้นักเรียนได้ตรวจสอบความถูกต้องของวิธีการหรือแนวคิดนั้น

7. ครูกระตุ้นให้นักเรียนได้พูดคุยและแบ่งปันความคิดเห็นเกี่ยวกับแนวคิดหรือวิธีการที่นำมาใช้ร่วมกันภายในกลุ่มเพื่อหาข้อสรุปร่วมกันของแต่ละกลุ่ม

8. ครูจดบันทึกแนวคิดหรือวิธีการของกลุ่มที่น่าสนใจทั้งที่ถูกต้องและมีข้อผิดพลาด

ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน

1. ครูพิจารณาคัดเลือกแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียนจากแบบบันทึก โดยเลือกแนวคิดหรือวิธีการให้ครอบคลุม หลากหลาย และเพียงพอที่นักเรียนจะสามารถนำไปสรุปเป็นนิยามของวงกลม

2. ครูจัดลำดับแนวคิดที่ได้จากการคัดเลือกเพื่อใช้ในการนำเสนอและอภิปรายตามความเหมาะสม โดยมีการจัดลำดับ ดังนี้

1) จัดให้กลุ่มที่มีแนวคิดเห็นด้วยกับช่างซ่อมนาฬิกา หรือ มีแนวคิดที่ไม่ถูกต้องได้นำเสนอแนวคิดก่อน
2) กลุ่มที่เห็นด้วยกับนางสาวเรขา แต่ไม่สามารถแสดงเหตุผลประกอบการตอบได้
3) กลุ่มที่เห็นด้วยกับนางสาวเรขา ว่านาฬิกาไม่สามารถใช้งานได้ตามปกติเช่นเดิม เพราะ
   เมื่อเข็มนาฬิกาเปลี่ยนตำแหน่งไป ทำให้เข็มยาวมาความยาวเกินหน้าปัดนาฬิกา (หรือแนวคิดอื่น ๆ ที่เน้นให้ความสำคัญกับขนาดของเข็มนาฬิกา เพราะเกี่ยวข้องกับรัศมีของวงกลม ซึ่งเป็นองค์ประกอบสำคัญ)
4) กลุ่มที่เห็นด้วยกับนางสาวเรขา ว่านาฬิกาไม่สามารถใช้งานได้ตามปกติเช่นเดิม เพราะ เมื่อจุดศูนย์กลางของการหมุนเปลี่ยนตำแหน่งไป ทำให้เกิดวงกลมวงใหม่ที่

ซ้อนทับกับวงกลม (หรือแนวคิดอื่น ๆ ที่เน้นให้ความสำคัญกับขอบรอยหมุนของเข็มนาฬิกา เพราะเกี่ยวข้องกับขอบของวงกลม ซึ่งเป็นองค์ประกอบสำคัญเช่นกัน)

5) กลุ่มที่มีแนวคิดต่างจากที่คาดการณ์ไว้ และมีเหตุผลสนับสนุนคำตอบที่สมเหตุสมผล และน่าสนใจ มีประโยชน์ต่อการเชื่อมโยงเข้าสู่ความรู้คณิตศาสตร์

3. ครูแจ้งลำดับการนำเสนอให้นักเรียนกลุ่มที่เป็นเจ้าของแนวคิดหรือวิธีการที่ถูกคัดเลือกทราบเพื่อให้นักเรียนได้เตรียมความพร้อมก่อนออกมานำเสนอหน้าชั้นเรียน

ขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่

1. นักเรียนออกมานำเสนอและอธิบายแนวคิดของตนเองหน้าชั้นเรียนตามลำดับที่กำหนด และเมื่อเสร็จสิ้นในแต่ละการนำเสนอและอธิบายแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน ครูจะตั้งคำถามให้นักเรียนได้อภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียนเกี่ยวกับแนวคิด นั้น

2. ครูใช้คำถามให้นักเรียนได้พิจารณาเปรียบเทียบแนวคิดจากข้อสรุปต่าง ๆ และใช้คำถามให้นักเรียนได้ร่วมกันอภิปรายเพื่อเชื่อมโยงข้อสรุปที่ได้จากการพิจารณาเปรียบเทียบไปสู่การสรุปเป็นความรู้ใหม่ ได้แก่

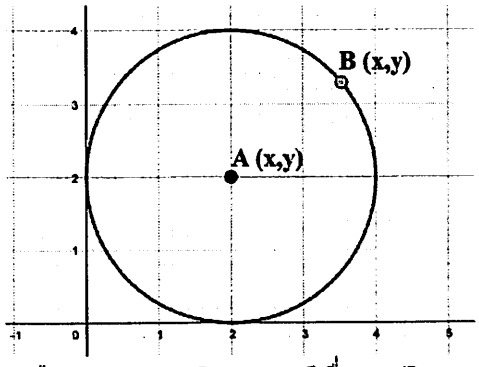
- ในชีวิตจริง นักเรียนพบเห็นการเกิดวงกลม ในทำนองเดียวกับเข็มนาฬิกา ได้อย่างไรบ้าง
- ทำไมจึงคิดว่า สิ่งนั่นมีลักษณะเหมือนกัน เพราะเหตุใด

3. นักเรียนร่วมกันสรุปบทนิยามของวงกลมที่ได้จากการอภิปรายด้วยภาษาของตนเอง โดยครูคอยช่วยเหลือ

วงกลม คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า ***จุดศูนย์กลาง*** *(center) ของวงกลม และส่วนของเส้นตรงที่มีจุดศูนย์กลางและจุดบนวงกลมเป็นจุดปลาย เรียกว่า* ***รัศมี*** *(radius) ของวงกลม*

4. ครูใช้คำถามให้นักเรียนพิจารณา และเชื่อมโยงความหมายของวงกลม ไปสู่บริบทใหม่ คือ "ถ้า นาฬิกาของเรขา ถูกกำหนดในระนาบพิกัดฉาก จะมีลักษณะอย่างไร"

แนวทางการตอบ : ไม่ว่าจุดศูนย์กลางจะอยู่ส่วนใดของกราฟ จะต้องมีพิกัดจุด (x,y) เสมอ และ เซตของจุดทั้งหมดที่เป็นขอบของวงกลม ก็มีพิกัด เช่นเดียวกัน (ดังรูป)



5. นักเรียนทำกิจกรรมสืบเสาะทางคณิตศาสตร์ เรื่อง "ปริศนาอัศจรรย์ครอปเซอร์เคิล (Crop circle)" ในใบกิจกรรมย่อยที่ 1 และ ครูนัดหมายกับนักเรียน เรื่องกำหนดการส่งงาน

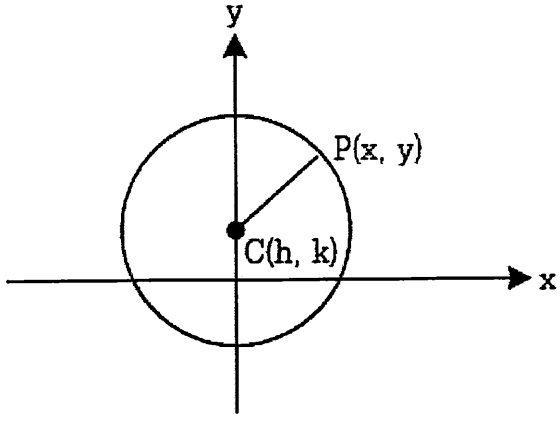
ชั่วโมงที่ 2 เรื่อง รูปแบบมาตรฐานของวงกลม

ก่อนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นการปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์การเรียนรู้และการทำงานทางคณิตศาสตร์

1.1 งานทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในการสำรวจและสรุปสาระสำคัญเกี่ยวกับวงกลม

กิจกรรมการอภิปราย "ค้นหารูปแบบมาตรฐาน"



จากรูป วงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง C(h,k) และ รัศมียาว r หน่วย จะหาสมการที่มีกราฟเป็นรูปวงกลมนี้ได้อย่างไร

แนวทางการตอบ / อภิปราย :

จากรูป วงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง C(h,k) และ รัศมียาว r หน่วย จะหาสมการที่มีกราฟเป็นรูปวงกลมนี้ได้โดย สมมติว่า P(x,y) เป็นจุดใด ๆ บนวงกลม เนื่องจากระยะทางระหว่าง P(x,y) และ C(h,k) เท่ากับ r หน่วย นั่นคือ PC = r ดังนั้น จากสูตรระยะทางระหว่างจุดสองจุด จะได้

$$r=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$$

$$r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$$

นั่นคือ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ เป็นสมการของวงกลมที่ต้องการ

กิจกรรมการเรียนรู้ในชั้นเรียน

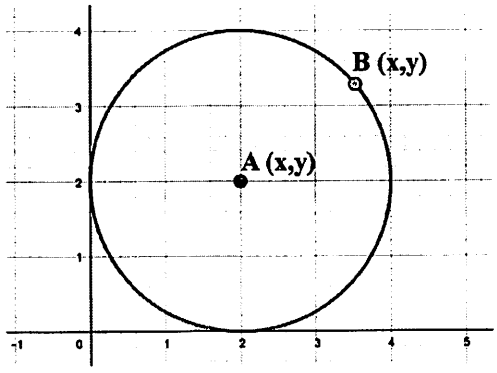
ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์

1. นักเรียนจับกลุ่ม กลุ่มละ 5 – 6 คน โดยคละความสามารถ

2. ครูทบทวนความรู้เกี่ยวกับ นิยามของวงกลม และส่วนประกอบของวงกลม ที่ได้ศึกษาในชั่วโมงที่ผ่านมาและนำเสนอ รูปวงกลมในระนาบพิกัดฉาก

3. ครูนำเสนอปัญหา "ห่างเท่าไหร่" หน้าชั้นเรียน

ปัญหา "ห่างเท่าไหร่"



" จากรูปที่นำเสนอข้างต้นระยะทางระหว่างจุด A และ จุด B เป็นเท่าไร "

4. นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันหาคำตอบ โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับระยะทางระหว่างจุดสองจุดที่ได้ศึกษามาแล้ว

5. ครูกระตุ้นโดยใช้การพูดคุย ซักถาม ให้นักเรียนได้ทำความเข้าใจบริบทและปัญหาของงานทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1) จุด A มีพิกัดอย่างไร

2) จุด B มีพิกัดอย่างไร

3) การหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด มีสูตรในการคำนวณอย่างไร

4) ระยะทางระหว่างจุด A และ จุด B มีชื่อเรียกเป็นอย่างอื่นหรือไม่ อย่างไร

6. ครูใช้คำถามให้นักเรียนได้ตรวจสอบข้อมูลและเงื่อนไขสำคัญต่างๆ ร่วมกันทั้งชั้นเรียน เพื่อให้นักเรียนมีความเข้าใจเบื้องต้นที่ตรงกันก่อนลงมือสำรวจงานทางคณิตศาสตร์

ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

1. นักเรียนลงมือสำรวจใบกิจกรรมที่ 1 เพื่อค้นหารูปแบบมาตรฐานของวงกลม

2. นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันสืบสอบ และอภิปรายร่วมกันในกลุ่ม

วงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง C(h,k) และ รัศมียาว r หน่วย จะสร้างสมการที่มีกราฟเป็นรูปวงกลมนี้ได้อย่างไร

แนวทางการตอบ :

ได้โดย สมมติว่า P(x,y) เป็นจุดใด ๆ บนวงกลม เนื่องจากระยะทางระหว่าง P(x,y) และ C(h,k) เท่ากับ r หน่วย นั่นคือ PC = r ดังนั้น จากสูตรระยะทางระหว่างจุดสองจุด จะได้

$$r=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$$

$$r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$$

นั่นคือ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ เป็นสมการของวงกลมที่ต้องการ

3. ครูคอยกำกับติดตามพฤติกรรมการเรียนรู้และการทำงานของนักเรียน แต่ละกลุ่ม

4. หากพบว่านักเรียนไม่สามารถสำรวจงานทางคณิตศาสตร์ได้ ครูจะกระตุ้นโดยใช้การพูดคุยซักถาม ให้นักเรียนนำข้อมูลที่ได้จากการทำความเข้าใจปัญหามาวิเคราะห์และเชื่อมโยงกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ การหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด และ การแก้สมการที่อยู่ในรูปกรณฑ์

- สูตรในการคำนวณหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด เป็นอย่างไร
- ตัวแปรแต่ละตัวในสูตร มีความหมายแทนสิ่งใดบ้าง และมีความสัมพันธ์กับปัญหาข้างต้นอย่างไร
- การแก้สมการที่อยู่ในรูปกรณฑ์ มีกระบวนการเป็นอย่างไร

5. ครูเดินสำรวจรอบห้องเรียนเกี่ยวกับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียนแต่ละกลุ่มและใช้คำถามเพื่อตรวจสอบความรู้เดิมของนักเรียนโดยให้นักเรียนอธิบายที่มาและเหตุผลเกี่ยวกับที่แนวคิดหรือวิธีการที่ตนเองนำมาใช้ พร้อมกับใช้คำถามให้นักเรียนได้ตรวจสอบความถูกต้องของวิธีการหรือแนวคิดนั้น

6. หากพบว่านักเรียนมีความเข้าใจที่ผิดพลาดในการใช้ความรู้เดิม ครูจะเข้าไปแนะนำหรือชี้แนะให้นักเรียนได้ปรับแก้ให้ถูกต้อง

7. ครูกระตุ้นให้นักเรียนได้พูดคุยและแบ่งปันความคิดเห็นเกี่ยวกับแนวคิดหรือวิธีการที่นำมาใช้ร่วมกันภายในกลุ่มเพื่อหาข้อสรุปร่วมกันของแต่ละกลุ่ม

8. ครูจดบันทึกแนวคิดหรือวิธีการของกลุ่มที่น่าสนใจทั้งที่ถูกต้องและมีข้อผิดพลาด

ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน

1. ครูพิจารณาคัดเลือกแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียนจากแบบบันทึก โดยเลือกแนวคิดหรือวิธีการคำนวณหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด ที่ครอบคลุม หลากหลาย และเพียงพอที่นักเรียนจะสามารถนำไปสรุปเป็นรูปแบบมาตรฐานของวงกลม ตามเป้าหมายการเรียนรู้ และเหมาะสมกับเวลา

2. หากมีกรณีที่ไม่มีแนวคิดหรือวิธีการไม่เพียงพอในการสรุปเป็นความรู้ใหม่ ครูสามารถนำเสนอแนวคิดหรือวิธีการที่ครูได้คาดการณ์ไว้แล้วแก่นักเรียน และหากมีกรณีที่พบแนวคิดหรือวิธีการจำนวนมากครูจะเลือกแนวคิดหรือวิธีการที่สำคัญ เช่น แนวคิดหรือวิธีการที่ถูกต้องสมบูรณ์ที่ใช้ภาษาในการอธิบายที่เข้าใจได้ง่าย ใช้สัญลักษณ์และการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ได้ถูกต้อง หรือแนวคิดหรือวิธีการที่เป็นข้อผิดพลาดหรือความเข้าใจผิดของนักเรียนส่วนใหญ่

3. ครูจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการที่ได้จากการคัดเลือกเพื่อใช้ในการนำเสนอและอภิปรายตามความเหมาะสม ตัวอย่างเช่น ให้นักเรียนเริ่มต้นการนำเสนอและอภิปรายจากกลุ่มที่มีแนวคิดในการหาระยะทางระหว่างจุด A และ จุด B ได้ถูกต้อง และ ลำดับต่อไปจนกว่าจะได้รูปแบบมาตรฐานของวงกลม ที่สมบูรณ์

4. ครูแจ้งลำดับการนำเสนอให้นักเรียนกลุ่มที่เป็นเจ้าของแนวคิดหรือวิธีการที่ถูกคัดเลือกทราบเพื่อให้นักเรียนได้เตรียมความพร้อมก่อนออกมานำเสนอหน้าชั้นเรียน

ขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่

1. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มออกมานำเสนอและอธิบายแนวคิดของตนเองหน้าชั้นเรียนตามลำดับที่กำหนด และเมื่อเสร็จสิ้นในแต่ละกลุ่มครูจะตั้งคำถามให้นักเรียนได้อภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียนเกี่ยวกับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียนครูจะตั้ง

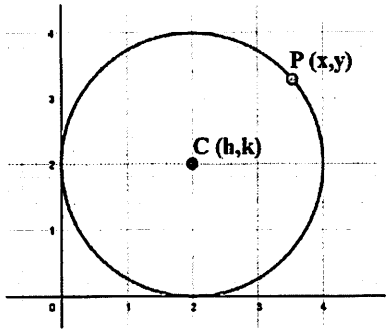
2. นักเรียนร่วมกันอภิปรายทั้งชั้นเรียนโดยแลกเปลี่ยนความรู้ ความคิดเห็น และเหตุผลเกี่ยวกับแนวคิดหรือวิธีการของตนเองและเพื่อน จนได้ข้อสรุปเกี่ยวกับรูปแบบมาตรฐานของวงกลม

โดยดำเนินการเช่นนี้จนครบตามที่ครูได้จัดลำดับไว้

ปัญหา :

วงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง C(h,k) และ รัศมียาว r หน่วย
จะสร้างสมการที่มีกราฟเป็นรูปวงกลมนี้ ได้อย่างไร

กำหนดแนวคิดหรือวิธีการที่สมบูรณ์ ดังนี้



สมมติว่า P(x,y) เป็นจุดใด ๆ บนวงกลม เนื่องจากระยะทางระหว่าง P(x,y) และ C(h,k) เท่ากับ r หน่วย นั่นคือ PC = r ดังนั้น จากสูตรระยะทางระหว่างจุดสองจุด จะได้

$$r=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$$

$$r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$$

นั่นคือ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ เป็นสมการของวงกลมที่ต้องการ

3. ครูใช้คำถามให้นักเรียนได้พิจารณาเปรียบเทียบแนวคิดหรือวิธีการจากข้อสรุปต่าง ๆ และใช้คำถามให้นักเรียนได้เชื่อมโยงข้อสรุปที่ได้จากการพิจารณาเปรียบเทียบไปสู่การสรุปเป็นสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม

4. นักเรียนร่วมกันสรุปสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม ที่ได้จากการอภิปรายด้วยภาษาของตนเอง โดยครูคอยช่วยเหลือ จนได้ข้อสรุปเกี่ยวกับสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม ดังนี้

เรียก $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ว่าสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม

r คือ รัศมีของวงกลม

x, y คือ พิกัดของ P(x,y) ซึ่งเป็นจุดที่อยู่บนวงกลม และ

h, k คือ พิกัดของ C(h,k) ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

5. ครูใช้คำถามให้นักเรียนพิจารณา และเชื่อมโยงสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลมที่ได้ ไปสู่บริบทอื่น คือ

1) ถ้าวงกลม C(h,k) เปลี่ยนตำแหน่งไป แต่รัศมียังเท่าเดิม แล้วจะมีผลอย่างไรกับกราฟ

แนวทางการตอบ : ค่า h, k, x และ y ในสมการ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ จะเปลี่ยนไปตามจุด C(h,k) ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ จุด P(x,y) ซึ่งเป็นจุดที่อยู่บนวงกลม นั้น ส่วนค่า r ยังคงเท่าเดิม (ถ้าไม่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดของวงกลม)

2) รูปแบบมาตรฐานของวงกลม มีประโยชน์อย่างไร

แนวทางการตอบ : (พิจารณาตามความเหมาะสม) เช่น

- สื่อสารหรือแสดงวงกลมในระนาบพิกัดฉากได้โดยไม่ต้องวาดรูป
- ช่วยให้ทราบจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมได้ โดยไม่ต้องวาดรูป
- สามารถสร้างวงกลมที่มีรูปแบบมาตรฐาน ได้
- คำตอบอื่น ๆ ของนักเรียน

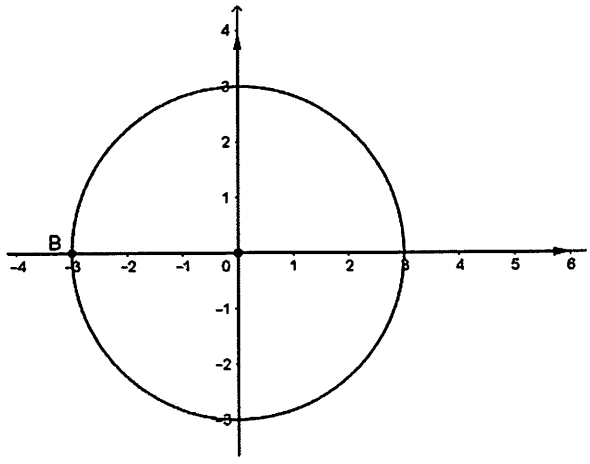
6. ครูตั้งคำถามถ้าทาย จากปัญหาข้างต้น และนักเรียนร่วมกันอภิปราย

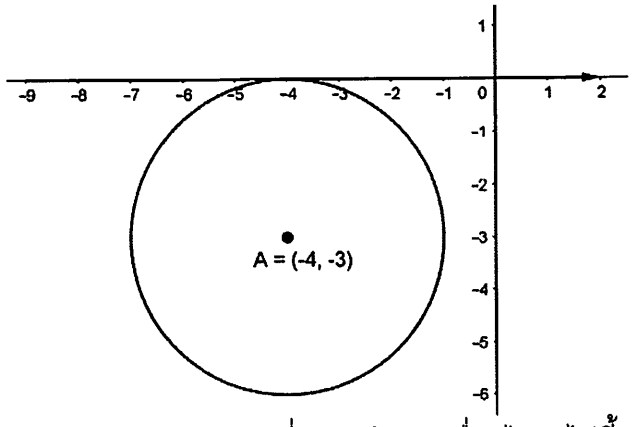
- **ระยะทางระหว่างจุด C(h,k) กับ จุด P(x,y) และจุดอื่น ๆ ที่อยู่บนวงกลม เป็นระยะทางเท่ากัน เสมอ จริงหรือไม่ เพราะเหตุใด**
  (แนวทางการตอบ : จริง เพราะว่า จุด C(h,k) เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุด C(h,k) กับจุดทุกจุดบนวงกลมจะเป็นระยะทางเท่ากันเสมอ ตามนิยามของวงกลม)
- **เมื่อเปลี่ยน จุด P(x,y) เป็นจุดอื่น ๆ ที่อยู่บนวงกลม ยังสามารถใช้รูปแบบมาตรฐานของวงกลมนี้ เพื่อสร้างกราฟที่เป็นรูปวงกลม ได้หรือไม่**
  (แนวทางการตอบ : ได้ เพราะว่า จุด P(x,y) และจุดอื่น ๆ ที่อยู่บนวงกลม ล้วนแต่มีระยะห่างจากจุด C(h,k) เท่ากันทุกจุด)

7. นักเรียนร่วมกันอภิปรายโดยเชื่อมโยงสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม ที่ได้

8. ครูตั้งคำถามจากการใช้บทนิยามเพื่อไปสู่การพิจารณารูปวงกลมรูปอื่น ๆ นักเรียนร่วมกันอภิปรายโดยใช้สูตรที่ได้จากข้อ ดังนี้

1) จงเขียนสมการในรูปแบบมาตรฐานของกราฟต่อไปนี้





2) จงบอกสมการของวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนวงกลม

- จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (- 1, 5) และ ผ่านจุด (-4, -6)
- จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (7,3) และสัมผัสแกน x
- วงกลมที่อยู่ในจตุภาคที่ 1 และสัมผัสแกน x และ แกน y รัศมียาว 5 หน่วย

3) จงหาจุดศูนย์กลางและความยาวของรัศมีของวงกลมที่มีสมการดังต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนวงกลม

- $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$
- $(x-2)^2 + y^2 = 49$

9. นักเรียนร่วมกันตอบคำถามท้าทายในใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง สมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม

ชั่วโมงที่ 3 เรื่อง รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม

ก่อนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นการปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์การเรียนรู้และการทำงานทางคณิตศาสตร์

1.1 งานทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในการสำรวจและสรุปรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม

กิจกรรมการอภิปราย "จากรูปแบบมาตรฐาน สู่รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม"

จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

เมื่อกระจายกำลังสองในสมการข้างต้น จะได้

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2-r^2 = 0$$

$$x^2+y^2+(-2h)x+(-2k)y+\left(h^2+k^2-r^2\right) = 0$$

ให้ $A=-2h$, $B=-2k$ และ $c=\left(h^2+k^2-r^2\right)$

จะได้ $x^2 + y^2 + Ax + Bx + C = 0$ เป็น รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม

1.2 พฤติกรรมการเรียนรู้และวิธีคิดของนักเรียนที่อาจจะนำมาใช้ในการทำงานทางคณิตศาสตร์

1) เข้าใจว่า วงกลม คือ เส้นโค้งปิดบนระนาบ ซึ่งจุดทุกจุดบนเส้นโค้งมีระยะจากจุดตรึงจุดหนึ่งเท่ากัน เรียกจุดตรึงนั้นว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม
2) เข้าใจว่า วงกลม คือ อาณาบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง ซึ่งจุดทุกจุดบนเส้นโค้งมีระยะจากจุดตรึงจุดหนึ่งเท่ากัน เรียกจุดตรึงนั้นว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม
3) เข้าใจว่า วงกลม คือ (1) เส้นโค้งปิดบนระนาบ ซึ่งจุดทุกจุดบนเส้นโค้งมีระยะจากจุดตรึงจุดหนึ่งเท่ากัน เรียกจุดตรึงนั้นว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม และ อาณาบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้งใน (1) แยกจากกันไม่ได้
4) เข้าใจว่า สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k) และรัศมียาว r หน่วย คือ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

5) รูปแบบมาตรฐานของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k) และรัศมียาว r หน่วย คือ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ เมื่อกระจายกำลังสองสมบูรณ์จะได้เป็น

$$x^2+y^2+Ax+Bx+C=0$$

เมื่อ $A=-2h$, $B=-2k$ และ $c=\left(h^2+k^2-r^2\right)$

จุดศูนย์กลางคือ $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ และรัศมีคือ $r=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4C}$

6) แนวคิดอื่น ๆ ที่ใช้อธิบายลักษณะของวงกลม และการคำนวณหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม

1.3 ข้อผิดพลาดหรือความเข้าใจผิดของนักเรียนที่อาจจะเกิดขึ้นเกี่ยวกับวงกลม

1) พิจารณาสมการรูปทั่วไปของวงกลมโดยใช้วิธีลัด ทำให้ได้คำตอบที่ไม่ถูกต้อง เช่น ระบุว่าสมการ $x^2+2x+y^2-8y+25=0$ เป็นสมการวงกลม เนื่องจากกำลังสูงสุดของตัวแปร x และ y เป็น 2 และสัมประสิทธิ์ของ x^2 เป็นบวกและเท่ากับสัมประสิทธิ์ของ y^2

2) นักเรียนเข้าใจว่า การศึกษาวงกลมบนระนาบพิกัดฉาก มีความแตกต่างจากการศึกษาวงกลมในระนาบปกติ ที่เคยศึกษาในระดับมัธยมต้น

3) เกิดข้อผิดพลาด (Mistakes) ในการเขียน สมการรูปทั่วไปของวงกลม ให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม โดยการจัดกลุ่มของพจน์ที่มีตัวแปร x และตัวแปร y แล้วทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

4) เขียนกราฟและหาส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงกลม เช่น จุดศูนย์กลาง และ รัศมี ผิดพลาดเนื่องจากข้อผิดพลาด (Mistakes) ในข้อ 3)

5) เกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนว่า วงกลม เป็นฟังก์ชัน

กิจกรรมการเรียนรู้ในชั้นเรียน

ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ (3 นาที)

1. นักเรียนจับกลุ่ม กลุ่มละ 5 – 6 คน โดยคละความสามารถ

2. ครูนำเสนอปัญหา "จากรูปแบบมาตรฐาน สู่รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม" หน้าชั้นเรียน ดังนี้

"จากรูปแบบมาตรฐานของวงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
ถ้ากระจายกำลังสองสมบูรณ์ จะได้ผลเป็นอย่างไร"

3. นักเรียนแต่ละคนร่วมกันคิดวิเคราะห์และอภิปรายภายในกลุ่ม โดยมีแนวคิดดังนี้

จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

เมื่อกระจายกำลังสองในสมการข้างต้น จะได้

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2 = r^2$$

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2-r^2 = 0$$

4. ครูใช้คำถามให้นักเรียนได้ตรวจสอบข้อมูลและเงื่อนไขสำคัญต่าง ๆ ร่วมกันทั้งชั้นเรียน เพื่อให้นักเรียนมีความเข้าใจเบื้องต้นที่ตรงกันก่อนลงมือสำรวจงานทางคณิตศาสตร์

- สูตรกำลังสองสมบูรณ์เป็นอย่างไร
- เราจะใช้สูตรกำลังสองสมบูรณ์ในการกระจายวงเล็บ $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$ ได้หรือไม่ และได้ผลเป็นอย่างไร

ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน (10 นาที)

1. นักเรียนลงมือสำรวจใบกิจกรรมที่ 1 เพื่อค้นหาแนวคิดหรือรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม ตามความเข้าใจของตนเอง

2. นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันศึกษา ทดลองกระจายกำลังสองสมบูรณ์

$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

3. เมื่อกระจาย $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$ แล้วนักเรียนแต่ละกลุ่มอาจจะได้สมการที่แตกต่างกัน เนื่องจากนักเรียนแต่ละกลุ่มอาจมีการเรียงนิพจน์ที่ต่างกัน เช่น

$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2 = r^2$,

$x^2+y^2-2hx+h^2-2ky+k^2 = r^2$,

$x^2+y^2+h^2+k^2-2hx-2ky = r^2$ หรือ

$x^2+y^2+h^2+k^2-2hx-2ky-r^2 = 0$

4. ครูคอยกำกับติดตามพฤติกรรมการเรียนรู้และการทำงานของนักเรียน แต่ละกลุ่ม

5. ครูอธิบายว่าแต่ละกลุ่มจะได้สมการที่แตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับการเรียงนิพจน์ของแต่ละกลุ่ม แต่ทั้งหมดนั้นคือสมการเดียวกัน นั่นเอง

6. หากพบว่านักเรียนไม่สามารถกระจายกำลังสองสมบูรณ์ $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$ ได้ ครูจะกระตุ้นโดยใช้การพูดคุยซักถาม ให้นักเรียนนำข้อมูลที่ได้จากการทำความเข้าใจปัญหามา

วิเคราะห์และเชื่อมโยงกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ได้แก่ สูตรกำลังสองสมบูรณ์ และ การจัดกลุ่มพหุนาม ดังนี้

$(x-h)^2 = x^2-2xh+h^2$ และ $(y-k)^2 = y^2-2yk+k^2$

จะได้ $(x-h)^2+(y-k)^2 = \left(x^2-2xh+h^2\right)+\left(y^2-2yk+k^2\right)$

จึงได้ว่า $x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2 = r^2$ หรือ รูปแบบอื่น ขึ้นอยู่กับการเรียงนิพจน์ อาจทำให้ฝั่งใดฝั่งหนึ่งของสมการ กลายเป็น 0 ตามรูปแบบของสมการพหุนามกำลังสอง

นั่นคือ

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2-r^2 = 0$$

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2 = 0$$

$$x^2+y^2+(-2h)x+(-2k)y+\left(h^2+k^2-r^2\right) = 0$$

ให้ $A=-2h$, $B=-2k$ และ $c=\left(h^2+k^2-r^2\right)$

จะได้ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ เป็น รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม

7. ครูตั้งคำถามถ้าทาย จากปัญหาข้างต้น

ถ้ากำหนดสมการ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ จะพิจารณาว่าสมการนี้มีกราฟเป็นวงกลมหรือไม่ และถ้าเป็นวงกลมแล้วจุดศูนย์กลางมีพิกัดเท่าใด รัศมีความยาวเป็นอย่างไร

แนวทางการตอบ

พิจารณา

$$x^2+y^2+Ax+By+C = \left(x^2+Ax\right)+\left(y^2+By\right)+C$$

$$= \left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+C-\frac{A^2}{4}-\frac{B^2}{4}$$

ดังนั้น สมการ $\left(x^2+Ax\right)+\left(y^2+By\right)+C = 0$ สามารถเขียนได้ในรูป

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+C-\frac{A^2}{4}-\frac{B^2}{4}=0$$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C$$

$$\left(x-\left(-\frac{A}{2}\right)\right)^2+\left(y-\left(-\frac{B}{2}\right)\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}$$

นั่นคือ

ถ้า $A^2 + B^2 - 4C > 0$ แล้วสมการ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

มีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ และมีรัศมียาว

$\sqrt{\frac{A^2+B^2-4C}{4}}$ หน่วย

ถ้า $A^2 + B^2 - 4C = 0$ จะได้ว่าสมการ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

มีกราฟเป็นจุดเพียงจุดเดียว คือ $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

ถ้า $A^2 + B^2 - 4C < 0$ จะได้ว่าสมการ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ ไม่มีกราฟในระนาบ XY

8. ครูเดินสำรวจรอบห้องเรียนเกี่ยวกับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียนแต่ละกลุ่มและใช้คำถามเพื่อตรวจสอบความรู้เดิมของนักเรียนโดยให้นักเรียนอธิบายที่มาของสมการ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ และเหตุผลเกี่ยวกับที่แนวคิดหรือวิธีการที่ตนเองนำมาใช้ พร้อมกับใช้คำถามให้นักเรียนได้ตรวจสอบความถูกต้องของวิธีการหรือแนวคิดนั้น

9. หากพบว่านักเรียนมีความเข้าใจที่ผิดพลาดในการใช้ความรู้เดิม ครูจะเข้าไปแนะนำหรือชี้แนะให้นักเรียนได้ปรับแก้ให้ถูกต้อง

10. ครูกระตุ้นให้นักเรียนได้พูดคุยและแบ่งปันความคิดเห็นเกี่ยวกับแนวคิดหรือวิธีการที่นำมาใช้ร่วมกันภายในกลุ่มเพื่อหาข้อสรุปร่วมกันของแต่ละกลุ่ม

11. ครูจดบันทึกแนวคิดหรือวิธีการของกลุ่มที่น่าสนใจทั้งที่ถูกต้องและมีข้อผิดพลาด

ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน (5 นาที)

1. ครูพิจารณาคัดเลือกแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียนจากแบบบันทึก โดยเลือกแนวคิดหรือวิธีการให้ครอบคลุม หลากหลาย และเพียงพอที่นักเรียนจะสามารถนำไปสรุปเป็นรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม ตามเป้าหมายการเรียนรู้ และเหมาะสมกับเวลา

2. หากมีกรณีที่ไม่มีแนวคิดหรือวิธีการไม่เพียงพอในการสรุปเป็นความรู้ใหม่ ครูสามารถนำเสนอแนวคิดหรือวิธีการที่ครูได้คาดการณ์ไว้แล้วแก่นักเรียน และหากมีกรณีที่พบแนวคิดหรือวิธีการจำนวนมากครูจะเลือกแนวคิดหรือวิธีการที่สำคัญ เช่น แนวคิดหรือวิธีการที่ถูกต้องสมบูรณ์ที่ใช้ภาษาในการอธิบายที่เข้าใจได้ง่าย หรือแนวคิดหรือวิธีการที่เป็นข้อผิดพลาดหรือความเข้าใจผิดของนักเรียนส่วนใหญ่

3. ครูจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการที่ได้จากการคัดเลือกเพื่อใช้ในการนำเสนอและอภิปรายตามความเหมาะสม

4. ครูแจ้งลำดับการนำเสนอให้นักเรียนกลุ่มที่เป็นเจ้าของแนวคิดหรือวิธีการที่ถูกคัดเลือกทราบเพื่อให้นักเรียนได้เตรียมความพร้อมก่อนออกมานำเสนอหน้าชั้นเรียน

ขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่ (32 นาที)

1. ครูให้นักเรียนออกมานำเสนอและอธิบายแนวคิดในการสร้างรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม หน้าชั้นเรียนตามลำดับที่กำหนด

ปัญหา : จากรูปแบบมาตรฐาน สู่รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม

จากรูปแบบมาตรฐานของวงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$ *ถ้ากระจายกำลังสองสมบูรณ์ และจะได้ผลเป็นอย่างไร"*

และเมื่อเสร็จสิ้นในแต่ละการนำเสนอและอธิบายแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียนครูจะตั้งคำถามให้นักเรียนได้อภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียนเกี่ยวกับแนวคิด นั้น

2. นักเรียนร่วมกันอภิปรายทั้งชั้นเรียนโดยแลกเปลี่ยนความรู้ ความคิดเห็น และเหตุผลเกี่ยวกับแนวคิดหรือวิธีการของตนเองและเพื่อน จนได้ข้อสรุปรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม โดยดำเนินการเช่นนี้จนครบตามที่ครูได้จัดลำดับไว้

3. ครูใช้คำถามให้นักเรียนได้พิจารณาเปรียบเทียบแนวคิดหรือวิธีการจากข้อสรุปต่าง ๆ และใช้คำถามให้นักเรียนได้เชื่อมโยงข้อสรุปที่ได้จากการพิจารณาเปรียบเทียบไปสู่การสรุปเป็นความรู้ใหม่ คือ

ถ้ากำหนดสมการ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ จะพิจารณาว่าสมการนี้มีกราฟเป็นวงกลมหรือไม่ และถ้าเป็นวงกลมแล้วจุดศูนย์กลางมีพิกัดเท่าใด รัศมีความยาวเป็นอย่างไร

4. นักเรียนร่วมกันสรุปสมการรูปแบบทั่วไปของวงกลม ที่ได้จากการอภิปรายด้วยภาษาของตนเอง โดยครูคอยช่วยเหลือ จนได้ข้อสรุปเกี่ยวกับสมการรูปแบบทั่วไปของวงกลม ดังนี้

เรียก $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ ว่าสมการรูปแบบทั่วไปของวงกลม

ถ้า $A^2 + B^2 - 4C > 0$ แล้วจะมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

และมีรัศมียาว $\sqrt{\frac{A^2+B^2-4C}{4}}$ หน่วย

ถ้า $A^2 + B^2 - 4C = 0$ แล้วจะมีกราฟเป็นจุดเพียงจุดเดียว คือ $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

ถ้า $A^2 + B^2 - 4C < 0$ แล้วไม่มีกราฟในระนาบ XY

5. ครูใช้คำถามให้นักเรียนพิจารณาและร่วมกันอภิปราย เพื่อเชื่อมโยงรูปทั่วไปของวงกลมที่ได้ไปสู่บริบทอื่น คือ

1) สมการ $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ มีกราฟเป็นวงกลมหรือไม่ เพราะเหตุใด

2) จงแสดงว่าสมการต่อไปนี้เป็นสมการวงกลมหรือไม่ ถ้าเป็นจงหาจุดศูนย์กลางและความยาวรัศมีของวงกลม

- $y^2 + x^2 + y = 0$
- $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 13 = 0$
- $x^2 + y^2 + x + 2y + 1 = 0$
- $x^2 + y^2 + 6x + 2 = 0$

6. ครูตั้งคำถามท้าทาย ให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายโดยเชื่อมโยงสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม จากปัญหาข้างต้น

- **รูปแบบมาตรฐานของวงกลม กับ รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม มีความแตกต่างกันอย่างไร**

  แนวทางการตอบ: มีความแตกต่างกัน เมื่อต้องการสร้างรูปวงกลมในระนาบพิกัดฉาก

  เมื่อพิจารณารูปแบบมาตรฐานของวงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

เราจะทราบจุดศูนย์กลางของวงกลม (h,k) และความยาวของรัศมี (r) ได้ทันที แต่รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ มีวิธีการสร้างวงกลมได้ 2 วิธี คือ 1) จะต้องจัดรูปสมการใหม่ให้เป็นรูปแบบมาตรฐานของวงกลม โดยใช้กำลังสองสมบูรณ์ และ 2) ใช้สูตรสำเร็จรูป คือสมการวงกลม

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ มีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

และมีรัศมียาว $\sqrt{\frac{A^2+B^2-4C}{4}}$ หรือ $\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4C}$ หน่วย

เมื่อ $A=-2h$, $B=-2k$ และ $c = \left(h^2+k^2-r^2\right)$

8. ครูตั้งคำถามจากการใช้บทนิยามเพื่อไปสู่การพิจารณารูปวงกลมรูปอื่น ๆ นักเรียนร่วมกันอภิปรายโดยใช้สูตรที่ได้จากข้อ ดังนี้

- จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (-1,1) และสัมผัสกับเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น $3x - 2y + 18 = 0$
- จงหาพื้นที่ของบริเวณที่อยู่นอกวงกลม $x^2 + y^2 = 4$ แต่อยู่ภายในวงกลม $x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$
- จงหาสมการเส้นสัมผัสของวงกลม $x^2 + y^2 - 10x = 0$ ณ จุดที่วงกลมตัดเส้นตรง $4x + 3y = 20$

9. นักเรียนร่วมกันตอบคำถามท้าทายในใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม

ชั่วโมงที่ 4 เรื่อง สถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับวงกลม

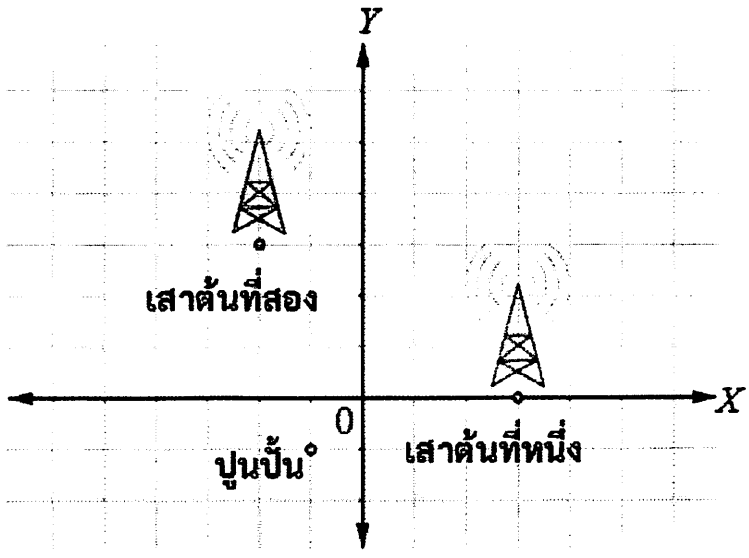
ก่อนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นการปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์การเรียนรู้และการทำงานทางคณิตศาสตร์

1.1 งานทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในการแก้สถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับวงกลม

กิจกรรมการอภิปราย "ช่วยเหลือนักท่องเที่ยว ได้หรือไม่"

โดยทั่วไปเสาสัญญาณโทรศัพท์จะปล่อยสัญญาณออกมาในลักษณะเป็นวงกลม ในหมู่บ้านแห่งหนึ่งมีเสาสัญญาณโทรศัพท์ตั้งอยู่ 2 ต้น ซึ่งแต่ละต้นจะปล่อยสัญญาณออกจากจุดศูนย์กลางได้ไกลที่สุด 7 กิโลเมตร ถ้าปูนปั้นซึ่งเป็นนักท่องเที่ยวขับรถไปในหมู่บ้านข้างเคียงแต่น้ำมันหมดระหว่างทางซึ่งเป็นตำแหน่งที่ไม่มีสัญญาณโทรศัพท์ ดังรูป



ดัดแปลงจาก หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 (สสวท.)

กำหนดให้ 1 หน่วย ในรูปแทนระยะทาง 2 กิโลเมตร

1. จงหาว่า ปูนปั้นจะต้องเดินทางไปทางทิศตะวันออกเป็นระยะทางอย่างน้อยกี่กิโลเมตร จึงจะมีสัญญาณโทรศัพท์

2. จากข้อความ " ถ้าปูนปั้นเดินเข้าหาเสาต้นที่หนึ่ง แล้วจะพบสัญญาณโทรศัพท์ก่อน เพราะตำแหน่งที่ปูนปั้นอยู่ ใกล้กับเสาต้นที่หนึ่งมากกว่าเสาต้นที่สอง" นักเรียนเห็นด้วยกับข้อความข้างต้นหรือไม่ จงร่วมกันอภิปราย และให้เหตุผล

1.2 พฤติกรรมการเรียนรู้และวิธีคิดของนักเรียนที่อาจจะนำมาใช้ในการทำงานทางคณิตศาสตร์

1) เข้าใจว่า สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k) และรัศมียาว r หน่วย คือ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

2) แนวคิดอื่น ๆ ที่ใช้อธิบายลักษณะของวงกลม และการคำนวณหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม

1.3 ข้อผิดพลาดหรือความเข้าใจผิดของนักเรียนที่อาจจะเกิดขึ้นเกี่ยวกับวงกลม

1) ไม่สามารถเชื่อมโยงข้อมูลที่กำหนดให้ ในสถานการณ์ กับกระบวนการแก้ปัญหาได้

2) สรุปว่า ปูนปั้นควรเดินทางไปทิศทางเข้าหาเสาต้นที่หนึ่ง จึงจะพบสัญญาณโทรศัพท์ก่อน เพราะตำแหน่งที่ปูนปั้นอยู่ ใกล้กับเสาต้นที่หนึ่งมากกว่าเสาต้นที่สอง

3) เขียนกราฟและบอกส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงกลม เช่น จุดศูนย์กลาง และ รัศมี ผิดพลาดเนื่องจากข้อผิดพลาด (Mistakes)

กิจกรรมการเรียนรู้ในชั้นเรียน

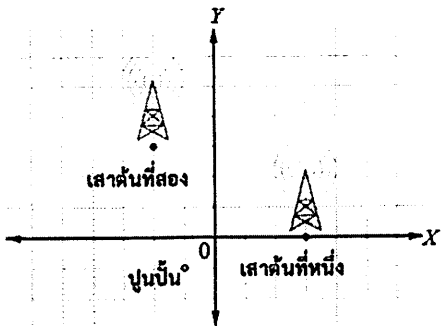
ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ (3 นาที)

1. นักเรียนจับกลุ่ม กลุ่มละ 5 – 6 คน โดยคละความสามารถ

2. ครูนำเสนอสถานการณ์ปัญหา "ช่วยเหลือนักท่องเที่ยว ได้หรือไม่" หน้าชั้นเรียน

สถานการณ์ "ช่วยเหลือนักท่องเที่ยว"

โดยทั่วไปเสาสัญญาณโทรศัพท์จะปล่อยสัญญาณออกมาในลักษณะเป็นวงกลม ในหมู่บ้านแห่งหนึ่งมีเสาสัญญาณโทรศัพท์ตั้งอยู่ 2 ต้น ซึ่งแต่ละต้นจะปล่อยสัญญาณออกจากจุดศูนย์กลางได้ไกลที่สุด 7 กิโลเมตร ถ้าปูนปั้นซึ่งเป็นนักท่องเที่ยวขับรถไปในหมู่บ้านข้างเคียงแต่นำมันหมดระหว่างทางซึ่งเป็นตำแหน่งที่ไม่มีสัญญาณโทรศัพท์ ดังรูป



กำหนดให้ 1 หน่วย ในรูปแทนระยะทาง 2 กิโลเมตร

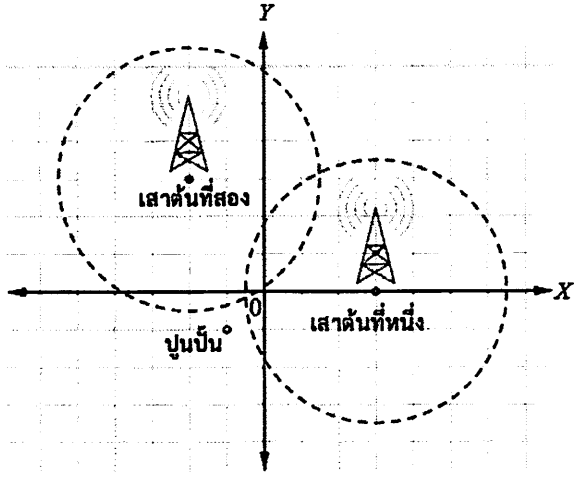
1. จงหาว่า ปูนปั้นจะต้องเดินทางไปทางทิศตะวันออกเป็นระยะทางอย่างน้อยกี่กิโลเมตร จึงจะมีสัญญาณโทรศัพท์

2. จากข้อความ " ถ้าปูนปั้นเดินเข้าหาเสาต้นที่หนึ่ง แล้วจะพบสัญญาณโทรศัพท์ก่อน เพราะตำแหน่งที่ปูนปั้นอยู่ ใกล้กับเสาต้นที่หนึ่งมากกว่าเสาต้นที่สอง" นักเรียนเห็นด้วยกับข้อความข้างต้นหรือไม่ จงร่วมกันอภิปราย และให้เหตุผล

3. นักเรียนแต่ละคนร่วมกันคิดสืบเสาะหาความรู้และอภิปรายภายในกลุ่ม โดยมีแนวคิดดังนี้

เนื่องจาก 1 หน่วย ในรูปแทนระยะทาง 2 กิโลเมตรจะได้ เสาสัญญาณโทรศัพท์ต้นที่หนึ่งและสองอยู่ที่จุด (6, 0) และ (–4, 6) ตามลำดับ ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของการปล่อยสัญญาณ และปูนปั้นอยู่ที่จุด (–2, – 2)

เนื่องจาก เสาสัญญาณโทรศัพท์แต่ละต้นปล่อยสัญญาณออกจากจุดศูนย์กลางได้ไกลที่สุด 7 กิโลเมตร ดังนั้น สมการวงกลมที่แทนขอบเขตการปล่อยสัญญาณโทรศัพท์ของเสาต้นที่หนึ่งและเสา ต้นที่สอง คือ $(x + 4)^2 + (y – 6)^2 = 49$ และ $(x – 6)^2 + y^2 = 49$ ตามลำดับ ดังรูป



4. ครูใช้คำถามให้นักเรียนได้ตรวจสอบข้อมูลและเงื่อนไขสำคัญต่างๆ ร่วมกันทั้งชั้นเรียน เพื่อให้นักเรียนมีความเข้าใจเบื้องต้นที่ตรงกันก่อนลงมือสำรวจงานทางคณิตศาสตร์

- จากสถานการณ์ปัญหาข้างต้น นักเรียนมีวิธีการแก้ปัญหา โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับวงกลม ได้หรือไม่ อย่างไร
- สามารถเขียน รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม เพื่อแสดงสัญญาณโทรศัพท์ได้อย่างไร

ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน (10 นาที)

1. นักเรียนลงมือสำรวจใบกิจกรรมที่ 1 เพื่อแก้ไขสถานการณ์ปัญหา "ช่วยเหลือนักท่องเที่ยว" โดยใช้ความรู้เรื่องวงกลม ตามความเข้าใจของตนเอง

2. ครูคอยกำกับติดตามพฤติกรรมการเรียนรู้และการทำงานของนักเรียน แต่ละกลุ่ม

3. ในขณะที่นักเรียนทำงาน หากพบว่านักเรียนไม่สามารถแก้ปัญหาได้ หรือไม่สามารถนำเสนอตัวแทนความคิดเกี่ยวกับวงกลมได้ ครูจะกระตุ้นโดยใช้การพูดคุยซักถาม ให้นักเรียนนำข้อมูลที่ได้จากการทำความเข้าใจปัญหามาวิเคราะห์และเชื่อมโยงกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

เนื่องจากปูนปั้นจะต้องเดินไปทางทิศตะวันออก แสดงว่า ปูนปั้นต้องเดินในแนวเส้นตรง $y = -2$ ไปทางขวา นั่นคือต้องการหาจุดตัดระหว่างเส้นตรง $y = -2$ และวงกลม $(x-6)^2 + y^2 = 49$ แทน $y = -2$ ใน $(x-6)^2 + y^2 = 49$ จะได้ $x = 6 \pm 3\sqrt{5}$

นั่นคือ จุดตัดระหว่างเส้นตรง $y = -2$ และวงกลม $(x-6)^2 + y^2 = 49$ คือ $(6 \pm 3\sqrt{5}, -2)$

4. ครูเดินสำรวจรอบห้องเรียนเกี่ยวกับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียนแต่ละกลุ่มและใช้คำถามเพื่อตรวจสอบความรู้เดิมของนักเรียน และเหตุผลเกี่ยวกับที่แนวคิดหรือวิธีการที่ตนเองนำมาใช้ พร้อมกับใช้คำถามให้นักเรียนได้ตรวจสอบความถูกต้องของวิธีการหรือแนวคิดนั้น

5. หากพบว่านักเรียนมีความเข้าใจที่ผิดพลาดในการใช้ความรู้เดิม ครูจะเข้าไปแนะนำหรือชี้แนะให้นักเรียนได้ปรับแก้ให้ถูกต้อง

6. ครูกระตุ้นให้นักเรียนได้พูดคุยและแบ่งปันความคิดเห็นเกี่ยวกับแนวคิดหรือวิธีการที่นำมาใช้ร่วมกันภายในกลุ่มเพื่อหาข้อสรุปร่วมกันของแต่ละกลุ่ม

7. ครูจดบันทึกแนวคิดหรือวิธีการของกลุ่มที่น่าสนใจทั้งที่ถูกต้องและมีข้อผิดพลาด

ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน (5 นาที)

1. ครูพิจารณาคัดเลือกแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียนจากแบบบันทึก โดยเลือกแนวคิดหรือวิธีการให้ครอบคลุม หลากหลาย และเพียงพอที่นักเรียนจะสามารถนำไปสรุปเป็นรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม ตามเป้าหมายการเรียนรู้ และเหมาะสมกับเวลา

2. หากมีกรณีที่ไม่มีแนวคิดหรือวิธีการไม่เพียงพอในการสรุปเป็นความรู้ใหม่ ครูสามารถนำเสนอแนวคิดหรือวิธีการที่ครูได้คาดการณ์ไว้แล้วแก่นักเรียน และหากมีกรณีที่พบแนวคิดหรือวิธีการจำนวนมากครูจะเลือกแนวคิดหรือวิธีการที่สำคัญ เช่น แนวคิดหรือวิธีการที่ถูกต้องสมบูรณ์ที่ใช้ภาษาในการอธิบายที่เข้าใจได้ง่าย หรือแนวคิดหรือวิธีการที่เป็นข้อผิดพลาดหรือความเข้าใจผิดของนักเรียนส่วนใหญ่

3. ครูจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการที่ได้จากการคัดเลือกเพื่อใช้ในการนำเสนอและอภิปรายตามความเหมาะสม ตัวอย่างเช่น ให้นักเรียนเริ่มต้นการนำเสนอและอภิปรายจากแนวคิดหรือวิธีการที่ถูกต้องสมบูรณ์ไปสู่แนวคิดหรือวิธีการที่มีข้อผิดพลาดหรือความเข้าใจผิด หรือเริ่มต้นจากแนวคิดหรือวิธีการที่นักเรียนส่วนใหญ่ใช้ไปสู่แนวคิดหรือวิธีการที่เหลือ

4. ครูแจ้งลำดับการนำเสนอให้นักเรียนกลุ่มที่เป็นเจ้าของแนวคิดหรือวิธีการที่ถูกคัดเลือกทราบเพื่อให้นักเรียนได้เตรียมความพร้อมก่อนออกมานำเสนอหน้าชั้นเรียน

ขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่ (32 นาที)

1. ครูให้นักเรียนออกมานำเสนอและอธิบายแนวคิดในการสถานการณ์ปัญหา *"ช่วยเหลือนักท่องเที่ยว"* หน้าชั้นเรียนตามลำดับที่กำหนด

2. นักเรียนร่วมกันอภิปรายทั้งชั้นเรียนโดยแลกเปลี่ยนความรู้ ความคิดเห็น และเหตุผลเกี่ยวกับแนวคิดหรือวิธีการของตนเองและเพื่อน จนได้ข้อสรุป โดยดำเนินการเช่นนี้จนครบตามที่ครูได้จัดลำดับไว้

3. ครูใช้คำถามให้นักเรียนได้พิจารณาเปรียบเทียบแนวคิดหรือวิธีการจากข้อสรุปต่าง ๆ และใช้คำถามให้นักเรียนได้เชื่อมโยงข้อสรุปที่ได้จากการพิจารณาเปรียบเทียบไปสู่การสรุปเป็นความรู้ใหม่ คือ

> **" ถ้าอยากทราบว่าปูนปั้น ควรเดินทางไปยังทิศใด จึงจะสัญญาณโทรศัพท์รวดเร็วที่สุด ควรพิจารณาว่า ระยะทางระหว่างจุดที่ปูนปั้นอยู่ ถึง จุดของเสาทั้งสองต้น ว่าปูนปั้นอยู่ใกล้เสาต้นใดกว่ากัน "**
>
> นักเรียนเห็นด้วยหรือไม่ เพราะเหตุใด

4. นักเรียนร่วมกันสรุปวิธีการแก้ปัญหาเกี่ยวกับวงกลม ที่ได้จากการอภิปรายด้วยภาษาของตนเอง โดยครูคอยช่วยเหลือ จนได้ข้อสรุปเกี่ยวกับสมการรูปแบบทั่วไปของวงกลม

5. นักเรียนร่วมกันทำใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง ช่วยเหลือนักท่องเที่ยว

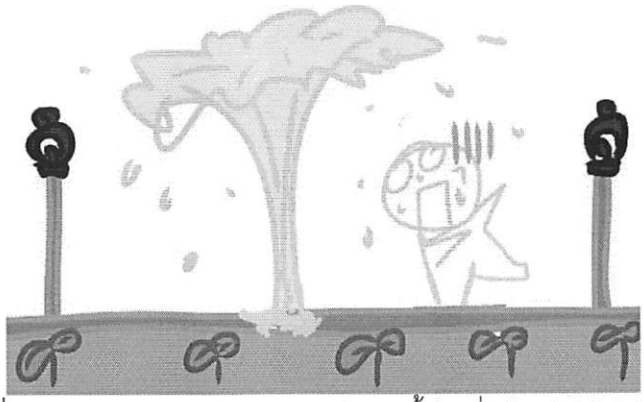
ชั่วโมงที่ 5 เรื่อง สถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับวงกลม

ก่อนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นการปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์การเรียนรู้และการทำงานทางคณิตศาสตร์

1.1 งานทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในการแก้สถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับวงกลม

กิจกรรมการอภิปราย "ระบบสปริงเกอร์ของโรงเรียน"



สนามหญ้าที่สนามฟุตบอลโรงเรียนของเราได้รับน้ำไม่ทั่วถึง ทำให้หญ้าบางส่วนตาย ทำให้โรงเรียนจำเป็นต้องออกแบบและติดตั้งระบบสปริงเกอร์ใหม่

ซึ่งในสนามฟุตบอลใหญ่ ครูภิญโญได้ออกแบบติดตั้งสปริงเกอร์สำหรับสนามฟุตบอล สามารถเคลื่อนย้ายตำแหน่งได้ และในสวนหย่อมข้าง ๆ สนามฟุตบอล ได้ติดตั้งสปริงเกอร์แบบพ่นฝอย (Spray) ไม่สามารถเคลื่อนย้ายได้

วันหนึ่ง ได้มีนักเรียนกลุ่มหนึ่งที่กำลังศึกษาเกี่ยวกับเรื่องวงกลมในระบบพิกัดฉาก ได้ทดลองสังเกตและบันทึกลักษณะการพ่นน้ำของสปริงเกอร์ทั้งในสนามฟุตบอล และสวนหย่อมข้าง ๆ สนามฟุตบอล ได้วาดภาพและสมมุติพิกัดต่าง ๆ ขึ้นเอง จึงสรุปว่า สปริงเกอร์ในสนามฟุตบอลพ่นน้ำเป็นวงกลม อธิบายด้วยสมการ $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 81$ และ สปริงเกอร์แบบพ่นฝอย (Spray) ในสวนหย่อมข้าง ๆ สนามฟุตบอล อธิบายด้วยสมการ $x^2 + y^2 + 20x - 12y = -127$

นายสุทธินันและนางสาวสุพรรษา เป็นเด็กที่ขาดเรียนในวันนั้น จึงได้ขอผลการศึกษาจากเพื่อน ๆ มาโรงเรียนและได้ไปสังเกตสปริงเกอร์ จึงทำให้เกิดการโต้เถียงกัน ซึ่งนายสุทธินันกล่าวว่า **จากสมการทั้งสองนั้น ละอองน้ำของสปริงเกอร์ทั้งสองนั้นซ้อนทับกัน จึงควรย้ายตำแหน่งของสปริงเกอร์ในสนามฟุตบอล เพราะว่าเปลืองน้ำ** ส่วนนางสาวสุพรรษา กล่าวว่า **ไม่จริง เพราะ จากสมการนั้น ละอองน้ำไม่พุ่งมาชนกันอย่างแน่นอน**

ให้นักเรียนวิเคราะห์ สืบสอบ และ ร่วมกันอภิปรายว่า นายสุทธินัน หรือ นางสาวสุพรรษา ถูกต้อง พร้อมให้เหตุผลประกอบ

1.2 พฤติกรรมการเรียนรู้และวิธีคิดของนักเรียนที่อาจจะนำมาใช้ในการทำงานทางคณิตศาสตร์

1) ใช้การวาดภาพวงกลมทั้งสองแล้วตรวจสอบว่าวงกลมทั้งสองทับกันหรือไม่

2) เข้าใจว่า สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k) และรัศมียาว r หน่วย คือ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

3) รูปแบบมาตรฐานของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k) และรัศมียาว r หน่วย คือ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ เมื่อกระจายกำลังสองสมบูรณ์จะได้เป็น $x^2+y^2+Ax+Bx+C=0$ เมื่อ $A=-2h$, $B=-2k$ และ $c=\left(h^2+k^2-r^2\right)$ จุดศูนย์กลางคือ $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ และรัศมีคือ $r=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4C}$

4) แนวคิดอื่น ๆ ที่ใช้อธิบายลักษณะของวงกลม และการคำนวณหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม

1.3 ข้อผิดพลาดหรือความเข้าใจผิดของนักเรียนที่อาจจะเกิดขึ้นเกี่ยวกับวงกลม

1) ไม่สามารถเขียนเชื่อมโยงสมการวงกลมที่กำหนดให้ กับสถานการณ์ปัญหาได้

2) เขียนกราฟและบอกส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงกลม เช่น จุดศูนย์กลาง และ รัศมี ผิดพลาดเนื่องจากข้อผิดพลาด (Mistakes)

กิจกรรมการเรียนรู้ในชั้นเรียน

ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ (3 นาที)

1. นักเรียนจับกลุ่ม กลุ่มละ 5 – 6 คน โดยคละความสามารถ

2. ครูนำเสนอสถานการณ์ปัญหา "**ระบบสปริงเกอร์ของโรงเรียน**" หน้าชั้นเรียน

3. นักเรียนแต่ละคนร่วมกันสืบเสาะหาความรู้ และอภิปรายภายในกลุ่ม

4. ครูใช้คำถามให้นักเรียนได้ตรวจสอบข้อมูลและเงื่อนไขสำคัญต่าง ๆ ร่วมกันทั้งชั้นเรียน เพื่อให้นักเรียนมีความเข้าใจเบื้องต้นที่ตรงกันก่อนลงมือสำรวจงานทางคณิตศาสตร์

ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน (10 นาที)

1. นักเรียนลงมือสำรวจใบกิจกรรมที่ 1 เพื่อแก้ไขสถานการณ์ปัญหา "ระบบสปริงเกอร์ของโรงเรียน" โดยใช้ความรู้เรื่องวงกลม ตามความเข้าใจของตนเอง

2. ครูคอยกำกับติดตามพฤติกรรมการเรียนรู้และการทำงานของนักเรียน แต่ละกลุ่ม

3. ในขณะที่นักเรียนทำงาน หากพบว่านักเรียนไม่สามารถแก้ปัญหาได้ หรือไม่สามารถนำเสนอตัวแทนความคิดเกี่ยวกับวงกลมได้ ครูจะกระตุ้นโดยใช้การพูดคุยซักถาม ให้นักเรียนนำข้อมูลที่ได้จากการทำความเข้าใจปัญหามาวิเคราะห์และเชื่อมโยงกับความรู้ทางคณิตศาสตร์

4. ครูเดินสำรวจรอบห้องเรียนเกี่ยวกับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียนแต่ละกลุ่มและใช้คำถามเพื่อตรวจสอบความรู้เดิมของนักเรียน และเหตุผลเกี่ยวกับที่แนวคิดหรือวิธีการที่ตนเองนำมาใช้ พร้อมกับใช้คำถามให้นักเรียนได้ตรวจสอบความถูกต้องของวิธีการหรือแนวคิดนั้น

5. หากพบว่านักเรียนมีความเข้าใจที่ผิดพลาดในการใช้ความรู้เดิม ครูจะเข้าไปแนะนำหรือชี้แนะให้นักเรียนได้ปรับแก้ให้ถูกต้อง

6. ครูกระตุ้นให้นักเรียนได้พูดคุยและแบ่งปันความคิดเห็นเกี่ยวกับแนวคิดหรือวิธีการที่นำมาใช้ร่วมกันภายในกลุ่มเพื่อหาข้อสรุปร่วมกันของแต่ละกลุ่ม

7. ครูจดบันทึกแนวคิดหรือวิธีการของกลุ่มที่น่าสนใจทั้งที่ถูกต้องและมีข้อผิดพลาด

ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน (5 นาที)

1. ครูพิจารณาคัดเลือกแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียนจากแบบบันทึก โดยเลือกแนวคิดหรือวิธีการให้ครอบคลุม หลากหลาย และเพียงพอที่นักเรียนจะสามารถนำไปสรุปเป็นรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม ตามเป้าหมายการเรียนรู้ และเหมาะสมกับเวลา

2. ครูจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการที่ได้จากการคัดเลือกเพื่อใช้ในการนำเสนอและอภิปรายตามความเหมาะสม ตัวอย่างเช่น ให้นักเรียนเริ่มต้นการนำเสนอและอภิปรายจากแนวคิดหรือวิธีการที่ถูกต้องสมบูรณ์ไปสู่แนวคิดหรือวิธีการที่มีข้อผิดพลาดหรือความเข้าใจผิด หรือเริ่มต้นจากแนวคิดหรือวิธีการที่นักเรียนส่วนใหญ่ใช้ไปแนวคิดหรือวิธีการที่เหลือ

3. ครูแจ้งลำดับการนำเสนอให้นักเรียนกลุ่มที่เป็นเจ้าของแนวคิดหรือวิธีการที่ถูกคัดเลือกทราบเพื่อให้นักเรียนได้เตรียมความพร้อมก่อนออกมานำเสนอหน้าชั้นเรียน

ขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่ (32 นาที)

1. ครูให้นักเรียนออกมานำเสนอและอธิบายแนวคิดในการสถานการณ์ปัญหา *"ระบบสปริงเกอร์ของโรงเรียน"* หน้าชั้นเรียนตามลำดับที่กำหนด

2. นักเรียนร่วมกันอภิปรายทั้งชั้นเรียนโดยแลกเปลี่ยนความรู้ ความคิดเห็น และเหตุผลเกี่ยวกับแนวคิดหรือวิธีการของตนเองและเพื่อน จนได้ข้อสรุป โดยดำเนินการเช่นนี้จนครบตามที่ครูได้จัดลำดับไว้

3. ครูใช้คำถามให้นักเรียนได้พิจารณาเปรียบเทียบแนวคิดหรือวิธีการจากข้อสรุปต่าง ๆ และใช้คำถามให้นักเรียนได้เชื่อมโยงข้อสรุปที่ได้จากการพิจารณาเปรียบเทียบไปสู่การสรุปเป็นความรู้ใหม่

4. นักเรียนร่วมกันสรุปวิธีการแก้ปัญหาเกี่ยวกับวงกลม ที่ได้จากการอภิปรายด้วยภาษาของตนเอง โดยครูคอยช่วยเหลือ จนได้ข้อสรุปเกี่ยวกับสมการรูปแบบทั่วไปของวงกลม

สื่อการเรียนรู้และแหล่งเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรมย่อยที่ 1 "นาฬิกาของเรขา" (ชิ้นงานกลุ่ม)
2. ใบกิจกรรมย่อยที่ 2 "ห่างเท่าไหร่" (ชิ้นงานกลุ่ม)
3. ใบกิจกรรมย่อยที่ 3 "จากรูปแบบมาตรฐาน สู่รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม " (ชิ้นงานกลุ่ม)
4. ใบกิจกรรมย่อยที่ 4 สถานการณ์ "ช่วยเหลือนักท่องเที่ยว" (ชิ้นงานกลุ่ม)
5. ใบกิจกรรมย่อยที่ 5 สถานการณ์ "ระบบสปริงเกอร์ของโรงเรียน" (ชิ้นงานกลุ่ม)

แบบประเมินด้านทักษะและกระบวนการ

ที่	รายการประเมิน												คะแนนรวม
	การแก้ปัญหา (6 คะแนน)				การให้เหตุผล (6 คะแนน)				การนำเสนอตัวแทนความคิด (6 คะแนน)				
	P1	P2	P3	รวม	R1	R2	R3	รวม	Re1	Re2	Re3	รวม	18
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													

ลงชื่อผู้ประเมิน.....วันที่.....

เกณฑ์การแปลผล

ระดับดีมาก	หมายถึง	ได้คะแนน 15 – 18
ระดับดี	หมายถึง	ได้คะแนน 11 – 14
ระดับปานกลาง	หมายถึง	ได้คะแนน 7 – 10
ระดับพอใช้	หมายถึง	ได้คะแนนต่ำกว่า 6

เกณฑ์การให้คะแนนด้านทักษะและกระบวนการ

1. ด้านการแก้ปัญหา (6 คะแนน)

คะแนน	เกณฑ์การพิจารณา
P1 การทำความเข้าใจปัญหา	
2	- ระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบและเงื่อนไขของปัญหาได้ถูกต้องและครบถ้วน
1	- ระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบและเงื่อนไขของปัญหาได้ถูกต้องเพียงบางส่วน หรือ ระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบและเงื่อนไขของปัญหาได้ถูกต้อง แต่ยังไม่ครบถ้วน
0	- ระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบและเงื่อนไขของปัญหาผิด หรือ ไม่ระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบและเงื่อนไขของปัญหา
P2 การดำเนินการแก้ปัญหา	
2	- ใช้สูตร ทฤษฎีบท หรือหลักการทางคณิตศาสตร์เพื่อแสดงการแก้ปัญหาได้ถูกต้อง และครบทุกขั้นตอน
1	- ใช้สูตร ทฤษฎีบท หรือหลักการทางคณิตศาสตร์เพื่อแสดงการแก้ปัญหาได้ถูกต้องเพียงบางส่วน หรือ แสดงการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง แต่ยังไม่ครบทุกขั้นตอน
0	- ใช้สูตร ทฤษฎีบท หรือหลักการทางคณิตศาสตร์เพื่อแสดงการแก้ปัญหาผิด หรือ ไม่แสดงการแก้ปัญหา
P3 การสรุปคำตอบของปัญหา	
2	- สรุปคำตอบได้ถูกต้องและครบถ้วนตามประเด็นที่ปัญหาต้องการทราบ
1	- สรุปคำตอบได้ถูกต้องเพียงบางส่วน หรือ สรุปคำตอบได้ถูกต้อง แต่ยังไม่ครบถ้วนตามประเด็นที่ปัญหาต้องการทราบ
0	- สรุปคำตอบผิด หรือ ไม่สรุปคำตอบ

2. ด้านการให้เหตุผล (6 คะแนน)

คะแนน	เกณฑ์การพิจารณา
R1 การอธิบายเหตุผลของการนำความรู้หรือข้อมูลมาใช้เพื่อทำความเข้าใจปัญหา	
2	- ระบุความสอดคล้องระหว่างสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบกับเงื่อนไขของปัญหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องได้ถูกต้อง
1	- ระบุความสอดคล้องระหว่างสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบกับเงื่อนไขของปัญหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องได้ถูกต้องเพียงบางส่วน
0	- ระบุความสอดคล้องระหว่างสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบกับเงื่อนไขของปัญหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องผิด หรือ ไม่ระบุความสอดคล้อง
R2 การอธิบายเหตุผลของการดำเนินการแก้ปัญหา	
2	- อธิบายเหตุผลของการดำเนินการแก้ปัญหาได้อย่างสมเหตุสมผล
1	- อธิบายเหตุผลของการดำเนินการแก้ปัญหาได้อย่างสมเหตุสมผลในบางส่วนหรืออธิบายไม่ชัดเจน
0	- อธิบายเหตุผลของการดำเนินการแก้ปัญหาไม่สมเหตุสมผล หรือ ไม่สามารถอธิบายได้
R3 การอธิบายความสมเหตุสมผลของคำตอบของปัญหา	
2	- นำคำตอบที่ได้ไปตรวจสอบกับเงื่อนไขของปัญหาได้ถูกต้อง หรือ ระบุความสอดคล้องระหว่างคำตอบและเงื่อนไขของปัญหาได้ถูกต้อง
1	- นำคำตอบที่ได้ไปตรวจสอบกับเงื่อนไขของปัญหาได้ถูกต้องเพียงบางส่วน หรือ ระบุความสอดคล้องระหว่างคำตอบและเงื่อนไขของปัญหาได้ถูกต้องเพียงบางส่วน
0	- นำคำตอบที่ได้ไปตรวจสอบกับเงื่อนไขของปัญหาผิด หรือ ระบุความสอดคล้องระหว่างคำตอบและเงื่อนไขของปัญหาผิด หรือ ไม่เขียนอธิบายความสมเหตุสมผล

3. ด้านการเสนอตัวแทนความคิด (6 คะแนน)

คะแนน	เกณฑ์การพิจารณา
Re1 การใช้ตัวแทนความคิดเพื่อทำความเข้าใจปัญหา	
2	- เขียนแผนภาพ เน้นข้อความ หรือกำหนดสัญลักษณ์จากปัญหาเพื่อระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบและเงื่อนไขของปัญหาได้อย่างเหมาะสม และสื่อความหมายได้อย่างชัดเจน
1	- เขียนแผนภาพ เน้นข้อความ หรือกำหนดสัญลักษณ์จากปัญหาเพื่อระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบและเงื่อนไขของปัญหาไม่เหมาะสม แต่สื่อความหมายได้อย่างชัดเจน หรือ เขียนแผนภาพ เน้นข้อความ หรือกำหนดสัญลักษณ์จากปัญหาเพื่อระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบและเงื่อนไขของปัญหาได้อย่างเหมาะสม แต่สื่อความหมายไม่ชัดเจน
0	- เขียนแผนภาพ เน้นข้อความ หรือกำหนดสัญลักษณ์จากปัญหาเพื่อระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบและเงื่อนไขของปัญหาไม่เหมาะสม และสื่อความหมายไม่ชัดเจน หรือ ไม่ระบุสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบและเงื่อนไขของปัญหา
Re2 การใช้ตัวแทนความคิดในการดำเนินการแก้ปัญหา	
2	- นำสัญลักษณ์ แผนภาพ รูปภาพ กราฟ หรือข้อความมาแสดงการดำเนินการการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม และสื่อความหมายได้อย่างชัดเจน
1	- นำสัญลักษณ์ แผนภาพ รูปภาพ กราฟ หรือข้อความมาแสดงการดำเนินการการแก้ปัญหาไม่เหมาะสม แต่สื่อความหมายได้อย่างชัดเจน หรือ นำสัญลักษณ์ แผนภาพ รูปภาพ กราฟ หรือข้อความมาแสดงการดำเนินการการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม แต่สื่อความหมายไม่ชัดเจน
0	- นำสัญลักษณ์ แผนภาพ รูปภาพ กราฟ หรือข้อความมาแสดงการดำเนินการการแก้ปัญหาไม่เหมาะสม และสื่อความหมายไม่ชัดเจน หรือ ไม่แสดงการแก้ปัญหา
Re3 การใช้ตัวแทนความคิดเพื่อสรุปคำตอบของปัญหา	
2	- นำสัญลักษณ์ แผนภาพ รูปภาพ กราฟ หรือข้อความมาใช้สรุปคำตอบได้อย่างเหมาะสม และสื่อความหมายได้อย่างชัดเจน

คะแนน	เกณฑ์การพิจารณา
1	- นำสัญลักษณ์ แผนภาพ รูปภาพ กราฟ หรือข้อความมาใช้สรุปคำตอบไม่เหมาะสม แต่สื่อความหมายได้อย่างชัดเจน หรือ นำสัญลักษณ์ แผนภาพ รูปภาพ กราฟ หรือข้อความมาใช้ได้อย่างเหมาะสม แต่สื่อความหมายไม่ชัดเจน
0	- นำสัญลักษณ์ แผนภาพ รูปภาพ กราฟ หรือข้อความมาใช้สรุปคำตอบไม่เหมาะสม และสื่อความหมายไม่ชัดเจน หรือ ไม่สรุปคำตอบ

แบบประเมินด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

ที่	รายการประเมิน						คะแนนรวม	ระดับคุณภาพ
	การมีส่วนร่วมในการเรียน (2 คะแนน)			การตรงต่อเวลาในการส่งงาน (2 คะแนน)				
	2	1	0	2	1	0		
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								
17								
สรุป								

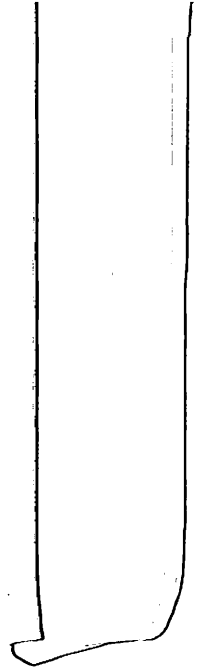
ลงชื่อผู้ประเมิน.....วันที่.....

เกณฑ์การแปลผล

ระดับดีมาก	หมายถึง	ได้คะแนน 3 – 4
ระดับดี	หมายถึง	ได้คะแนน 2
ระดับพอใช้	หมายถึง	ได้คะแนนต่ำกว่า 1

เกณฑ์การประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์

ประเด็นการประเมิน	ระดับคะแนน	ความสามารถที่แสดงออก
ใฝ่เรียนรู้	4	เข้าเรียนตรงตามเวลา ตั้งใจเรียน เอาใจใส่ และมีความเพียรพยายามในการเรียนรู้ มีส่วนร่วมในการเรียนรู้และเข้าร่วมกิจกรรมการเรียนรู้ต่าง ๆ ทั้งภายในและภายนอกโรงเรียนเป็นประจำและเป็นแบบอย่างที่ดี
	3	เข้าเรียนตรงตามเวลา ตั้งใจเรียน เอาใจใส่ และมีความเพียรพยายามในการเรียนรู้ มีส่วนร่วมในการเรียนรู้และเข้าร่วมกิจกรรมการเรียนรู้ต่าง ๆ ทั้งภายในและภายนอกโรงเรียนบ่อยครั้ง
	2	เข้าเรียนตรงตามเวลา ตั้งใจเรียน เอาใจใส่ และมีความเพียรพยายามในการเรียนรู้ มีส่วนร่วมในการเรียนรู้และเข้าร่วมกิจกรรมการเรียนรู้บางครั้ง
	1	ไม่ตั้งใจเรียน
มุ่งมั่นในการทำงาน	4	ทำงานด้วยความขยันอดทนและพยายามให้งานสำเร็จตามเป้าหมายก่อนเวลาที่กำหนด ไม่ย่อท้อต่อปัญหา ในการทำงาน และชื่นชมผลงานด้วยความภาคภูมิใจ
	3	ทำงานด้วยความขยันอดทนและพยายามให้งานสำเร็จตามเป้าหมายก่อนเวลาที่กำหนด ไม่ย่อท้อต่อปัญหา ในการทำงาน และชื่นชมผลงานด้วยความภาคภูมิใจ
	2	ทำงานด้วยความขยันอดทนและพยายามให้งานสำเร็จตามเป้าหมาย ไม่ย่อท้อต่อปัญหา ในการทำงาน และชื่นชมผลงานด้วยความภาคภูมิใจ
	1	ไม่ขยัน อดทน ในการทำงาน



เกณฑ์การประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์

ประเด็นการประเมิน	ระดับคะแนน	ความสามารถที่แสดงออก
ใฝ่เรียนรู้	4	เข้าเรียนตรงตามเวลา ตั้งใจเรียน เอาใจใส่ และมีความเพียรพยายามในการเรียนรู้ มีส่วนร่วมในการเรียนรู้และเข้าร่วมกิจกรรมการเรียนรู้ต่าง ๆ ทั้งภายในและภายนอกโรงเรียนเป็นประจำและเป็นแบบอย่างที่ดี
	3	เข้าเรียนตรงตามเวลา ตั้งใจเรียน เอาใจใส่ และมีความเพียรพยายามในการเรียนรู้ มีส่วนร่วมในการเรียนรู้และเข้าร่วมกิจกรรมการเรียนรู้ต่าง ๆ ทั้งภายในและภายนอกโรงเรียนบ่อยครั้ง
	2	เข้าเรียนตรงตามเวลา ตั้งใจเรียน เอาใจใส่ และมีความเพียรพยายามในการเรียนรู้ มีส่วนร่วมในการเรียนรู้และเข้าร่วมกิจกรรมการเรียนรู้บางครั้ง
	1	ไม่ตั้งใจเรียน
มุ่งมั่นในการทำงาน	4	ทำงานด้วยความขยันอดทนและพยายามให้งานสำเร็จตามเป้าหมายก่อนเวลาที่กำหนด ไม่ย่อท้อต่อปัญหา ในการทำงาน และชื่นชมผลงานด้วยความภาคภูมิใจ
	3	ทำงานด้วยความขยันอดทนและพยายามให้งานสำเร็จตามเป้าหมายก่อนเวลาที่กำหนด ไม่ย่อท้อต่อปัญหา ในการทำงาน และชื่นชมผลงานด้วยความภาคภูมิใจ
	2	ทำงานด้วยความขยันอดทนและพยายามให้งานสำเร็จตามเป้าหมาย ไม่ย่อท้อต่อปัญหา ในการทำงาน และชื่นชมผลงานด้วยความภาคภูมิใจ
	1	ไม่ขยัน อดทน ในการทำงาน

ขั้นการปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์การเรียนรู้และการทำงานทางคณิตศาสตร์ (Anticipating)

ผู้วิจัยออกแบบหรือคัดเลือกงานทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ ที่ใช้ความรู้ความเข้าใจและทักษะทางคณิตศาสตร์ในการทำงาน สามารถคาดการณ์พฤติกรรมการเรียนรู้และการตอบสนองของนักเรียนต่องานทางคณิตศาสตร์นั้น สามารถคาดการณ์วิธีคิดและข้อผิดพลาดของนักเรียนที่เกิดจากการทำงานทางคณิตศาสตร์ รวมถึงเตรียมคำถามที่จะกระตุ้นให้นักเรียนได้คิด อธิบายเหตุผล และเชื่อมโยงความคิดที่หลากหลาย ได้หรือไม่

❑ ได้ ❑ ไม่ได้ ❑ ไม่แน่ใจ

จุดเด่นของขั้นนี้ คือ

.....

.....

.....

ปัญหาและอุปสรรค์ คือ

.....

.....

.....

แนวทางในการแก้ไขปรับปรุง

.....

.....

.....

ในขั้นนี้ผู้วิจัยได้ส่งเสริมให้นักเรียน พัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ได้หรือไม่

องค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์	ข้อเสนอแนะเพิ่มเติม
พัฒนาองค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในด้านการแก้ปัญหา ได้ หรือไม่ ❑ ได้ ❑ ไม่ได้ ❑ ไม่แน่ใจ	....

พัฒนาองค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในด้านการให้เหตุผล ได้ หรือไม่ ❑ ได้ ❑ ไม่ได้ ❑ ไม่แน่ใจ	....
พัฒนาองค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในด้านการนำเสนอตัวแทนความคิด ได้ หรือไม่ ❑ ได้ ❑ ไม่ได้ ❑ ไม่แน่ใจ	....

ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ (Launching)

ผู้วิจัยนำเสนองานทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับวงกลม วงรี และพาราโบลา ด้วยวิธีการที่น่าสนใจและท้าทายให้นักเรียนมีส่วนร่วมกับกิจกรรม และกระตุ้นให้นักเรียนทำความเข้าใจเงื่อนไขสำคัญต่าง ๆ และปัญหาของงานทางคณิตศาสตร์ นั้น ได้หรือไม่ อย่างไร

❑ ได้ ❑ ไม่ได้ ❑ ไม่แน่ใจ

จุดเด่นของขั้นนี้ คือ

.....

.....

.....

ปัญหาและอุปสรรค์ คือ

.....

.....

แนวทางในการแก้ไขปรับปรุง

.....

.....

.....

ในขั้นนี้ผู้วิจัยได้ส่งเสริมให้นักเรียน พัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ได้หรือไม่

องค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์	ข้อเสนอแนะเพิ่มเติม
พัฒนาองค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในด้านการแก้ปัญหา ได้ หรือไม่ ❑ ได้ ❑ ไม่ได้ ❑ ไม่แน่ใจ	....
พัฒนาองค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในด้านการให้เหตุผล ได้ หรือไม่ ❑ ได้ ❑ ไม่ได้ ❑ ไม่แน่ใจ	....
พัฒนาองค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในด้านการนำเสนอตัวแทนความคิด ได้ หรือไม่ ❑ ได้ ❑ ไม่ได้ ❑ ไม่แน่ใจ	....

ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน (Monitoring)

ผู้วิจัยสามารถสังเกต กำกับและติดตามแนวคิดหรือวิธีการรวมถึงพฤติกรรมการเรียนรู้ต่าง ๆ ขณะที่นักเรียนลงมือทำงานทางคณิตศาสตร์ โดยเน้นใน 3 เรื่อง ได้แก่ (1) ความถูกต้องของความรู้เดิมทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ หากพบว่าไม่ถูกต้องครูดำเนินการแก้ไข (2) แนวคิดหรือวิธีการที่นำมาใช้เหมาะสมหรือไม่ และ (3) พฤติกรรมการเรียนรู้ที่นักเรียนแสดงออกต่องานทางคณิตศาสตร์ ได้หรือไม่ อย่างไร

❑ ได้ ❑ ไม่ได้ ❑ ไม่แน่ใจ

จุดเด่นของขั้นนี้ คือ

.....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาและอุปสรรค์ คือ

.....

.....

.....

แนวทางในการแก้ไขปรับปรุง

.....

.....

.....

ในขั้นนี้ผู้วิจัยได้ส่งเสริมให้นักเรียน พัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ได้หรือไม่

องค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์	**ข้อเสนอแนะเพิ่มเติม**
พัฒนาองค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในด้านการแก้ปัญหา ได้ หรือไม่ ❑ ได้ ❑ ไม่ได้ ❑ ไม่แน่ใจ	....
พัฒนาองค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในด้านการให้เหตุผล ได้ หรือไม่ ❑ ได้ ❑ ไม่ได้ ❑ ไม่แน่ใจ	....
พัฒนาองค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในด้านการนำเสนอตัวแทนความคิด ได้ หรือไม่ ❑ ได้ ❑ ไม่ได้ ❑ ไม่แน่ใจ	....

ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน (Selecting and Sequencing)

ผู้วิจัยคัดเลือกแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียนจากข้อมูลที่ได้บันทึกในขั้นการปฏิบัติที่ 3 เพื่อกำหนดเป็นประเด็นการอภิปรายโดยเลือกให้ครอบคลุมทั้งแนวคิดหรือวิธีการทั้งที่ถูกต้องและมี

ข้อผิดพลาด รวมถึงแนวคิดหรือวิธีการที่หลากหลาย และจัดลำดับการอภิปรายแนวคิดหรือวิธีการที่คัดเลือกดังกล่าวได้อย่างเหมาะสมเหมาะสม

❑ ได้ ❑ ไม่ได้ ❑ ไม่แน่ใจ

จุดเด่นของขั้นนี้ คือ

.....

.....

.....

ปัญหาและอุปสรรค์ คือ

.....

.....

.....

แนวทางในการแก้ไขปรับปรุง

.....

.....

.....

ในขั้นนี้ผู้วิจัยได้ส่งเสริมให้นักเรียน พัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ได้หรือไม่

องค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์	ข้อเสนอแนะเพิ่มเติม
พัฒนาองค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในด้านการแก้ปัญหา ได้ หรือไม่ ❑ ได้ ❑ ไม่ได้ ❑ ไม่แน่ใจ	....
พัฒนาองค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในด้านการให้เหตุผล ได้ หรือไม่ ❑ ได้ ❑ ไม่ได้ ❑ ไม่แน่ใจ	....
พัฒนาองค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในด้านการนำเสนอตัวแทนความคิด ได้ หรือไม่ ❑ ได้ ❑ ไม่ได้ ❑ ไม่แน่ใจ	....

ขั้นการปฏิบัติที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่ (Connecting)

นักเรียนนำเสนอและอธิบายแนวคิดหรือวิธีการของตนเองและได้อภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียนเพื่อแลกเปลี่ยนความรู้ แนวคิดหรือวิธีการ และเหตุผลเพื่อหาข้อสรุปในแต่ละประเด็น

ผู้วิจัยให้นักเรียนพิจารณาเปรียบเทียบแนวคิดหรือวิธีการจากข้อสรุปต่าง ๆ สามารถเชื่อมโยงไปสู่การสรุปเป็นความรู้ใหม่ รวมถึงเปิดโอกาสให้นักเรียนได้นำความรู้ ไปใช้แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาที่หลากหลายต่อไป

ผู้วิจัยคัดเลือกแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียนจากข้อมูลที่ได้บันทึกในขั้นการปฏิบัติที่ 3 เพื่อกำหนดเป็นประเด็นการอภิปรายโดยเลือกให้ครอบคลุมทั้งแนวคิดหรือวิธีการทั้งที่ถูกต้องและมีข้อผิดพลาด รวมถึงแนวคิดหรือวิธีการที่หลากหลาย และจัดลำดับการอภิปรายแนวคิดหรือวิธีการที่คัดเลือกดังกล่าวได้อย่างเหมาะสมเหมาะสม

❑ ได้ ❑ ไม่ได้ ❑ ไม่แน่ใจ

จุดเด่นของขั้นนี้ คือ

.....

.....

.....

.....

ปัญหาและอุปสรรค์ คือ

.....

.....

.....

.....

แนวทางในการแก้ไขปรับปรุง

.....

.....

.....

.....

ในขั้นนี้ผู้วิจัยได้ส่งเสริมให้นักเรียน พัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ได้หรือไม่

องค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์	ข้อเสนอแนะเพิ่มเติม
พัฒนาองค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในด้านการแก้ปัญหา ได้ หรือไม่ ❑ ได้ ❑ ไม่ได้ ❑ ไม่แน่ใจ	....
พัฒนาองค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในด้านการให้เหตุผล ได้ หรือไม่ ❑ ได้ ❑ ไม่ได้ ❑ ไม่แน่ใจ	....
พัฒนาองค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในด้านการนำเสนอตัวแทนความคิด ได้ หรือไม่ ❑ ได้ ❑ ไม่ได้ ❑ ไม่แน่ใจ	....

ข้อเสนอแนะเพิ่มเติม

.....

.....

.....

.....

สิ่งที่ต้องพัฒนาและปรับปรุง

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ ผู้สังเกต

(.....)

วันที่ .....

ใบกิจกรรมที่ 1

เรื่อง วงกลม เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Thinking)

ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 (แผนการเรียนวิทยาศาสตร์)

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม2 (ค31202)

กิจกรรมที่ 1

'นาฬิกาของเรขา'

สถานการณ์ "นาฬิกาของเรขา"

นาฬิกาแขวนผนังที่ใช้บอกเวลาส่วนใหญ่ จะมีเข็มนาฬิกา 3 เข็ม ประกอบด้วย เข็มสั้นบอกเวลาเป็นชั่วโมง เข็มยาวบอกเวลาเป็นนาที และเข็มยาวบอกเวลาเป็นวินาที

เช้าวันหนึ่งที่บ้านของนางสาวเรขา มีนาฬิกาแขวนผนังเสียใช้งานไม่ได้ เธอจึงนำนาฬิกาที่เสียให้ช่างแถวบ้านซ่อมแซม ปรากฏว่าช่างได้ถอดกลไกพร้อมเข็มนาฬิกาออกมาตรวจสอบและซ่อมแซมเรียบร้อยแล้ว แต่ไม่สามารถใส่กลไกพร้อมทั้งเข็มนาฬิกาในตำแหน่งตรงกลางหน้าปัดนาฬิกาได้ดังเดิม จึงเปลี่ยนตำแหน่งของกลไกหรือจุดหมุนของเข็มนาฬิกา ให้ห่างจากรูเดิมประมาณ 3 เซนติเมตร

เมื่อถึงเวลานัดรับนาฬิกาคืน

นางสาวเรขาจึงไม่พอใจ เธอจึงพูดว่า : "...นี่ช่างคะ ถ้าช่างทำแบบนี้ เข็มนาฬิกาของหนูจะไม่เดินเป็นวงกลมเหมือนเดิม น่ะสิคะ แบบนี้หนูจะใช้ดูเวลาได้อย่างไร ? "

ช่างซ่อมนาฬิกา : " ได้สิ ก็ในเมื่อกลไกและเฟืองของนาฬิกามันเป็นวงกลม ฉะนั้นเข็มนาฬิกาก็ต้องเดินเป็นวงกลมด้วยสิ ตัวเลขที่หน้าปัดก็ยังจัดเรียงเป็นวงกลมด้วย แค่เปลี่ยนตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของเข็มเอง ไม่น่าจะทำให้ดูเวลาไม่ได้ นะ ...."

นักเรียนเห็นด้วยกับ นางสาวเรขาหรือช่างซ่อมนาฬิกาและคิดว่านาฬิกาของนางสาวเรขายังใช้งานได้ตามปกติหรือไม่ เพราะเหตุใด

คำชี้แจง ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ลงในช่องว่าง

1. จากปัญหา ให้นักเรียนระบุเงื่อนไขของปัญหา และสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ (P1, Re1)

สิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ คือ.....

.....

.....

.....

2. นักเรียนจะนำความรู้ สูตร ทฤษฎีบทหรือหลักการใดทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้ปัญหา และเหตุใดจึงใช้ความรู้ดังกล่าว (R1, Re1)

ความรู้ที่ใช้ คือ.....

เพราะ (R2) .....

.....

3. ให้นักเรียนแสดงวิธีทำโดยละเอียด (P2, Re2)

4. จากสถานการณ์ "นาฬิกาของเรขา" และ การอภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียน ให้นักเรียนร่วมกันกำหนดนิยามของวงกลม และ อธิบายว่าเพราะเหตุใดจึงให้ความหมายเช่นนั้น (P3, R3, Re3)

ตอบ .....

.....

.....

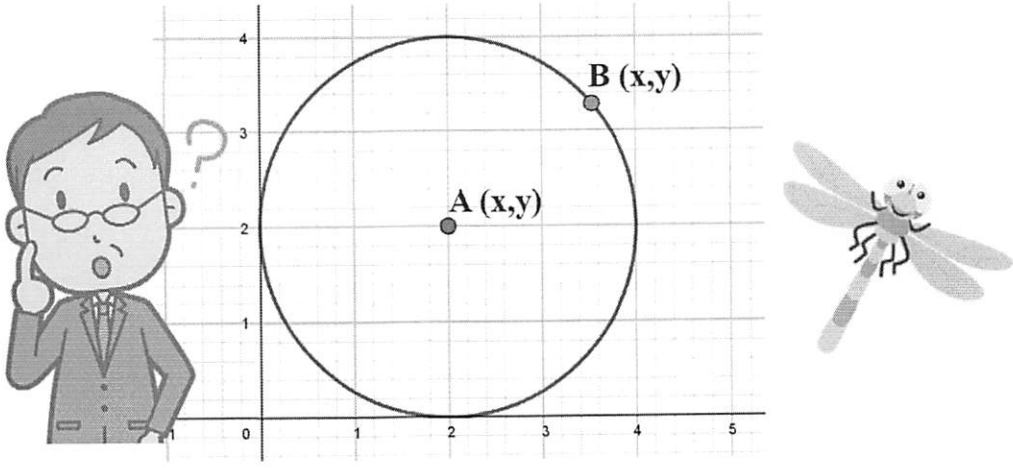
เพราะ .....

.....

.....

กิจกรรมที่ 2

: ห่างเท่าไหร่



" จากรูปที่นำเสนอข้างต้น
ระยะทางระหว่างจุด A และ จุด B เป็นเท่าไร "

แนวคิด

.....

.....

.....

.....

ปัญหา

วงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง C(h,k) และ รัศมียาว r หน่วย
จะสร้างสมการที่มีกราฟเป็นรูปวงกลมนี้ ได้อย่างไร

1. จากปัญหา ให้นักเรียนระบุเงื่อนไขของปัญหา และสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ (P1, Re1)

สิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ คือ.....

.....

เงื่อนไขของปัญหา คือ .....

.....

1. จากปัญหา ให้นักเรียนระบุเงื่อนไขของปัญหา และสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ (P1, Re1)

สิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ คือ.....

.....

เงื่อนไขของปัญหา คือ .....

.....

.....

2. นักเรียนจะนำความรู้ สูตร ทฤษฎีบทหรือหลักการใดทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้ปัญหา และเหตุใดจึงใช้ความรู้ดังกล่าว (R1, Re1)

ความรู้ที่ใช้ คือ.....

.....

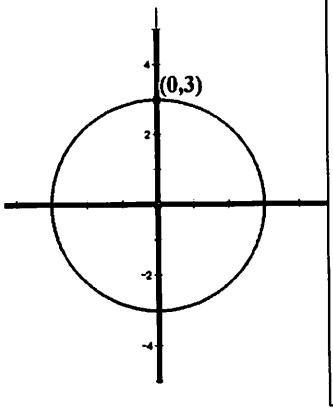
เพราะ (R2) .....

.....

3. ให้นักเรียนแสดงวิธีทำโดยละเอียด (P2, Re2)

วงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง C(h,k) และ รัศมียาว r หน่วยจะสร้างสมการที่มีกราฟเป็นรูปวงกลมนี้ ได้อย่างไร

4.



จากรูป วงกลมนี้มีสมการ ในรูปแบบมาตรฐานของกราฟ คือ $x^2 + y^2 = 3^2$ ใช่หรือไม่ (P3) เพราะเหตุใด (R3)

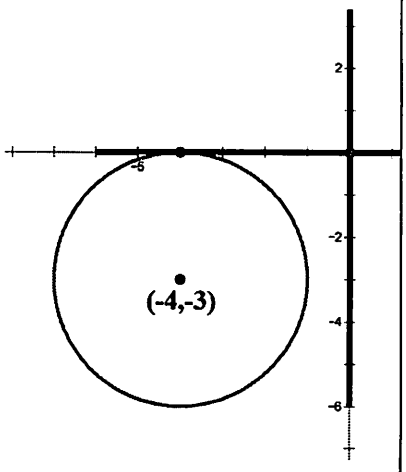
.....

.....

.....

.....

.....



จากรูป วงกลมนี้มีสมการ ในรูปแบบมาตรฐานของกราฟ คือ $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$ ใช่หรือไม่ (P3) เพราะเหตุใด (R3)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. จงบอกสมการของวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนวงกลม (P3, Re3)

5.1 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (- 1, 5) และ ผ่านจุด (-4, - 6)	พื้นที่เขียนกราฟ
5.2 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (7,3) และสัมผัสแกน x	พื้นที่เขียนกราฟ
5.3 วงกลมที่อยู่ในจตุภาคที่ 1 และสัมผัสแกน x และแกน y รัศมียาว 5 หน่วย	พื้นที่เขียนกราฟ

กิจกรรมที่ 3

• จากรูปแบบมาตรฐาน
• สู่รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม

"จากรูปแบบมาตรฐานของวงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ถ้ากระจายกำลังสองสมบูรณ์ และจะได้ผลเป็นอย่างไร" จงแสดงแนวคิด

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ประเด็นการอภิปรายทั้งชั้นเรียน

รูปแบบมาตรฐานของวงกลม กับ รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม มีความแตกต่างกันอย่างไร

1. จากปัญหา ให้นักเรียนระบุเงื่อนไขของปัญหา และสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ (P1, Re1)

สิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ คือ.....

.....

เงื่อนไขของปัญหา คือ .....

.....

.....

2. นักเรียนจะนำความรู้ สูตร ทฤษฎีบทหรือหลักการใดทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้ปัญหา และเหตุใดจึงใช้ความรู้ดังกล่าว (R1, Re1)

ความรู้ที่ใช้ คือ.....

.....

.....

เพราะ (R2) .....

.....

.....

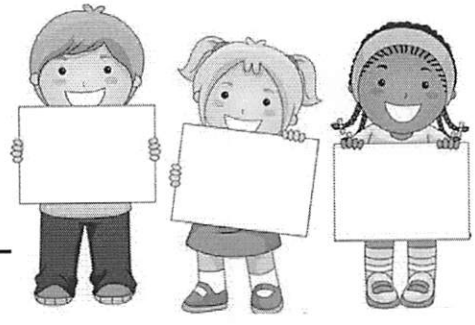
3. ให้นักเรียนแสดงวิธีทำโดยละเอียด (P2, Re2)

4. สมการ $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ มีกราฟเป็นวงกลมหรือไม่ เพราะเหตุใด (P3, R3, Re3)

ตอบ.....

.....

เพราะ

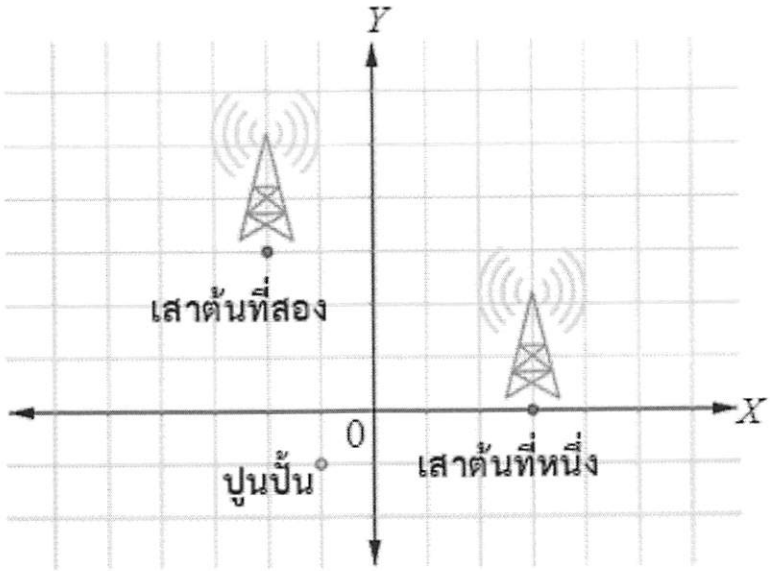


กิจกรรมที่ 4

ช่วยเหลือนักท่องเที่ยว

สถานการณ์ "ช่วยเหลือนักท่องเที่ยว"

โดยทั่วไปเสาสัญญาณโทรศัพท์จะปล่อยสัญญาณออกมาในลักษณะเป็นวงกลม ในหมู่บ้านแห่งหนึ่งมีเสาสัญญาณโทรศัพท์ตั้งอยู่ 2 ต้น ซึ่งแต่ละต้นจะปล่อยสัญญาณออกจากจุดศูนย์กลางได้ไกลที่สุด 7 กิโลเมตร ถ้าปูนปั้นซึ่งเป็นนักท่องเที่ยวขับรถไปในหมู่บ้านข้างเคียงแต่น้ำมันหมดระหว่างทางซึ่งเป็นตำแหน่งที่ไม่มีสัญญาณโทรศัพท์ ดังรูป



กำหนดให้ 1 หน่วย ในรูปแทนระยะทาง 2 กิโลเมตร จงหาว่า

1) ปูนปั้นจะต้องเดินทางไปทางทิศตะวันออกเป็นระยะทางอย่างน้อยกี่กิโลเมตร จึงจะมีสัญญาณโทรศัพท์

2) ระยะทางที่สั้นที่สุดที่ปูนปั้นจะเดินไปยังตำแหน่งที่มีสัญญาณโทรศัพท์ เป็นเท่าใด

จงอธิบายแนวคิด...

คำชี้แจง ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ลงในช่องว่าง

1. จากปัญหา ให้นักเรียนระบุเงื่อนไขของปัญหา และสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ (P1, Re1)

สิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ คือ.....

.....

เงื่อนไขของปัญหา คือ .....

.....

.....

2. นักเรียนจะนำความรู้ สูตร ทฤษฎีบทหรือหลักการใดทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้ปัญหา และเหตุใดจึงใช้ความรู้ดังกล่าว (R1, Re1)

ความรู้ที่ใช้ คือ.....

.....

เพราะ (R2) .....

.....

3. ให้นักเรียนแสดงวิธีทำโดยละเอียด (P2, Re2)

3.1 ปูนปั้นจะต้องเดินทางไปทางทิศตะวันออกเป็นระยะทางอย่างน้อยกี่กิโลเมตร จึงจะมีสัญญาณโทรศัพท์

3.2 ระยะทางที่สั้นที่สุดที่ปูนปั้นจะเดินไปยังตำแหน่งที่มีสัญญาณโทรศัพท์ เป็นเท่าใด

4. ให้นักเรียนสรุปคำตอบ พร้อมทั้งแสดงความสมเหตุสมผลของคำตอบ (P3, R3, Re3)

ตอบ.....

.....

.....

.....

เพราะ

5. ถ้าอยากทราบว่าปูนปั้น ควรเดินทางไปยังทิศใด จึงจะสัญญาณโทรศัพท์รวดเร็วที่สุด ควรพิจารณาว่า ระยะทางระหว่างจุดที่ปูนปั้นอยู่ ถึง จุดของเสาทั้งสองต้นว่าปูนปั้นอยู่ใกล้เสาต้นใดกว่ากัน นักเรียนเห็นด้วยหรือไม่ เพราะเหตุใด (R1,R2,R3)

ตอบ.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาท้าทาย

(ชั่วโมงที่ 5)

เรื่อง สถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับวงกลม

กิจกรรมการอภิปราย "ระบบสปริงเกอร์ของโรงเรียน"

สนามหญ้าที่สนามฟุตบอลโรงเรียนของเราได้รับน้ำไม่ทั่วถึง ทำให้หญ้าบางส่วนตาย ทำให้โรงเรียนจำเป็นต้องออกแบบและติดตั้งระบบสปริงเกอร์ใหม่

ซึ่งในสนามฟุตบอลใหญ่ ครูภิญโญได้ออกแบบติดตั้งสปริงเกอร์สำหรับสนามฟุตบอล สามารถเคลื่อนย้ายตำแหน่งได้ และในสวนหย่อมข้าง ๆ สนามฟุตบอล ได้ติดตั้งสปริงเกอร์แบบพ่นฝอย (Spray) ไม่สามารถเคลื่อนย้ายได้

วันหนึ่ง ได้มีนักเรียนกลุ่มหนึ่งที่กำลังศึกษาเกี่ยวกับเรื่องวงกลมในระบบพิกัดฉาก ได้ทดลองสังเกตและบันทึกลักษณะการพ่นน้ำของสปริงเกอร์ทั้งในสนามฟุตบอล และสวนหย่อมข้าง ๆ สนามฟุตบอล ได้วาดภาพและสมมุติพิกัดต่าง ๆ ขึ้นเอง จึงสรุปว่า สปริงเกอร์ในสนามฟุตบอลพ่นน้ำเป็นวงกลม อธิบายด้วยสมการ $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 81$ และ สปริงเกอร์แบบพ่นฝอย (Spray) ในสวนหย่อมข้าง ๆ สนามฟุตบอล อธิบายด้วยสมการ $x^2 + y^2 + 20x - 12y = -127$

นายสุทธินันและนางสาวสุพรรษา เป็นเด็กที่ขาดเรียนในวันนั้น จึงได้ขอผลการศึกษาจากเพื่อน ๆ มาโรงเรียนและได้ไปสังเกตสปริงเกอร์ จึงทำให้เกิดการโต้เถียงกัน ซึ่งนายสุทธินันกล่าวว่า **จากสมการทั้งสองนั้น ละอองน้ำของสปริงเกอร์ทั้งสองนั้นซ้อนทับกัน จึงควรย้ายตำแหน่งของสปริงเกอร์ในสนามฟุตบอล เพราะว่าเปลืองน้ำ** ส่วนนางสาวสุพรรษา กล่าวว่า **ไม่จริง เพราะ จากสมการนั้น ละอองน้ำไม่พุ่งมาชนกันอย่างแน่นอน**

ให้นักเรียนวิเคราะห์ สืบสอบ และ ร่วมกันอภิปรายว่า นายสุทธินัน หรือ นางสาวสุพรรษา ถูกต้อง พร้อมให้เหตุผลประกอบ

1. จากปัญหา ให้นักเรียนระบุเงื่อนไขของปัญหา และสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ (P1, Re1)

สิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ คือ.....

.....

.....

เงื่อนไขของปัญหา คือ .....

.....

.....

2. นักเรียนจะนำความรู้ สูตร ทฤษฎีบทหรือหลักการใดทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้ปัญหา และเหตุใดจึงใช้ความรู้ดังกล่าว (R1, Re1)

ความรู้ที่ใช้ คือ.....

.....

.....

เพราะ (R2) .....

.....

3. ให้นักเรียนแสดงวิธีทำโดยละเอียด (P2, Re2)

4. ให้นักเรียนสรุปคำตอบ พร้อมทั้งแสดงความสมเหตุสมผลของคำตอบ (P3, R3, Re3)

ตอบ.....

.....

เพราะ

กิจกรรมสืบเสาะทางคณิตศาสตร์ เรื่อง

ปริศนาอัศจรรย์ครอปเซอร์เคิล (Crop circle)

คืนหนึ่งในปี 1972 ณ ประเทศอังกฤษ อาเทอร์ ชัตเติลวูด (Arthur Shuttlewood) กับ บริซ บอนด์(Bryce Bond) ซุ่มซ่อนตัวบริเวณเนินเขาสตาร์ฮิล ใกล้เวสมินเตอร์ เพื่อเฝ้าดูปรากฏการณ์แสงประหลาด ซึ่งเกิดขึ้นในแถบนั้นมานานเกือบทศวรรษ เชื่อกันว่ามันคือยูเอฟโอ คืนนั้นทั้งสองผิดหวังเมื่อไม่พบแสงประหลาด แต่ได้รับการชดเชยด้วยร่องรอยบางอย่างที่อาจเกี่ยวข้องกัน นั่นคือพืชที่ล้มเป็นวงกลม ซึ่งต่อมาเรียกกันว่า Crop Circles

สี่ปีต่อมาในเดือนกันยายน 1976 เอดวิน เฟอร์(Edwin Fuhr) ชาวนาแห่งแลงเกนเบิร์ก (Langenburg) อ้างว่า เห็นยานรูปโดมสีเงินหลายลำ บินอยู่เหนือทุ่งนาหลังจากที่ยานเหล่านี้จากไปแล้ว เขาก็พบครอปเซอร์เคิลหลายแห่งในบริเวณนั้น นี่คือเรื่องราวแรกเริ่มของปรากฏการณ์วงกลมพืชบนท้องทุ่งของอังกฤษ ที่ผู้คนมากมายเชื่อว่าเป็นหนึ่งในปริศนาลึกลับของโลกอยู่ทุกวันนี้

ครอปเซอร์เคิล ถูกค้นพบครั้งแรกในปี 1678 ที่เฮิร์ทฟอร์ดเชียร์ อังกฤษ ไม่มีใครอธิบายได้ว่าใครหรืออะไรทำให้มันเกิดขึ้น แต่หลังจากการค้นพบของชัตเติลวูดกับบอนด์และเฟอร์แล้ว มันนำไปสู่ทฤษฎีแรกคือร่องรอยการลงจอดของยานจากต่างดาว ตามมาด้วยทฤษฎีอุกกาบาตและทฤษฎีพายุทอร์นาโดขนาดเล็ก ในทศวรรษที่ 1980 ได้มีการค้นพบครอปเซอร์เคิลมากขึ้นโดยเฉพาะรอบ ๆ เมืองวอร์มินสเตอร์(Warminster) ในช่วงต้นของทศวรรษนี้รูปทรงของมันก็ยังคงเหมือนเดิม คือเป็นวงกลมหยาบๆ แต่ในกลางทศวรรษรูปทรงของมันซับซ้อนขึ้น คือมีวงแหวนแตกออกไป และมันเริ่มดึงดูดใจคนอังกฤษมากขึ้น ในทศวรรษนี้เอง ด๊อกเตอร์ เทอร์เรนซ์ มีเดน (Terrence Meaden) ศาสตราจารย์ทางฟิสิกส์และนักอุตุนิยมวิทยาได้พยายามไขปริศนานี้ โดยทำการวิจัยครอปเซอร์เคิลมากกว่า 1,000 แห่ง มีเดนเสนอทฤษฎีว่า ครอปเซอร์เคิลเกิดจากความผิดปกติของอากาศที่เขาเรียกว่า Plasma Vortex ทำให้เกิดลมหมุนวนในระดับสูงแล้วเคลื่อนตัวลงสู่พื้นทำให้พืชแบนราบ

ทฤษฎีนี้ได้รับการสนับสนุนจากผลการทดลองของนักวิทยาศาสตร์ญี่ปุ่นคือ ศาสตราจารย โอซึกิ (Ohtsuki) เขาใส่พลาสมา (plasma Fireballs) ลงในถาดแป้ง ผลปรากฏว่ามันทำให้เกิดวงแหวนสองชั้นรอบศูนย์กลาง ปี 1991 ได้มีการค้นพบครอปเซอร์เคิลหลายร้อยแห่งในอังกฤษ มันยังแพร่ระบาดไปในเยอรมัน สหรัฐอเมริกา บราซิล โรมาเนีย ฮังการีและญี่ปุ่น ยิ่งไปกว่านั้นมันได้เปลี่ยนแปลงรูปทรงใหม่เป็น Pictrogram เสมือนการสื่อความหมายบางอย่างด้วยภาพ รูปแบบใหม่ของมันทำให้ทฤษฎีผู้มาจากต่างมิติที่พยายามสื่อสารกับมนุษย์เริ่มก่อตัวขึ้น ความซับซ้อนของรูปทรงครอปเซอร์เคิล ทำให้ทฤษฎีพลาสมาไม่สามารถอธิบายรูปทรงนี้ได้ ในขณะที่คำกล่าวอ้างเรื่องแสงไฟประหลาดเหนือท้องทุ่งยามดึก แล้วทำให้เกิดครอปเซอร์เคิลในรุ่งอรุณของทฤษฎียูเอฟโอ ก็ยังใช้เป็นหลักฐานไม่ได้ แต่มันก็ยังเป็นทฤษฎีที่ได้รับความสนใจมากที่สุด ในปีเดียวกันนี้เอง

ชายชาวอังกฤษสองคนได้ออกมาเปิดเผยกับหนังสือพิมพ์ว่า ครอปเซอร์เคิลเป็นเรื่องหลอกลวงมันเกิดจากฝีมือของมนุษย์ เดฟ คอร์ลีและโดฟ โบเวอร์ (Dave Chorley and Doug Bower) อ้างว่าพวกเขาเป็นผู้สร้างมันขึ้นมารวมแล้วกว่า 1,000 แห่ง ตั้งแต่ปี 1978 โดยใช้ไม้กระดานขนาด 4 ฟุต และเชือกเป็นเครื่องมือ ในขณะเดียวกันก็มีนักหลอกลวงกลุ่มอื่น ๆ ออกปฏิบัติการในยามค่ำคืนอย่างเดียวกับพวกเขาด้วย นิตยสารไทม์ฉบับวันที่ 23 กันยายน 1991 พูดถึงเรื่องนี้ว่า นี่คือการนำไปสู่จุดจบของเรื่องซึ่งเป็นหนึ่งในความลึกลับที่สุดของอังกฤษและของโลกแล้ว อย่างไรก็ตามปรากฏการณ์ครอปเซอร์เคิลก็ไม่ได้หายไปพร้อมกับการเผยตัวของนักหลอกลวงคู่นี้ แต่กลับพุ่งสูงขึ้นในปีต่อมาคือปี 1992 มันเป็นคลื่นลูกใหม่ที่มาพร้อมกับความสลับซับซ้อนของรูปทรงเรขาคณิต และขนาดอันมหึมาหลายร้อยฟุตในทุ่งบาร์เลย์ และ ทุ่งข้าวโพด พร้อม ๆ กับการแพร่ระบาดไปกว่า 10 ประเทศ และยังทำให้ตัวเลขนักวิจัยเพิ่มสูงขึ้น อีกด้านหนึ่งมันคือศิลปะอันวิจิตรพิสดารบนท้องทุ่ง ซึ่งผลิตช่างภาพมืออาชีพมากมาย และเป็นจุดเริ่มต้นของธุรกิจสิ่งพิมพ์เกี่ยวกับครอปเซอร์เคิลที่เฟื่องฟูอยู่ทุกวันนี้

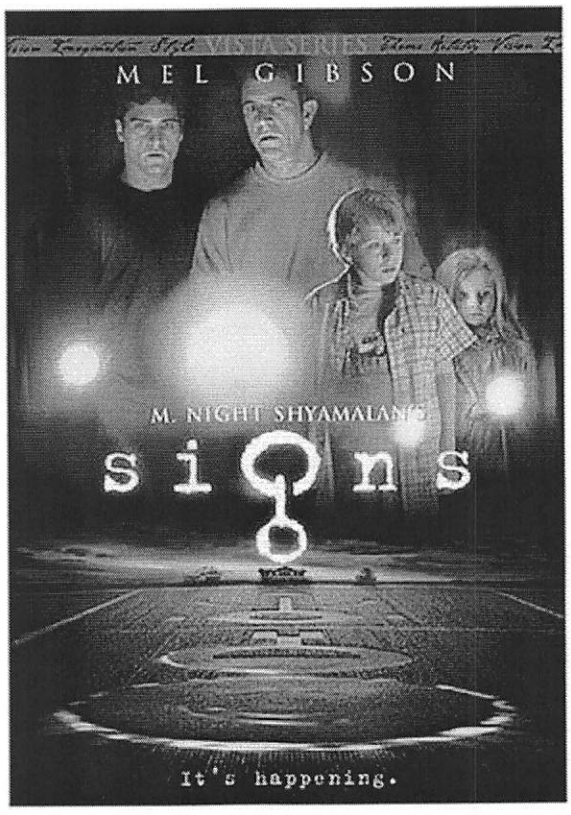
จนถึงปัจจุบัน มีครอปเซอร์เคิลเกิดขึ้นในช่วงฤดูร้อนที่อังกฤษรวมแล้วประมาณ 10,000 แห่ง ส่วนใหญ่เกิดทางภาคใต้ และ 90 เปอร์เซนต์อยู่ในรัศมี 50 ไมล์จากสโตนเฮน(Stonehenge) ครอปเซอร์เคิลบางแห่ง สื่อความหมายเกี่ยวกับจักรวาล แกแล็คซี่ บางแห่งสื่อความหมายเกี่ยวกับหายนะของโลกจากอาวุธนิวเคลียร์ และบางแห่งสื่อความหมายเกี่ยวกับผลร้ายของการทำลายสภาพแวดล้อม ในวันที่ 17 สิงหาคม 2001 นักวิจัยครอปเซอร์เคิลต้องตะลึงกับครอปเซอร์เคิลรูปแบบใหม่สองแห่งในทุ่งข้าวโพดใกล้กล้องโทรทรรศน์วิทยุ Chilbolton ที่ Hampshire อังกฤษ มันเป็นภาพกราฟิกของสัญญาณวิทยุที่ส่งจากโลกไปยังกลุ่มดาว M13 อีกแห่งหนึ่งเป็นภาพหน้าคนที่คล้ายภูเขาหน้าคนบนดาวอังคาร ยิ่งไปกว่านั้นเมื่อครบรอบปี ได้เกิดครอปเซอร์เคิลแบบนี้ขึ้นอีก มันคือครอปเซอร์เคิลที่แสดงภาพของ E.T. ห่างจากที่ตั้งกล้องโทรทรรศน์ Chilbolton ราว 9 ไมล์ในวันที่ 15 สิงหาคม 2002 สำหรับนักวิจัยแล้ว ความพยายามของพวกเขาไม่ไร้ผล นักวิจัยได้พบเบาะแสบางอย่างที่อาจคลี่คลายปริศนานี้ได้ นั่นคือการพบความผิดปกติในลำต้นของพืชในครอปเซอร์เคิล ที่พวกเขาอ้างว่าสามารถแยกแยะความแตกต่างระหว่างของจริงกับที่มนุษย์สร้างขึ้นได้ ครอปเซอร์เคิลของจริงนั้นลำต้นของพืชที่ล้มซึ่งอยู่เหนือพื้นดินประมาณ 1 นิ้ว มีลักษณะโค้งงอไม่แตกหัก นอกจากนั้นโครงสร้างของเซลล์(cell Pit) ยังเปลี่ยนแปลง คือเซลล์ขยายตัวเหมือนได้รับความร้อน ด๊อกเตอร์ วิลเลียม เลเวนกูด (William C. Levengood) เชื่อว่าไม่ว่าอะไรก็ตามที่ทำให้เกิดครอปเซอร์เคิล มันต้องใช้พลังงานที่เร็วและหนาแน่นจนทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงในเซลล์ นักวิจัยเชื่อว่าพลังงานที่ว่านั้นน่าจะเป็นไมโครเวฟ ทฤษฎีนี้เรียกว่า Microwave Transient Heating

นักวิจัยยังอ้างการศึกษาผลกระทบของพืชในครอปเซอร์เคิล เปรียบเทียบกับพืชที่อยู่ใกล้เคียงซึ่งพบว่า เมล็ดพืชในครอปเซอร์เคิลมีอัตราการเจริญเติบโตเร็วกว่าเมล็ดพืชบริเวณใกล้เคียงถึง 45 เปอร์เซ็นต์

คอลลิน แอนดริวส์ (Colin Andrews) ภาพจาก BBC มีอีกทฤษฎีหนึ่งที่น่าสนใจไม่แพ้กัน เป็นของ ด๊อกเตอร์ คอลลิน แอนดริวส์ (Colin Andrews) นักวิทยาศาสตร์อังกฤษซึ่งศึกษาครอปเซอร์เคิลมาเป็นเวลา 17 ปี ในปี 2000 แอนดริวเปิดเผยผลวิจัยซึ่งได้รับทุนสนับสนุนจากมูลนิธิร็อกกี้เฟลเลอร์ว่า ราวๆ ร้อยละ 80 ของครอปเซอร์เคิลเป็นฝีมือของมนุษย์ ครอปเซอร์เคิลเหล่านี้ จะมีรูปทรงซับซ้อนและวิจิตรพิสดารส่วนที่เหลือซึ่งมีรูปทรงง่ายๆนั้น เขาเชื่อว่ามันเกิดจากการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กในบริเวณนั้น ซึ่งทำให้เกิดกระแสไฟฟ้าและกระแสไฟนี้เองเป็นตัวการทำให้พืชล้มลง งานวิจัยที่พบว่าครอปเซอร์เคิลบางแห่งทำให้เครื่องใช้ไฟฟ้าเช่นไมโครโฟนหรือเครื่องบันทึกเสียงถูกรบกวนจนใช้การไม่ได้ รวมทั้งผู้ที่อยู่ในบริเวณนั้นจะรู้สึกปวดศีรษะหรือมีอาการคลื่นไส้ สนับสนุนทฤษฎีนี้ นักวิจัยบางคนเชื่อว่ามันเกิดจากพลังงานที่ตกค้าง

แต่ในปี 2000 ชายชาวอังกฤษกลุ่มหนึ่งได้ออกมาเปิดเผยตนเองว่าเป็นผู้สร้างครอปเซอร์เคิลที่วิจิตรพิสดารหลายสิบแห่งในภาคใต้ของอังกฤษมากว่า 11 ปี พวกเขาเรียกตนเองว่า *Circlemakers* โดยใช้คอมพิวเตอร์ร่างรูปแบบก่อน พวกเขาได้รับเชิญจากสื่อมวลชนให้สาธิตการสร้างครอปเซอร์เคิลที่มีความซับซ้อนหลายครั้ง ซึ่งพวกเขาทำได้จริง ๆ และก็ไม่ได้ใช้ไมโครเวฟ ปัจจุบันพวกเขามีเว็บไซต์ที่แสดงผลงานและเสนอข่าวสารเกี่ยวกับครอปเซอร์เคิล ทุกวันนี้นักวิทยาศาสตร์ส่วนใหญ่เชื่อว่ามีทฤษฎีเดียวเท่านั้นที่จะอธิบายครอปเซอร์เคิลได้ นั่นคือ ทฤษฎีมนุษย์เป็นผู้สร้างแต่อย่างไรก็ตาม นักวิจัยครอปเซอร์เคิล ก็ยังเชื่อเหมือนกับแอนดริวว่ามันไม่ทั้งหมดที่เกิดจากฝีมือมนุษย์ งานวิจัยทางวิทยาศาสตร์ของนักวิจัยหลายกลุ่มจึงยังดำเนินอยู่ต่อไป Circlemaker คนหนึ่งพูดถึงเรื่องนี้ว่า ไม่มีใครอยากเชื่อคำอธิบายทางวิทยาศาสตร์หรอก เพราะผู้คนต้องการเชื่อสิ่งที่เป็นความลึกลับมากกว่า "สาธารณชนไม่ต้องการคำอธิบาย" เขากล่าว

ปริศนาบางส่วนของครอปเซอร์เคิลกำลังถูกถ่ายทอดในภาพยนตร์เรื่อง Sign ซึ่งคอลลิน แอนดริวส์ เป็นหนึ่งในที่ปรึกษาของผู้สร้าง มันเป็นความลึกลับบนท้องทุ่งหรือไม่ นักเรียนสามารถติดตามชมจากภาพยนตร์เรื่องนี้กันได้



คำชี้แจง

ให้นักเรียนจำลองรูปแบบของ Crop Circle ให้สวยงาม โดยใช้เครื่องมือหรือวิธีการตามความถนัด เช่น ใช้คอมพิวเตอร์กราฟฟิก, การวาดภาพ เป็นต้น พร้อมทั้งอธิบายวิธีการสร้างด้วยสมการของวงกลม

เกณฑ์การให้คะแนน

ข้อที่	เกณฑ์การให้คะแนน	คะแนนเต็ม	หมายเหตุ
1	ความสวยงาม	5	
2	ความคิดสร้างสรรค์	10	
3	การบูรณาการความรู้ต่าง ๆ มาใช้	5	
4	การอธิบายวิธีการสร้างด้วยสมการวงกลม	10	
	รวมคะแนน	30	

ใบกิจกรรมที่ 2

เรื่อง วงรี เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Thinking)

ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 (แผน การเรียนวิทยาศาสตร์)

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม2 (ค31202)

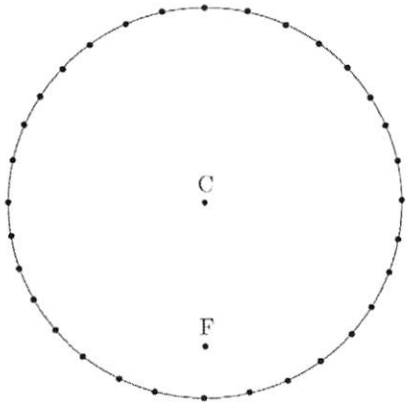
กิจกรรมที่ 1

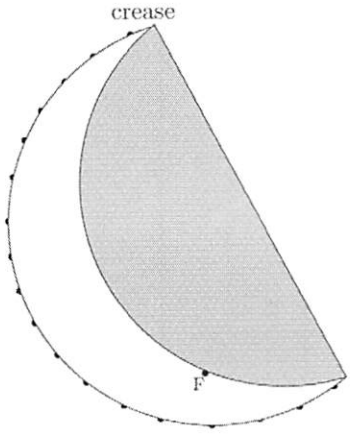
พับเพื่อรู้จักวงรี

วัสดุ/อุปกรณ์

กระดาษรูปวงกลม, ดินสอ หรือปากกา ไม้บรรทัด

1. ให้ C เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ F เป็นจุดที่อยู่บริเวณภายในวงกลม พับกระดาษจากจุดที่อยู่บนขอบของเส้นรอบวงไปทับกับจุด F ดังรูป





2. ทำซ้ำกับทุก ๆ จุด ที่อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม

คำชี้แจง ให้นักเรียนร่วมกันคิดวิเคราะห์และอภิปรายภายในกลุ่ม แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ลงในช่องว่าง

1. **รอยพับที่รวมกันเป็นรูปวงรี เกิดขึ้นได้อย่างไร** (P1, P2, R2)

.....

.....

.....

.....

.....

2. จุด C และจุด F มีความสำคัญอย่างไร (R1)

.....

.....

.....

3. จะเรียกจุด C และจุด F ว่าอย่างไร

.....

.....

จากกิจกรรม "พับเพื่อรู้จักวงรี" และ การอภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียน ให้นักเรียนร่วมกันกำหนดนิยามของวงรี อธิบายว่าเพราะเหตุใดจึงให้ความหมายเช่นนั้น และ วาดภาพประกอบ

4. วาดภาพวงรี และ บอกส่วนประกอบที่สำคัญ (Re1, Re2, Re3)

5. จากวิธีการที่ทำมาทั้งหมด ได้ข้อสรุป "นิยามของวงรี" ว่าอย่างไร (P3)

.....

.....

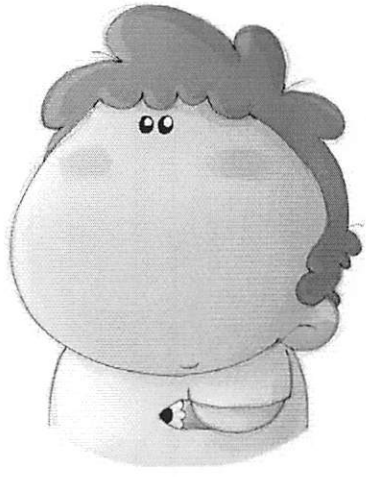
.....

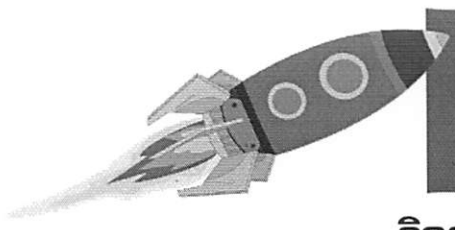
.....

.....

.....

6. นิยามที่ได้เป็นจริงเสมอไปหรือไม่ เพราะเหตุใด (R3)





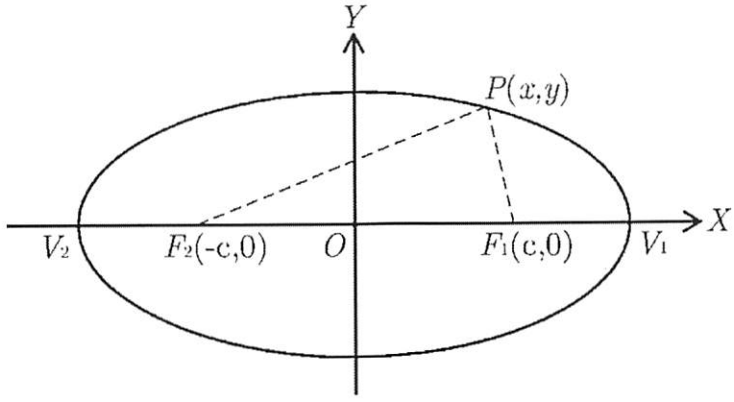
กิจกรรมที่ 2

:สมการวงรี

กิจกรรม "เรามาหา สมการวงรีกันดีกว่า"

เราจะสร้างรูปแบบมาตรฐานของวงรี ได้อย่างไร เมื่อให้ระยะทางจากจุดศูนย์กลาง O(0,0) ถึง V_1 และ จากจุดศูนย์กลาง O(0,0) ถึง V_2 มีระยะทางเท่ากันคือ a หน่วย

และ โฟกัสมีพิกัดเป็น F1(-c,0) และ F2(c,0) ดังรูป



1. จากปัญหา ให้นักเรียนระบุเงื่อนไขของปัญหา และสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ (P1, R1)

ปัญหานี้ต้องการให้หาอะไร .....

.....

เงื่อนไขของปัญหา คือ .....

.....

.....

.....

2. จะแก้ปัญหานี้ได้อย่างไร ต้องใช้ความรู้เรื่องใด มาช่วยบ้าง (R1, Re1)

.....

.....

.....

ทำไมจึงใช้วิธีคิดนี้ เพราะว่า...? (R1) .....

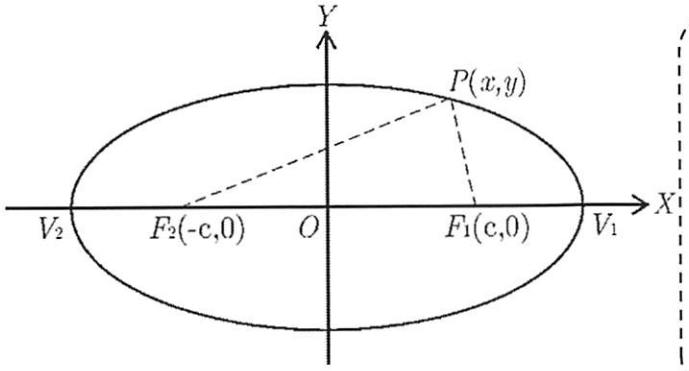
.....

.....

.....

.....

.....



จากรูป และ เงื่อนไขของปัญหา
เราทราบอะไรบ้าง ?

3. จากรูป " เมื่อให้ระยะทางจากจุดศูนย์กลาง O ถึง V_1 และ จากจุดศูนย์กลาง O ถึง V_2 มีระยะทางเท่ากัน คือ a หน่วย จงอธิบายว่าเพราะเหตุใด **<u>แกนเอกจึงมีความยาวเป็น 2a หน่วย</u>** " (R1, Re1)

4. ให้นักเรียนแสดงวิธีทำโดยละเอียด เพื่อสร้างรูปแบบมาตรฐานของวงรี จากรูปที่กำหนดให้ (P2, Re2)

...5. จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี ที่ได้ เราจะทราบระยะตัดแกน x และ ระยะตัดแกน y ได้อย่างไร

6. จากวิธีการที่ทำมาทั้งหมด ได้ข้อสรุปในการสร้างสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีนี้อย่างไร ให้นักเรียนสรุปคำตอบ (P3, Re3)

ตอบ เมื่อให้ระยะทางจากจุดศูนย์กลาง O(0,0) ถึง V_1 และ จากจุดศูนย์กลาง O (0,0) ถึง V_2 มีระยะทางเท่ากัน คือ a หน่วย และ โฟกัสมีพิกัดเป็น F1(-c,0) และ F2(c,0) ดังรูป

จะได้ สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีคือ .....

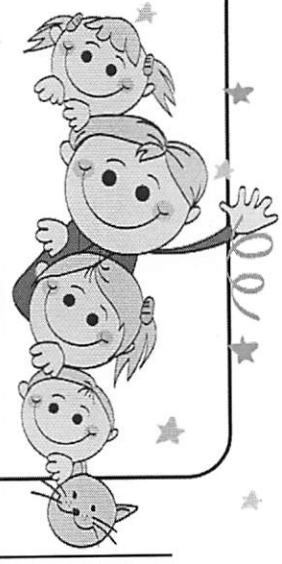
.....

จะมีจุดยอดอยู่ที่.....

มีแกนเอกอยู่บนแกน..... ยาว.....หน่วย

มีแกนโทอยู่บนแกน..... ยาว.....หน่วย

7. ข้อสรุปที่ได้เป็นจริงเสมอไปหรือไม่ เพราะเหตุใด (R3)



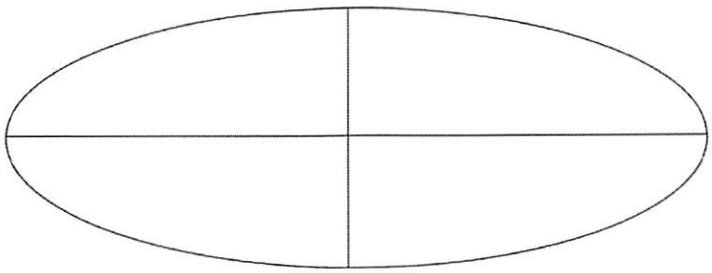
ปัญหาท้าทาย

วงรีวงหนึ่งมีสมการ เป็น $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ จงหาความยาวแกนเอกและแกนโท
จงหาจุดโฟกัส และจุดยอด พร้อมทั้งเขียนวงรี

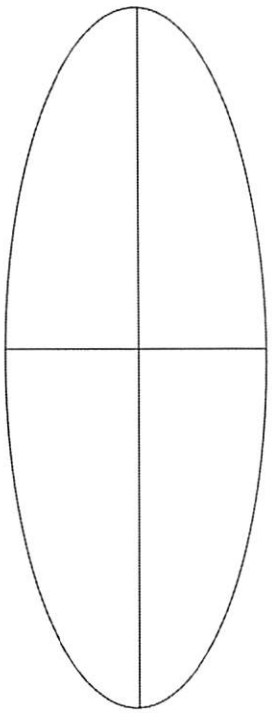
กิจกรรมที่ 3

วงรี ที่เปลี่ยนรูปร่าง

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมและบอกส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีในรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี (Re1,Re2)



สมการรูปแบบมาตรฐาน



สมการรูปแบบมาตรฐาน
เป็นอย่างไรน้อออ...?

ประเด็นการอภิปราย

ให้นักเรียนตั้งสมมุติฐานว่า
สมการทั่วไปของวงรี ที่มีจุดศูนย์กลางที่ (0,0) เมื่อแกนเอกอยู่บนแกน y
เป็นอย่างไร พร้อมทั้งพิสูจน์ว่าตรงตามสมมติฐานที่ตั้งไว้หรือไม่

1. จากปัญหา ให้นักเรียนระบุเงื่อนไขของปัญหา และสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ (P1, R1)

สิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ คือ.....

.....

เงื่อนไขของปัญหา คือ .....

.....

.....

.....

2. นักเรียนจะนำความรู้ สูตร ทฤษฎีบทหรือหลักการใดทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้ปัญหา และเหตุใด
จึงใช้ความรู้ดังกล่าว (R1, Re1)

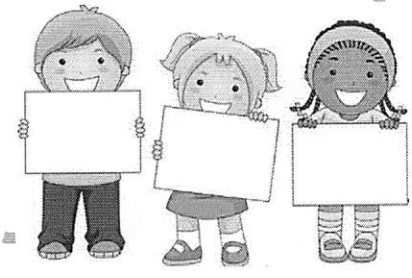
ความรู้ที่ใช้ คือ.....

.....

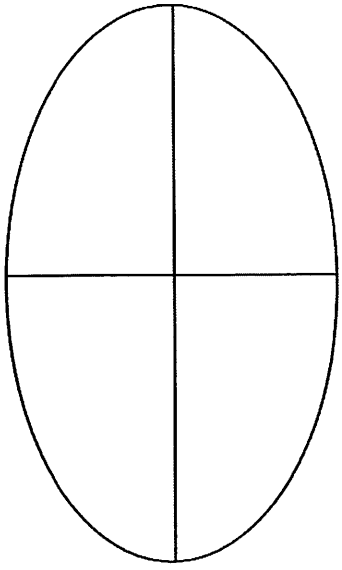
ทำไมจึงเลือกใช้นี้ (R2) .....

.....

สมมุติฐาน



3. ให้นักเรียนแสดงวิธีทำโดยละเอียด (P2, Re2)



ตอบ สมการทั่วไปของวงรี เมื่อแกนเอกอยู่บนแกน y คือ (Re3) .....

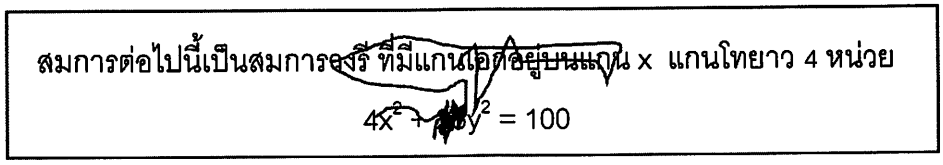
.....

ตรงกับสมมติฐานที่ตั้งไว้หรือไม่ (R3) ❑ ตรง ❑ ไม่ตรง

เพราะ .....

.....

4. สมมตินักเรียนอ่านหนังสือเตรียมสอบ แล้วพบว่าน้องชายได้ขีดเขียนหนังสือเรียนจนเลอะเทอะ ดังภาพ



จงระบุสัมประสิทธิ์ของ y^2 ที่มองไม่เห็นในสมการ

วิธีคิด (P2, Re2)

ตอบ (P3, Re3) .....

5. นักเรียนเห็นด้วย/มั่นใจในคำตอบข้างต้นหรือไม่ เพราะเหตุใด จงแสดงว่าคำตอบที่ได้นั้นถูกต้อง (R3, Re3)

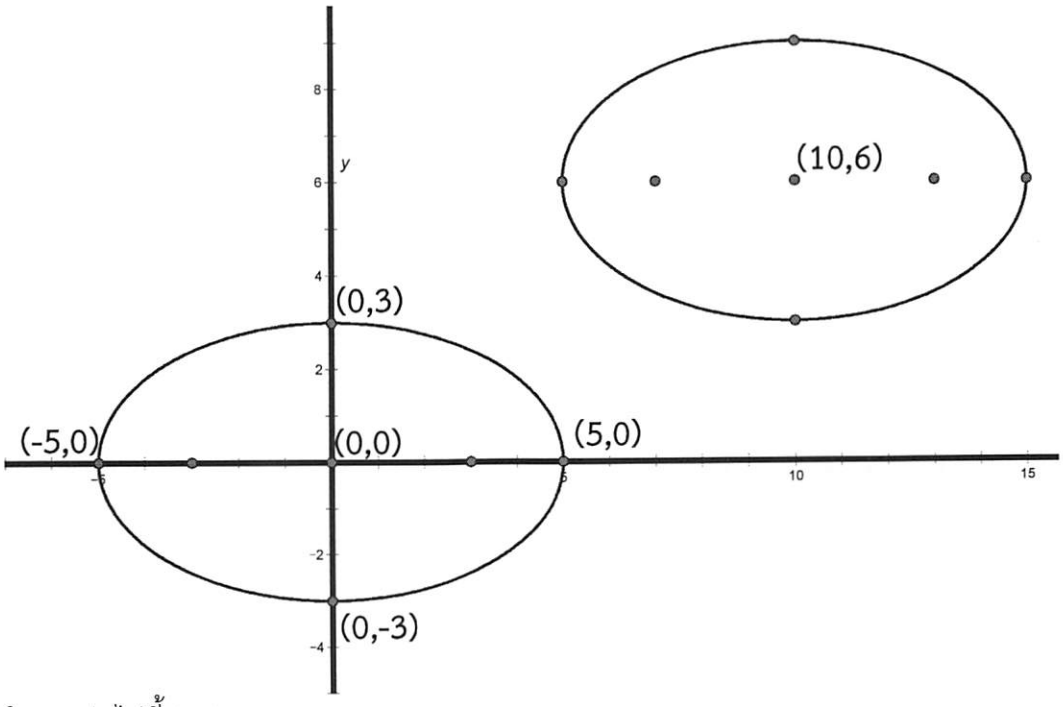
.....

.....

กิจกรรมที่ 4

วงรี ที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h,k)

กำหนดวงรีที่มีสมการเป็น: $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ ถ้าเลื่อนรูวงรี โดยเลื่อนทางขนานให้จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (10,6) ดังรูป จะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไรบ้าง



1. จงตอบคำถามต่อไปนี้ (P1)

- จุดศูนย์กลาง (0,0) ย้ายไปอยู่พิกัดใด ตอบ .....
- จุด (5,0) ย้ายไปอยู่พิกัดใด ตอบ .....
- จุด (0,3) ย้ายไปอยู่พิกัดใด ตอบ .....
- จุด (-5,0) ย้ายไปอยู่พิกัดใด ตอบ .....
- จุด (0,-3) ย้ายไปอยู่พิกัดใด ตอบ .....

2. ถ้าจุด P_1 มีพิกัด (x,y) เป็นจุดใด ๆ บน $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ จะย้ายไปอยู่ที่พิกัดใด (P1)

.....

3. ถ้าจุด P เลื่อนไปที่จุด Q ให้มีพิกัดเป็น (h,k) สมการวงรีนี้จะเปลี่ยนเป็นอย่างไร (P1, Re1)

.....

.....

.....

.....

ประเด็นการอภิปราย

ให้นักเรียนตั้งสมมุติฐานว่า
รูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h,k) ได้ เป็นอย่างไร
พร้อมทั้งพิสูจน์ว่าตรงตามสมมติฐานที่ตั้งไว้หรือไม่

คำชี้แจง ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ลงในช่องว่าง

1. จากปัญหา ให้นักเรียนระบุเงื่อนไขของปัญหา และสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ

สิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ คือ (P1) .....

.....

.....

เงื่อนไขของปัญหา มีอะไรบ้าง (Re1) .....

.....

.....

2. ข้อมูลที่กำหนดมีอะไรบ้าง (Re1)

.....

.....

.....

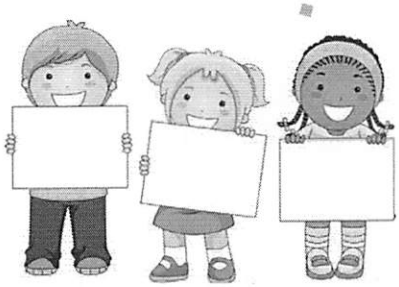
3. เพียงพอที่จะหาคำตอบหรือไม่ ถ้าไม่ ต้องหาข้อมูลใดเพิ่มเติม และจะหาได้อย่างไร (P1, P2)

.....

.....

.....

สมมุติฐาน



4. ให้นักเรียนแสดงวิธีทำโดยละเอียด (P2, Re2)

5. ให้นักเรียนสรุปคำตอบ พร้อมทั้งแสดงความสมเหตุสมผลของคำตอบ (P3, R3, Re3)

ตอบ รูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h,k) ใด ๆ คือ .....

ตรงกับสมมติฐานที่ตั้งไว้หรือไม่ (R3) ❑ ตรง ❑ ไม่ตรง

เพราะ .....

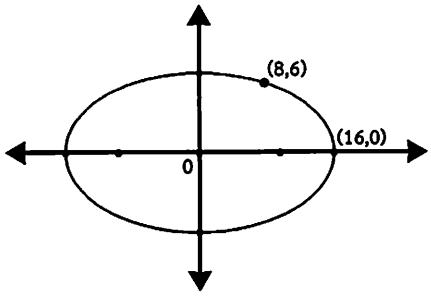
.....

6. จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส ความยาวแกนเอก และความยาวแกนโท แล้วเขียนกราฟของ

$$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$$

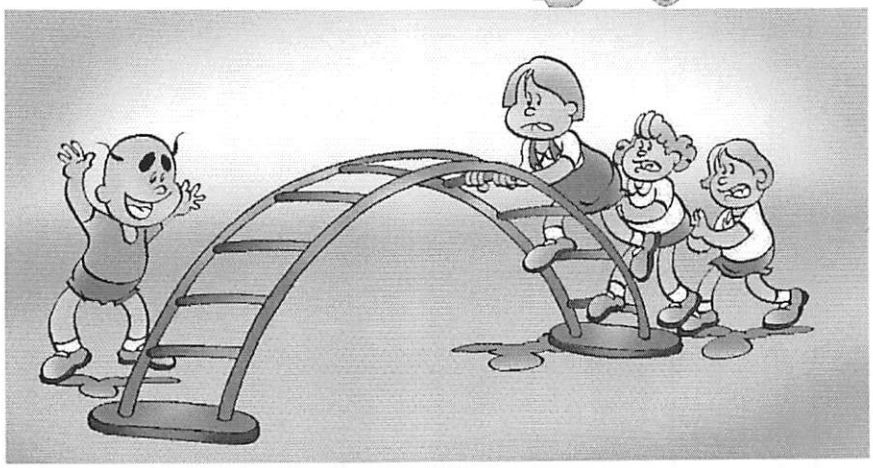
(Re2, Re3 ,P2, P3)

7. จงหาสมการวงรีที่มีกราฟ ต่อไปนี้ (Re2, Re3 ,P2, P3)



กิจกรรมที่ 5

ปัญหาเกี่ยวกับวงรี



สถานการณ์ "สะพานโค้งในสนามเด็กเล่น"

สะพานโค้งในสนามเด็กเล่นแห่งหนึ่งมีลักษณะเป็นรูปครึ่งวงรี ปลายสะพานทั้งสองอยู่ห่างกันเป็นระยะ 12 เมตร จุดสูงสุดของสะพานโค้งนี้อยู่ห่างจากพื้นดินเป็นระยะ 4 เมตร

เด็กคนหนึ่งชื่อสุที กำลังปีนข้ามสะพานขณะที่เขาอยู่ห่างจากปลายสะพานข้างหนึ่งโดยวัดระยะในแนวราบได้ 1 เมตร

ครูดวงดาวและครูอุบล กำลังสังเกตการเล่นเครื่องเล่นของนักเรียน เกิดการโต้เถียงกัน โดยที่ครูดวงดาวบอกว่าเด็กชายสุทีอยู่สูงจากพื้นมากกว่า 1 เมตร แต่ครูอุบลบอกว่าเด็กชายสุทีอยู่สูงจากพื้นไม่ถึง 1 เมตร นักเรียนเห็นด้วยกับครูท่านใด จงอธิบายเหตุผล

คำชี้แจง ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ลงในช่องว่าง

1. ปัญหานี้ต้องการทราบอะไร (P1) .....

.....

.....

2. ข้อมูลที่กำหนดให้มีอะไรบ้าง (R1) .....

.....

.....

3. เพียงพอที่จะหาคำตอบหรือไม่ ถ้าไม่ ต้องหาข้อมูลใดเพิ่มเติม และจะหาได้อย่างไร (R1)

.....

.....

4. จะแก้ปัญหานี้ได้อย่างไร นักเรียนจะนำความรู้ สูตร ทฤษฎีบทหรือหลักการใดทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้ปัญหา (R1, Re1)

.....

.....

.....

.....

5. ให้นักเรียนแสดงวิธีทำโดยละเอียด (P2, R2, Re2)

6. จากวิธีการที่ทำมาทั้งหมด ได้ข้อสรุปในการแก้ปัญหานี้อย่างไร (P3, R3, Re3)

ตอบ .....

.....

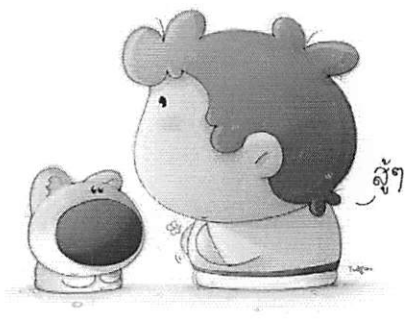
.....

7. คำตอบที่ได้เป็นจริงเสมอไปหรือไม่ เพราะเหตุใด (R3)

.....

.....

.....



กิจกรรมสืบเสาะทางคณิตศาสตร์ เรื่อง

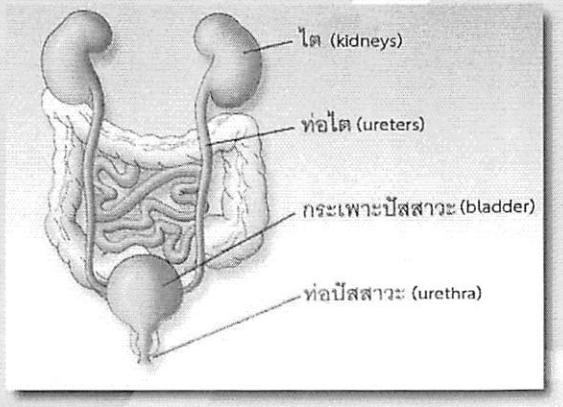
วงรีสลายนิ่ว

วงรีสลายนิ่ว

ในปัจจุบันโรคนิ่วในระบบทางเดินปัสสาวะเป็นโรคที่พบได้บ่อย เกิดได้กับทุกเพศทุกวัย แต่จะพบในชายมากกว่าหญิงประมาณ 3 เท่า สำหรับประเทศไทยจะพบคนที่เป็นโรคนิ่วมากในภาคเหนือและภาคอีสาน

ทางการแพทย์จึงให้ความสำคัญกับการรักษาโรคนี้และมีการพัฒนาวิธีการรักษาอยู่ตลอดเวลาจนในปัจจุบันมีวิธีการรักษาแบบหนึ่งซึ่งเป็นการรักษาจากภายนอกและใช้เวลาพักฟื้นไม่นานนัก แต่สิ่งที่น่าทึ่งคือการรักษาด้วยวิธีนี้ได้นำความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์มาช่วยในกระบวนการดำเนินงานด้วย

นิ่ว เป็นสิ่งแปลกปลอมที่อยู่ในร่างกายของเรา นิ่วในระบบทางเดินปัสสาวะเกิดจากการตกผลึกของตะกอนในปัสสาวะ เช่น หินปูน (แคลเซียม) ออกซาเลต ฟอสเฟต กรดยูริก และซีสตีน ดังนั้นอวัยวะใดที่ปัสสาวะผ่านในระบบทางเดินปัสสาวะ ดังรูปที่1 ก็จะทำให้เกิดนิ่วได้ นิ่วจึงสามารถเกิดได้ทั้งในไต ท่อไต กระเพาะปัสสาวะ และท่อปัสสาวะ

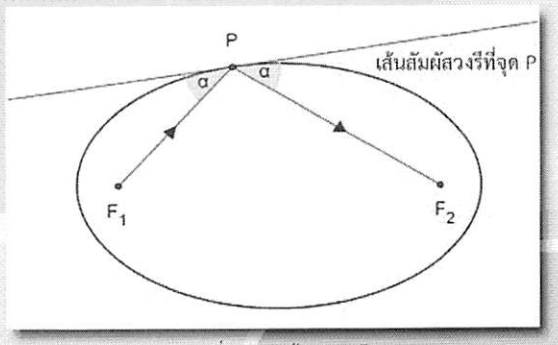


รูปที่ 1 ระบบทางเดินปัสสาวะ
(ที่มา: http://bomsand.blogspot.com/2013_01_01_archive.html)

"อั้นฉี่นาน ๆ ระวังเป็นนิ่วนะ" เป็นวลีที่คงจะคุ้นหูตั้งแต่เด็ก เพราะว่าการอั้นปัสสาวะนาน ๆ จะทำให้ตะกอนที่อยู่ในปัสสาวะตกค้างอยู่ในระบบทางเดินปัสสาวะ เมื่อนานเข้าตะกอนก็จะสะสมกันจนเกิดเป็นก้อนนิ่ว นอกจากนั้น เพศ อายุ กรรมพันธุ์ ปริมาณน้ำที่ดื่ม ก็ยังเป็นปัจจัยที่ทำให้เกิดนิ่วได้อีกด้วย

โดยปกติ นิ่วที่มีขนาดเล็กจะหลุดออกได้เองพร้อมกับปัสสาวะ โดยการดื่มน้ำสะอาดมาก ๆ รับประทานยาละลายนิ่ว หรือยาขับปัสสาวะ ในกรณีที่นิ่วมีขนาดใหญ่จนร่างกายไม่สามารถขับออกมาได้ จำเป็นที่จะต้องใช้วิธีการรักษาแบบอื่นที่เรียกว่า lithotripsy และในบทความนี้จะขอพูดถึงวิธีการรักษาดังกล่าว เนื่องจากเครื่องมือที่ใช้มีความน่าสนใจทางคณิตศาสตร์ เพราะใช้สมบัติการสะท้อนของวงรีในกระบวนการทำงาน แต่การรักษาด้วยวิธีนี้จะเหมาะกับนิ่วที่อยู่ในไตและท่อไต และนิ่วจะต้องมีขนาดไม่เกิน 2 เซนติเมตร ถ้านิ่วมีขนาดใหญ่กว่านี้ต้องใช้วิธีการผ่าตัด

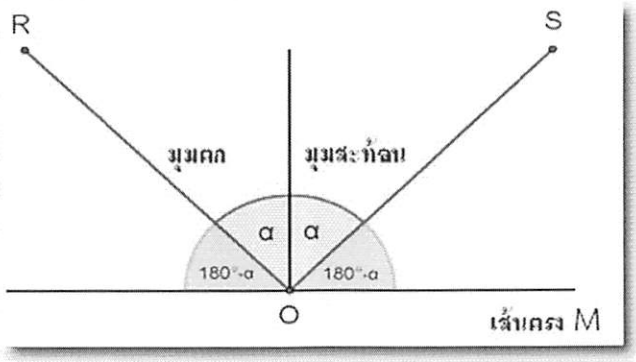
วงรีมีสมบัติที่มีความสำคัญประการหนึ่ง คือ สมบัติการสะท้อน เช่น ถ้าสร้างทรงรีให้เป็นกระจกที่สะท้อนแสงได้ แล้วแสงจะเดินทางจากโฟกัสหนึ่งของทรงรีไปกระทบกับพื้นผิวของทรงรีจากนั้นจะถูกสะท้อนไปยังโฟกัสที่สองของทรงรี ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 การสะท้อนของวงรี

25

สมบัติดังกล่าวอธิบายได้โดยเริ่มจากกฎการสะท้อนของแสงบนเส้นตรง เพราะเมื่อแสงเดินทางไปกระทบกับเส้นตรงแล้วแสงจะถูกสะท้อนออกมาโดยมุมตกกระทบเท่ากับมุมสะท้อน ดังรูปที่ 3 ทำให้แสดงได้ด้วยว่าระยะทางของแสงที่เดินทางจากจุด R ไปกระทบจุด O แล้วสะท้อนไปยังจุด S เป็นระยะทางที่สั้นที่สุด เมื่อเทียบกับระยะทางที่แสงเดินทางจากจุด R ไปกระทบจุดอื่น ๆ บนเส้นตรง M แล้วสะท้อนไปยังจุด S (อ่านวิธีการพิสูจน์ได้จากหนังสือเพิ่มเติมเสริมศักยภาพการเรียนรู้คณิตศาสตร์มัธยมศึกษาตอนปลาย (ม.4-6) : เรขาคณิตวิเคราะห์) จากรูปที่ 2 ถ้าจะแสดงว่าแสงเดินทางจากจุด F_1 ไปกระทบกับพื้นผิวทรงรีที่จุด P แล้วสะท้อนไปยังจุด F_2 ก็เพียงแค่แสดงว่าระยะทางของแสงที่เดินทางจากจุด F_1 ไปกระทบผิวทรงรีที่จุด P แล้วสะท้อนไปยังจุด F_2 เป็นระยะทางที่สั้นที่สุดเมื่อเทียบกับระยะทางที่แสงเดินทางจากจุด F_1 ไปกระทบจุดอื่น ๆ บนเส้นสัมผัสวงรีที่จุด P แล้วสะท้อนไปยังจุด F_2 ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้



รูปที่ 3 การสะท้อนของแสงบนเส้นตรง

การพิสูจน์ จากรูปที่ 4 ให้ A เป็นจุดใด ๆ บนวงรี สร้างเส้นตรง l ซึ่งเป็นเส้นสัมผัสของวงรีที่จุด A

ให้ B เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง l โดยที่จุด B ไม่ทับจุด A

ให้ C เป็นจุดตัดของวงรีกับเส้นตรง BF_2

จากบทนิยามของวงรี จะได้ว่า

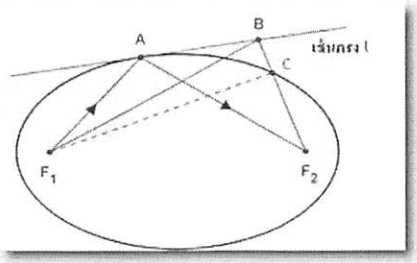
$$F_1C + CF_2 = F_1A + AF_2$$

จากอสมการอิงรูปสามเหลี่ยม (triangle inequality) จะได้ว่า

$$F_1B + BC > F_1C$$

ดังนั้น $F_1B + BF_2 = F_1B + BC + CF_2 > F_1C + CF_2 = F_1A + AF_2$

จะได้ว่าจุด A เป็นจุดบนเส้นตรง l ที่ทำให้ระยะทางของแสงที่เดินทางจาก F_1 ไปตกกระทบเส้นตรง l แล้วสะท้อนไปยัง F_2 เป็นระยะทางที่สั้นที่สุด จากหลักการสะท้อนแสงบนเส้นตรงที่ได้กล่าวมา จะได้ว่ามุมตกกระทบเท่ากับมุมสะท้อน ดังนั้นแสงที่เดินทางจากโฟกัสหนึ่งของทรงรีไปกระทบกับพื้นผิวของทรงรีจะถูกสะท้อนไปยังอีกโฟกัสหนึ่งของทรงรีเสมอ



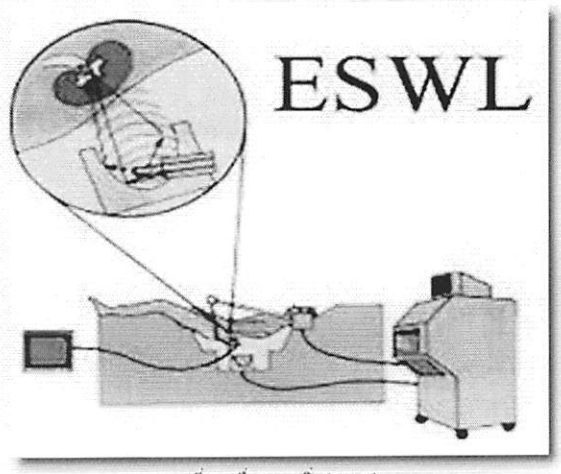
รูปที่ 4

26

สมบัติการสะท้อนนี้ไม่ได้เป็นจริงสำหรับแสงเท่านั้น แต่ยังเป็นจริงสำหรับคลื่นเสียงด้วย และสมบัตินี้เองที่ถูกนำไปใช้เป็นกระบวนการทำงานของเครื่องสลายนิ่ว (Extracorporeal Shock Wave Lithotripsy/ESWL machine) โดยเครื่องสลายนิ่วถูกออกแบบให้มีลักษณะเป็นรูปครึ่งทรงรีและมีแหล่งกำเนิดคลื่นเสียงความถี่สูงอยู่ในตำแหน่งโฟกัสที่หนึ่งของทรงรี การสลายนิ่วด้วยเครื่องนี้จะเลื่อนเครื่องสลายนิ่วเข้าไปใกล้ตัวผู้ป่วยจนตำแหน่งโฟกัสที่สองของทรงรีตรงกับตำแหน่งของนิ่ว เมื่อปล่อยคลื่นเสียงความถี่สูงออกจากแหล่งกำเนิดคลื่นเสียงตรงตำแหน่งโฟกัสที่หนึ่ง คลื่นเสียงก็จะเคลื่อนที่ไปกระทบกับผิวของทรงรี จากสมบัติการสะท้อนของทรงรี ไม่ว่าคลื่นเสียงไปกระทบที่ส่วนไหนของทรงรีก็ตาม คลื่นจะถูกสะท้อนไปยังจุดโฟกัสที่สองเสมอ นั่นคือตำแหน่งของนิ่วดังรูปที่ 5 ดังนั้นตำแหน่งของนิ่วจึงเป็นจุดรวมของคลื่นเสียงที่ถูกสะท้อนจากทรงรีทุกทิศทุกทาง ซึ่งทำให้เกิดการสั่นสะเทือนที่ก้อนนิ่วและทำให้ก้อนนิ่วแตกเป็นชิ้นเล็ก ๆ ในที่สุด โดยจะใช้เวลาในการรักษาประมาณ 1 ชั่วโมง จากนั้นร่างกายก็จะขับก้อนนิ่วที่แตกเป็นชิ้นเล็ก ๆ ออกมาทางปัสสาวะ

เครื่องสลายนิ่วเป็นเครื่องมือที่ใช้ภายนอกร่างกาย ดังนั้นผู้ป่วยที่รักษาด้วยวิธีนี้จะไม่ได้รับความเจ็บปวดมากนักและสามารถกลับบ้านได้ภายใน 1 วัน ด้วยเหตุนี้วิธีการรักษานิ่วโดยใช้เครื่องสลายนิ่วจึงเป็นที่นิยมอย่างแพร่หลาย

ไม่เพียงแต่วงรีเท่านั้น รูปเรขาคณิตอื่น ๆ ก็มีสมบัติ ซึ่งสามารถนำมาประยุกต์ใช้เพื่อช่วยในการแก้ปัญหาต่าง ๆ หรือช่วยในการพัฒนาเทคโนโลยีใหม่ ๆ ได้ เช่น การใช้สมบัติของพาราโบลาในการสร้างจานรับส่งสัญญาณ การใช้สมบัติของไฮเพอร์โบลาในการสร้างกล้องโทรทรรศน์ชนิดสะท้อนแสง ดังนั้นการจัดการเรียนรู้ให้ผู้เรียนได้ศึกษาคณิตศาสตร์จากชีวิตจริงจะช่วยให้ผู้เรียนมองเห็นประโยชน์ในการเรียนคณิตศาสตร์มากขึ้น อีกทั้งยังช่วยพัฒนาศักยภาพของผู้เรียนในการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิตและเตรียมความพร้อมให้แก่ผู้เรียนสำหรับการทำงานในอนาคต



รูปที่ 5 เครื่องสลายนิ่ว (ESWL)
(ที่มา: http://bme240.eng.uci.edu/students/09s/ysantoro/CurrTechn.html)

บรรณานุกรม

Natasha Glydon. Lithotripsy – A Medical Application of the Ellipse. สืบค้นเมื่อ 20 มกราคม 2557, จาก http://mathcentral.uregina.ca/beyond/articles/Lithotripsy/lithotripsy1.html

วิสูตร คงเจริญสมบัติ. (2557). อาการและการรักษานิ่วในระบบทางเดินปัสสาวะ. สืบค้นเมื่อ 20 มกราคม 2557, จาก http://www.prostate-rama.com/reading_detailphp?cid=5

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. กระทรวงศึกษาธิการ (2557). *หนังสือเพิ่มเติมเสริมศักยภาพการเรียนรู้คณิตศาสตร์ มัธยมศึกษาตอนปลาย (ม.4-6) : เรขาคณิตวิเคราะห์*. กรุงเทพมหานคร: สถาบันพัฒนาคุณภาพวิชาการ.

ที่มา : shorturl.at/eqKY6 (นิตยสาร สสวท.)

จากบทความข้างต้น ให้นักเรียนร่วมกันศึกษาค้นคว้าและอภิปรายร่วมกันว่าเพราะเหตุผู้เขียนจึงใช้ชื่อเรื่องว่า "วงรีสลายนิ่ว" ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แบบทดสอบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ (วงกลม วงรี และพาราโบลา)

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เป็นแบบทดสอบชนิดอัตนัย มีจำนวน 3 ข้อ แต่ละข้อมีคำถามย่อย 4 ข้อ

2. เวลาในการทดสอบ 60 นาที

3. คะแนนเต็มข้อละ 18 คะแนน รวม 54 คะแนน

4. หากมีปัญหาใด ๆ โปรดสอบถามผู้คุมสอบ

ชื่อ.....**ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เลขที่**.....

แบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์

(หลังเรียน)

ปัญหา 1 วงโคจรของดวงดาว

เด็กเลี้ยงแกะ 2 คน หลังจากนำฝูงแกะ เข้านอนเรียบร้อยแล้วจึงพากันมองบนท้องฟ้าเห็นดาว "ลูกปลา" โคจรรอบดาว "จระเข้" เป็นวงกลมมีสมการเคลื่อนที่คือ $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ เสมอตามการคำนวณของเด็กเลี้ยงแกะคนแรก อยู่มาวันหนึ่งเด็กเลี้ยงแกะอีกคนก็เห็นมีดาว "ลูกหมีสีน้ำตาล" เคลื่อนที่ล้อมรอบดาว "สิงโต" เป็นวงกลมเช่นกันและมีสมการการเคลื่อนที่ของดาวลูกหมีสีน้ำตาล คือ $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ เสมอ ถ้าหากทั้งสองวงโคจรอยู่บนระนาบเดียวกันตามการคำนวณของเด็กเลี้ยงแกะทั้งสอง และดาวจระเข้กับดาวสิงโต ไม่เคลื่อนที่เลย

เด็กเลี้ยงแกะ ทั้งสองกำลังเถียงกันเกี่ยวกับวงโคโจรของดาวลูกปลา และดาวลูกหมีสีน้ำตาลโดยคนแรกบอกว่า ***"วงโคจร ของดาวตัดกัน แสดงว่า อาจจะเกิดการชนกันของดาวทั้งสองนี้ได้"*** คนที่สองบอกว่า ***"ไม่มีทางที่จะ ชนกัน เพราะวงโคจรของดาวทั้งสองไม่ตัดกันเลย"*** ให้นักเรียนวิเคราะห์ว่าคำพูดของใครถูกต้อง พร้อมให้เหตุผลประกอบ

1.1 จากปัญหา ให้นักเรียนระบุเงื่อนไขของปัญหา และสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ (P1, Re1)

สิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ คือ.....

.....

เงื่อนไขของปัญหา คือ .....

.....

1.2 นักเรียนจะนำความรู้ สูตร ทฤษฎีบทหรือหลักการใดทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้ปัญหา และเหตุใดจึงใช้ความรู้ดังกล่าว (R1, Re1)

ความรู้ที่ใช้ คือ.....

.....

.....

เพราะ .....

.....

1.3 ให้นักเรียนแสดงวิธีทำโดยละเอียด (P2, Re2)

1.4 ให้นักเรียนสรุปคำตอบ พร้อมทั้งแสดงความสมเหตุสมผลของคำตอบ (P3, R3, Re3)

ตอบ.....

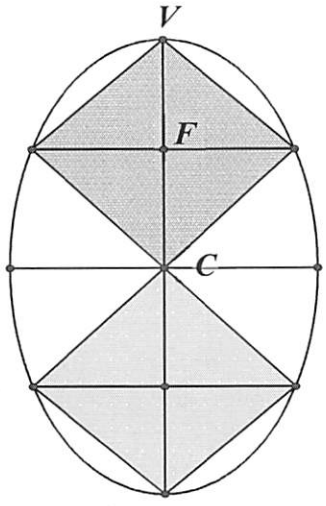
.....

เพราะ

ปัญหา 2 สวนหย่อมรูปวงรี

บ้านมหาเศรษฐีผู้หนึ่งต้องการย้ายน้ำพุและพื้นทางเดิน (ดังรูป) ออก เพื่อปรับปรุงสวนหย่อมรูปวงรีนี้ให้เป็นสวนหย่อมที่มีเฉพาะต้นหญ้าและดอกไม้ แต่ยังคงลักษณะเป็นรูปวงรีเช่นเดิม

ถ้าสวนหย่อมรูปวงรีมีสมการเป็น $16x^2 + 9y^2 - 32x - 560 = 0$ โดย F คือโฟกัสของวงรี V คือจุดยอดจุดหนึ่งของวงรี และ C คือจุดศูนย์กลางของวงรี โดยมหาเศรษฐีต้องการปลูกหญ้าเพื่อประดับสวนหย่อมในส่วนที่แรเงา ดังรูปต่อไปนี้



ถ้าหน่วยที่ใช้เป็นเมตรและเสียเงินค่าปลูกหญ้าตารางเมตรละ 20 บาท แล้วมหาเศรษฐีต้องจ่ายเงินค่าปลูกหญ้าทั้งหมดเท่าใด

2.1 จากปัญหา ให้นักเรียนระบุเงื่อนไขของปัญหา และสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ (P1, Re1)

สิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ คือ.....

.....

เงื่อนไขของปัญหา คือ .....

.....

.....

2.2 นักเรียนจะนำความรู้ สูตร ทฤษฎีบทหรือหลักการใดทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้ปัญหา และเหตุใดจึงใช้ความรู้ดังกล่าว (R1, Re1)

ความรู้ที่ใช้ คือ.....

.....

เพราะ .....

.....

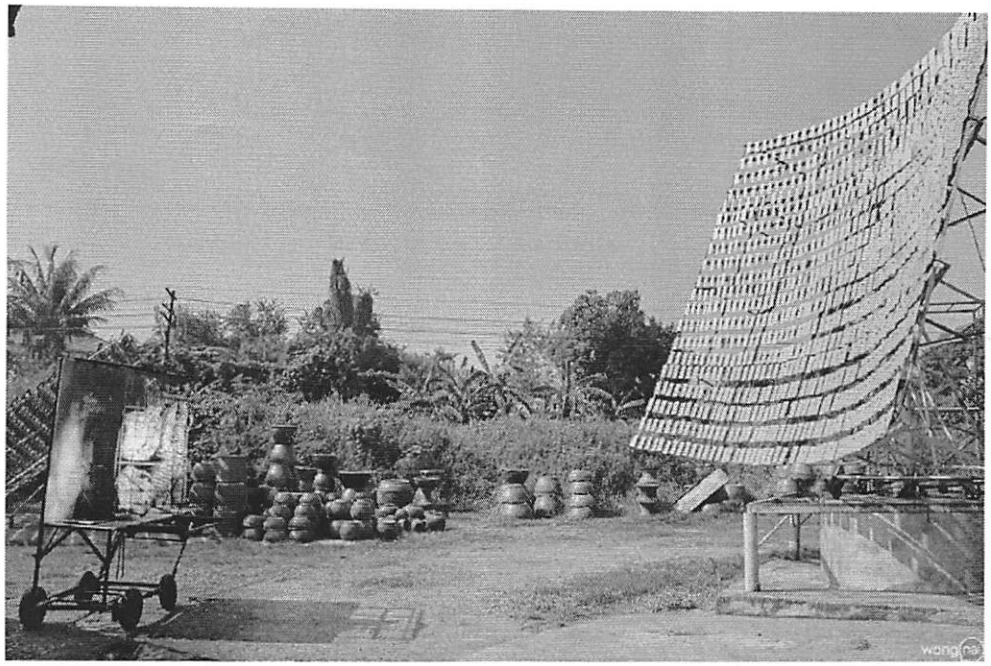
2.3 ให้นักเรียนแสดงวิธีทำโดยละเอียด (P2, Re2)

2.4 ให้นักเรียนสรุปคำตอบ พร้อมทั้งแสดงความสมเหตุสมผลของคำตอบ (P3, R3, Re3)

ตอบ.....

เพราะ

ปัญหา 3 ไก่ย่างพลังงานแสงอาทิตย์



ไก่ย่างพลังงานแสงอาทิตย์ เจ้าเดียวในโลก! ลุงศิลาเพชรบุรี
อานุภาพพลังงานแสงอาทิตย์ เนรมิตไก่ย่างพลังงานแสงอาทิตย์ เจ้าเดียวในโลกของลุงศิลา จังหวัดเพชรบุรี

ลุงศิลาเจ้าของร้านไก่ย่างพลังงานแสงอาทิตย์กำลังย่างไก่ย่างด้วยพลังงานแสงอาทิตย์ร้อน ๆ เครื่องย่างไก่คือกระจกบานเล็ก ๆ เรียงรวม ๆ กันหันไปในทิศทางเดียวกันอยู่บนแผงคล้ายพาราโบลา แล้วยิงไปตรงแผงแขวนย่างไก่ ไม่น่าเชื่อว่าความร้อนแบบนี้จะทำให้ไก่สุกได้
ที่มา: https://www.wongnai.com/news/grilled-chicken-solar-energy-phetchaburi?ref=ct

จากสถานการณ์ข้างต้น ถ้าลุงศิลาต้องการสร้างสิ่งประดิษฐ์รูปทรงพาราโบลาเพิ่มขึ้นเพื่อ ให้เพียงพอต่อยอดขายที่เพิ่มขึ้นในช่วงเทศกาล จึงออกแบบโดยวาดภาพร่างลงในระบบพิกัดฉาก โดยใช้อัตราส่วน 1 หน่วย : 50 เมตร ให้จุดยอดของพาราโบลาอยู่ที่จุด (6,4) ห่างจาก
เส้นไดเรคตริกซ์ 2 หน่วย แล้วลุงศิลาจะต้องวางตำแหน่งของแผงย่างไก่ ห่างจากส่วนเว้าของพาราโบลาย่างไก่ นั้น อย่างน้อยกี่เมตร

3.1 จากปัญหา ให้นักเรียนระบุเงื่อนไขของปัญหา และสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ (P1, Re1)
สิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ คือ.....

.....

เงื่อนไขของปัญหา คือ .....

.....

3.2 นักเรียนจะนำความรู้ สูตร ทฤษฎีบทหรือหลักการใดทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้ปัญหา และเหตุใดจึงใช้ความรู้ดังกล่าว (R1, Re1)

ความรู้ที่ใช้ คือ.....

.....

.....

เพราะ .....

.....

3.3 ให้นักเรียนแสดงวิธีทำโดยละเอียด (P2, Re2)

3.4 ให้นักเรียนสรุปคำตอบ พร้อมทั้งแสดงความสมเหตุสมผลของคำตอบ (P3, R3, Re3)

ตอบ.....

เพราะ

ภาคผนวก ค แบบตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือการวิจัย

1. แบบตรวจสอบคุณภาพของแผนการจัดการเรียนรู้และใบกิจกรรมของผู้เรียน
2. แบบตรวจสอบคุณภาพของแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้
3. แบบตรวจสอบคุณภาพของแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์

แบบตรวจสอบคุณภาพของแผนการจัดการเรียนรู้
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง วงกลม

.....

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 ค31202	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 (แผนการเรียนวิทยาศาสตร์)
ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562	วงจรปฏิบัติการที่ 1
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรขาคณิตวิเคราะห์	เวลา 40 ชั่วโมง
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง วงกลม	เวลา 5 ชั่วโมง

1. กำหนดมาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัดทางคณิตศาสตร์และศาสตร์อื่นได้สอดคล้องกับหลักสูตรแกนกลางหรือไม่ อย่างไร

.....

.....

2. กำหนดสาระการเรียนรู้แกนกลางทางคณิตศาสตร์และศาสตร์อื่นได้ถูกต้อง มีความชัดเจนเข้าใจง่าย เหมาะสมกับวัยของผู้เรียนหรือไม่ อย่างไร

.....

.....

3. กำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ได้สอดคล้องกับมาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัด สาระการเรียนรู้แกนกลาง ครอบคลุมตัวแปรที่ศึกษา ข้อความชัดเจนเข้าใจง่าย สามารถวัดและประเมินผลการเรียนรู้ของผู้เรียนได้อย่างแท้จริงหรือไม่ อย่างไร

.....

.....

4. กำหนดกิจกรรมการเรียนรู้ได้สอดคล้องกับสาระการเรียนรู้แกนกลาง จุดประสงค์การเรียนรู้ เรียงลำดับกิจกรรมได้เหมาะสม มีรายละเอียดกิจกรรมที่ปฏิบัติได้ชัดเจน และสอดคล้องกับเวลาเรียนหรือไม่ อย่างไร

.....

.....

5. กำหนดกิจกรรมการเรียนรู้ได้สอดคล้องกับขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรียงลำดับกิจกรรมได้เหมาะสม มีรายละเอียดกิจกรรมที่ปฏิบัติได้ชัดเจน และสอดคล้องกับเวลาเรียนหรือไม่ อย่างไร

.....

.....

.....

.....

6. กำหนดสื่อ/แหล่งการเรียนรู้ได้สอดคล้องกับกิจกรรมการเรียนรู้ ส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้หรือไม่ อย่างไร

.....

.....

.....

.....

7. การวัดและประเมินผลการเรียนรู้สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ มีวิธีการวัดและประเมินผลที่เหมาะสม ใช้เครื่องมือการวัดและประเมินผลที่เหมาะสมหรือไม่ อย่างไร

.....

.....

.....

.....

.....

8. เนื้อหาทางคณิตศาสตร์ใน<u>ใบกิจกรรม</u> มีความยากง่ายเหมาะสมกับผู้เรียนหรือไม่ อย่างไร

.....

.....

.....

9. ข้อคำถามในใบกิจกรรมสอดคล้องกับกิจกรรมการเรียนรู้ตามแผนการจัดการเรียนรู้หรือไม่หรือไม่ อย่างไร

.....

.....

.....

.....

10. ข้อคำถามในใบกิจกรรมมีความชัดเจนเข้าใจง่ายหรือไม่หรือไม่ อย่างไร

.....

.....

.....

.....

11. ความคิดเห็น/ข้อเสนอแนะเพิ่มเติมต่อแผนการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....ผู้เชี่ยวชาญ

(.....)

แบบตรวจสอบคุณภาพของแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้

1. พฤติกรรมของผู้สอนที่ระบุในข้อคำถามในแต่ละขั้นสอดคล้องกับกิจกรรมการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ที่ระบุในแผนการจัดการเรียนรู้หรือไม่อย่างไร

1.1 ขั้นการปฏิบัติที่ 1 การคาดการณ์การเรียนรู้และการทำงานทางคณิตศาสตร์

.....

.....

.....

.....

1.2 ขั้นการปฏิบัติที่ 2 การนำเข้าสู่งานทางคณิตศาสตร์ (Launching)

.....

.....

.....

.....

1.3 ขั้นการปฏิบัติที่ 3 การกำกับและติดตามการทำงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน (Monitoring)

.....

.....

.....

.....

1.4 ขั้นการปฏิบัติที่ 4 การคัดเลือกและจัดลำดับแนวคิดหรือวิธีการของนักเรียน (Selecting and Sequencing)

.....

.....

.....

.....

1.5 การเชื่อมโยงข้อสรุปจากแนวคิดหรือวิธีการไปสู่ความรู้ใหม่ (Connecting)

.....

.....

.....

.....

2. ข้อคำถามในการสะท้อนผลมีความชัดเจนและเหมาะสม **<u>สามารถสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของผู้วิจัย</u>** ได้หรือไม่ อย่างไร

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. ความคิดเห็น/ข้อเสนอแนะเพิ่มเติมต่อแบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....ผู้เชี่ยวชาญ

(.....)

แบบตรวจสอบคุณภาพของแบบทดสอบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ สำหรับนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
(สำหรับผู้เชี่ยวชาญ)

คำชี้แจง

แบบตรวจสอบคุณภาพของแบบทดสอบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ สำหรับนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีวัตถุประสงค์เพื่อให้ผู้เชี่ยวชาญใช้สำหรับตรวจสอบความเหมาะสมของแบบทดสอบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้น

โปรดพิจารณาความถูกต้องเหมาะสมของแบบทดสอบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ตามประเด็นคำถามที่กำหนดไว้ในแบบตรวจสอบนี้ โดยตอบคำถามตามความคิดเห็นของท่าน และโปรดให้ข้อเสนอแนะเพิ่มเติมลงในช่องความคิดเห็น/ข้อเสนอแนะ

ขอขอบคุณที่ท่านให้ความอนุเคราะห์ในการตรวจสอบ แก้ไข คำแนะนำของท่านจะเป็นประโยชน์อย่างมากในการศึกษาครั้งนี้

นายปิยะวัฒน์ ศรีสังวาลย์
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา
คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร
ผู้วิจัย

แบบตรวจสอบคุณภาพของแบบทดสอบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์
เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ สำหรับนักเรียนแผนการเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

1. สถานการณ์ปัญหาสอดคล้องกับมาตรฐานและตัวชี้วัดทางคณิตศาสตร์หรือไม่ อย่างไร
ปัญหาที่ 1 วงโคจรของดวงดาว ....
ปัญหาที่ 2 สวนดอกไม้รูปวงรี ....
ปัญหาที่ 3 บุญบั้งไฟ ....

2. สถานการณ์ปัญหาสอดคล้องกับทักษะการคิดเชิงคณิตศาสตร์ (การแก้ปัญหา / การให้เหตุผล / การนำเสนอตัวแทนความคิด) หรือไม่ อย่างไร
ปัญหาที่ 1 วงโคจรของดวงดาว ....
ปัญหาที่ 2 สวนดอกไม้รูปวงรี ....

ปัญหาที่ 3 บุญบั้งไฟ

.....

.....

.....

3. เนื้อหาทางคณิตศาสตร์ในสถานการณ์ปัญหามีความยากง่ายเหมาะสมกับผู้เรียนหรือไม่ อย่างไร

ปัญหาที่ 1 วงโคจรของดวงดาว

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 2 สวนดอกไม้รูปวงรี

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 3 บุญบั้งไฟ

.....

.....

.....

4. ข้อคำถามในสถานการณ์ปัญหามีความชัดเจนเข้าใจง่ายหรือไม่ อย่างไร

ปัญหาที่ 1 วงโคจรของดวงดาว

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 2 สวนดอกไม้รูปวงรี

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 3 บุญบั้งไฟ

.....

.....

.....

5. บริบทในสถานการณ์ปัญหาเหมาะสมกับผู้เรียนหรือไม่ อย่างไร

ปัญหาที่ 1 วงโคจรของดวงดาว

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 2 สวนดอกไม้รูปวงรี

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 3 บุญบั้งไฟ

.....

.....

.....

6. ความคิดเห็น/ข้อเสนอแนะเพิ่มเติมต่อแบบทดสอบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์

ปัญหาที่ 1 วงโคจรของดวงดาว

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 2 สวนดอกไม้รูปวงรี

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 3 บุญบั้งไฟ

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....ผู้เชี่ยวชาญ

(.....)

ประวัติผู้วิจัย

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ – ชื่อสกุล ปิยะวัฒน์ ศรีสังวาลย์

วัน เดือน ปี เกิด 17 กรกฎาคม 2535

ที่อยู่ปัจจุบัน บ้านเลขที่ 117/3 หมู่ที่ 1 ตำบลคณฑี
อำเภอเมืองกำแพงเพชร จังหวัดกำแพงเพชร 62000

ที่ทำงานปัจจุบัน โรงเรียนนครไตรตรึงษ์ ตำบลไตรตรึงษ์
อำเภอเมืองกำแพงเพชร จังหวัดกำแพงเพชร 62160

ตำแหน่งหน้าที่ปัจจุบัน ครู

ประสบการณ์การทำงาน

พ.ศ. 2560 โรงเรียนวังแขมวิทยาคม อำเภอคลองขลุง จังหวัดกำแพงเพชร

พ.ศ. 2558 โรงเรียนวังข่อยพิทยา อำเภอไพศาลี จังหวัดนครสวรรค์

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2557 วท.บ. (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยนเรศวร

พ.ศ. 2557 กศ.บ. (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยนเรศวร

ผลงานตีพิมพ์

ปิยะวัฒน์ ศรีสังวาลย์. (2558). ความงามทางคณิตศาสตร์กับสะเต็มศึกษา: Sierpinski Triangle. *วารสารคณิตศาสตร์*, 62(692): 69-79. (TCI กลุ่ม 2)

ให้นักเรียนได้เกิดความเข้าใจในสิ่งที่เรียน และสามารถนำไปประยุกต์ในสถานการณ์ใหม่ได้ และยังสอดคล้องกับ สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2000) ที่กล่าวว่าแนวทางการพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ทำได้โดยเน้นให้นักเรียนสร้างความรู้ร่วมกับการฝึกการรู้คิด (Metacognition) และได้เสนอหลักการเรียนรู้ไว้ว่า นักเรียนต้องเรียนคณิตศาสตร์ด้วยความเข้าใจ นักเรียนที่เรียนโดยการท่องจำสูตร กฎ ทฤษฎีหรือขั้นตอนกระบวนการต่าง ๆ โดยปราศจากความเข้าใจนั้นมักจะไม่สามารถนำความรู้นั้นไปใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ และสอดคล้องกับงานวิจัยที่ใช้แนวคิดของโมเดลของสไตน์ในการพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ งานวิจัยของ Groth (2015) ที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลของการใช้โมเดลของสไตน์เพื่อสนับสนุนการอภิปรายทางสถิติ พบว่าห้องที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้โมเดลของสไตน์นั้น นักเรียนมีความรู้เพิ่มขึ้นอย่างเห็นได้ชัดและสูงกว่าห้องที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนแบบปกติ และสอดคล้องกับงานวิจัยของ Young (2015) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลของการใช้โมเดลของสไตน์ในการจัดการเรียนการสอนกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 พบว่า โมเดลของสไตน์ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาสาระที่ดีขึ้น

การศึกษาพัฒนาการของการคิดเชิงคณิตศาสตร์โดยภาพรวมจากใบกิจกรรมที่ได้จากวงจรปฏิบัติการที่ 1, 2 และ 3 แสดงให้เห็นว่านักเรียนได้มีระดับพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้น ทั้งนี้เนื่องมาจากการจัดการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ ผู้วิจัยได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น 3 เรื่องย่อย ได้แก่ วงกลม วงรี และพาราโบลา จัดกิจกรรมการเรียนรู้ควบคู่ไปกับการทำวิจัยเชิงปฏิบัติการในชั้นเรียน มีลักษณะเป็นพลวัต นั่นคือมีการพัฒนาอย่างต่อเนื่องทั้งครูและผู้เรียนไปพร้อมกัน วงจรปฏิบัติการละ 1 เรื่อง ทำให้ผู้วิจัยได้ตรวจสอบการเรียนรู้เป็นระยะ เพื่อปรับปรุงการเรียนรู้ของผู้เรียน ทำให้นักเรียนมีพัฒนาการขึ้นเป็นลำดับ ซึ่งสอดคล้องกับ ชาตรี ฝ่ายคำตา และคณะ (2559) ที่กล่าวว่า การวิจัยในชั้นเรียนเป็นการสืบเสาะหาความรู้อย่างมีระเบียบแบบแผนเพื่อแก้ปัญหาการเรียนรู้ของนักเรียนและการสอนของครู และยังสอดคล้องกับ จิตติรัตน์ แสงเลิศอุทัย และ ชัยยุธ มณีรัตน์ (2562) ที่กล่าวว่า การวิจัยในชั้นเรียนทำให้ผู้เรียนได้รับการพัฒนาอย่างเป็นระบบ มีการเก็บรวบรวมข้อมูลด้านพัฒนาการ ความสามารถ จุดเด่นและจุดด้อยที่ควรได้รับการพัฒนา ทั้งรายบุคคลและรายกลุ่ม

เมื่อพิจารณาพัฒนาการของการคิดเชิงคณิตศาสตร์รายด้านจากใบกิจกรรมและแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามขั้นการปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์สามารถพัฒนาองค์ประกอบย่อยของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ดังนี้

แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 ค31202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 (แผนการเรียนวิทยาศาสตร์)

ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562 วงจรปฏิบัติการที่ .....

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรขาคณิตวิเคราะห์ เวลา 40 ชั่วโมง

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ..... เรื่อง ..... เวลา 5 ชั่วโมง

ผู้สังเกตการจัดการเรียนรู้

❑ ครู (ผู้ร่วมวิจัย) ❑ อาจารย์มหาวิทยาลัย

❑ ผู้วิจัย ❑ อื่น ๆ .....

วิธีการสังเกต ❑ โดยตรง ❑ โดยเทปบันทึกภาพและเสียง

คำชี้แจง

แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ฉบับนี้ สร้างขึ้นเพื่อเก็บรวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับพฤติกรรมการสอนของครู ขณะที่การจัดกิจกรรมการเรียนการรู้ดำเนินอยู่จนกระทั่งจบชั่วโมง และผู้วิจัยสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ของตนเอง เพื่อนำผลจากการสังเกตไปปรับปรุงและพัฒนาการจัดการเรียนการสอนครั้งต่อไป

ขอให้ผู้สังเกตการจัดการเรียนรู้ บันทึกแนวทางการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัยในแต่ละขั้นตอนว่าเหมาะสมตามแนวปฏิบัติ 5 ขั้นของสไตน์ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ หรือไม่ เขียนบรรยายสภาพปัญหา ข้อดี และข้อที่ควรปรับปรุง จากการสังเกตพฤติกรรมการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัยในครั้งนี้

พร้อมทั้ง บันทึกแนวทางการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัยในแต่ละขั้นตอนว่า สามารถพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Thinking) ได้หรือไม่ อย่างไร เพื่อที่จะนำข้อมูลที่ได้ไปใช้ในการปรับปรุงและพัฒนาการจัดการเรียนรู้ในครั้งต่อไป

กระบวนการจัดการเรียนรู้ที่ใช้ คือ การปฏิบัติ 5 ขั้น ของสไตน์ ที่เน้นการอภิปรายทางคณิตศาสตร์ ได้แก่